数理解析研究所講究録
第 1857 巻 2013 年 69-76

ファジィ集合値写像の極限について

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

金沢学院大学 経営情報学部　桑野 裕昭 (Hiroaki KUWANO)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

概 要

レベル集合を用いてファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限を定義し、それら性質を調べる。通常の集合をファジィ集合と区別したい場合はクリスプ集合とよぶことにする。ファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限は、クリスプ集合列の極限およびクリスプ集合値写像の極限のファジィ版である。

1 準備

ファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限を考えるときに必要になるクリスプ集合列の極限およびクリスプ集合値写像の極限について [4] に従って準備する。その後、ファジィ集合に関する準備をする。

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}, [a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\},]a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\leq b\},]a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ とする。

$a_\lambda\in[0,1], \lambda\in\Lambda$ に対して、$\wedge_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=\inf_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda, \vee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=\sup_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda$ とする。ただし、$\Lambda=\emptyset$ のときは $\wedge_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=\inf_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=1, \vee_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=\sup_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda=0$ とする。

$\mathbb{N}$ をすべての自然数の集合とし

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\infty &= \{N\subset\mathbb{N}:\mathbb{N}\setminus N \text{ finite}\}=\{\text{ subsequences of } \mathbb{N} \text{ containing all } k \text{ beyond some } k_0\ \}\\ \mathcal{N}_\infty^\sharp &= \{N\subset\mathbb{N}: N \text{ infinite}\}=\{\text{ all subsequences of } \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

とする。列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列はある $N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp$ に対して $\{x_k\}_{k\in N}$ の形で表される。$\mathbb{N}$ における $k\to\infty$ のとき $\lim_k, \lim_{k\to\infty}$ または $\lim_{k\in\mathbb{N}}$ と書くが、添字集合 $N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp$ または $N\in\mathcal{N}_\infty$ に対しての場合は $\lim_{k\in N}$ または $\lim_{k\underset{N}{\to}\infty}$ と書く。

集合 $C\subset\mathbb{R}^n$ に対して、$\mathrm{cl}(C), \mathrm{co}(C), \overline{\mathrm{co}}(C)$ をそれぞれ C の閉包, 凸包, 閉凸包とする。$\overline{\mathrm{co}}(C)$ は C を含む最小の閉凸集合であり、C を含むすべての閉凸集合の共通部分であり、$\overline{\mathrm{co}}(C)=\mathrm{cl}(\mathrm{co}(C))$ となることが知られている（[2] の Corollary 1.2.1)。

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \mathcal{CK}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ のすべての閉集合, 凸集合, 閉凸集合の集合とする。

本研究は科研費（22510133）の助成を受けたものである。

1.1 集合列の極限

まず、集合列の極限を定義する。

定義１－１（[4] の Definition 4.1）$\mathbb{R}^n$ の部分集合の列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して、その下極限を集合

$$\liminf_{k\to\infty} C_k \;=\; \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : \exists N\in\mathcal{N}_\infty, \exists \boldsymbol{x}_k\in C_k(k\in N) \text{ with } \boldsymbol{x}_k \underset{N}{\to} \boldsymbol{x}\right\}$$

と定義し、その上極限を集合

$$\limsup_{k\to\infty} C_k \;=\; \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n : \exists N\in\mathcal{N}_\infty^\sharp, \exists \boldsymbol{x}_k\in C_k(k\in N) \text{ with } \boldsymbol{x}_k \underset{N}{\to} \boldsymbol{x}\right\}$$

と定義する。$\liminf_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k$ のとき、$\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するといい

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \limsup_{k\to\infty} C_k = \liminf_{k\to\infty} C_k$$

と定義する。

1.2 集合値写像の極限

次に、集合値写像の極限を定義する。

各 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に集合 $F(\boldsymbol{x})\subset\mathbb{R}^m$ を対応させる写像 F を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への集合値写像といい、$F:\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ と表す。F が閉-値, 凸-値, 閉凸-値であるとは、任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対してそれぞれ $F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^m), F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^m), F(\boldsymbol{x})\in\mathcal{CK}(\mathbb{R}^m)$ であるときをいう。

定義１－２（[4] の p.152）$F:\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$ とする。このとき、$\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}$ のときの F の下極限を

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) = \bigcap_{\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}} \liminf_{k\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k)$$

と定義し、$\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}$ のときの F の上極限を

$$\limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}} \limsup_{k\to\infty} F(\boldsymbol{x}_k)$$

と定義する。ここで、$\cap_{\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}}, \cup_{\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}}$ はそれぞれ $\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}$ となる任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ に関する共通部分, 和集合を意味する。$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x})$ のとき、$\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}$ のときの F の極限が存在するといい

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) = \liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x})$$

と定義する。

定義1－3（[4] の Definition 5.4）集合値写像を $F:\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とする。F が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において下半連続であるとは

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) \supset F(\overline{\boldsymbol{x}})$$

となるときをいい、F が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において上半連続であるとは

$$\limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) \subset F(\overline{\boldsymbol{x}})$$

となるときをいう。F が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において連続であるとは、F が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において下半連続かつ上半連続、すなわち

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x}) = F(\overline{\boldsymbol{x}})$$

のときをいう。

1.3 ファジィ集合

次に、ファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限を考えるときに必要になるファジィ集合のレベル集合に関する性質を調べる。

$\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合 $\widetilde{s}$ とそのメンバーシップ関数を同一視し、その同一視されたメンバーシップ関数も $\widetilde{s}:\mathbb{R}^n \to [0,1]$ と表す。$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべてのファジィ集合の集合とする。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ と $\alpha \in [0,1]$ に対して $\widetilde{s}$ の α-レベル集合は

$$[\widetilde{s}]_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{s}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$

と定義される。

クリスプ集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して、S の指示関数は各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$c_S(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in S \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \notin S \end{cases}$$

である $c_S:\mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ と定義される。ただし、c_S をファジィ集合として考える場合は $c_S:\mathbb{R}^n \to [0,1]$ とみなす。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\widetilde{s} = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{[\widetilde{s}]_\alpha}$$

と表現でき、分解定理として知られている（例えば、[1] 参照）。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が閉であるとは、$\widetilde{s}$ が上半連続であるときをいう。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が閉であるための必要十分条件は、$[\widetilde{s}]_\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \alpha \in]0,1]$ となることである。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が凸であるとは

$$\widetilde{s}(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \geq \widetilde{s}(\boldsymbol{x}) \wedge \widetilde{s}(\boldsymbol{y}) \quad \text{for } \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0,1]$$

のときをいう。すなわち、$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が凸であるとは $\widetilde{s}$ が準凹関数であるときをいい、$\widetilde{s}$ が凸であるための必要十分条件は $[\widetilde{s}]_\alpha \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \alpha \in]0,1]$ となることである。

$\mathcal{CF}(\mathbb{R}^n), \mathcal{KF}(\mathbb{R}^n), \mathcal{CKF}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ 上のすべての閉ファジィ集合, 凸ファジィ集合, 閉凸ファジィ集合の集合とする。

ファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限を考えるときに必要になるファジィ集合とレベル集合の間の関係を調べるために

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} : \text{“}S_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in]0,1]\text{” and “}S_\beta \supset S_\gamma \text{ for } \beta, \gamma \in]0,1] \text{ with } \beta < \gamma\text{”}\}$$

と定義し、$M : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を各 $\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}$$

と定義する。$\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]})(\boldsymbol{x}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sup\{\alpha \in]0,1] : \boldsymbol{x} \in S_\alpha\}$$

と表せる。ただし、$\sup \emptyset = 0$ とする。また、分解定理は、$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\widetilde{s} = M(\{[\widetilde{s}]_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]})$$

と表せる。

定義１−４ $\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\widetilde{s}$ の閉包 $\mathrm{cl}(\widetilde{s})$, 凸包 $\mathrm{co}(\widetilde{s})$, 閉凸包 $\overline{\mathrm{co}}(\widetilde{s})$ をそれぞれ

$$\mathrm{cl}(\widetilde{s}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{\mathrm{cl}([\widetilde{s}]_\alpha)} = M(\{\mathrm{cl}([\widetilde{s}]_\alpha)\}_{\alpha \in]0,1]})$$

$$\mathrm{co}(\widetilde{s}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{\mathrm{co}([\widetilde{s}]_\alpha)} = M(\{\mathrm{co}([\widetilde{s}]_\alpha)\}_{\alpha \in]0,1]})$$

$$\overline{\mathrm{co}}(\widetilde{s}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{\overline{\mathrm{co}}([\widetilde{s}]_\alpha)} = M(\{\overline{\mathrm{co}}([\widetilde{s}]_\alpha)\}_{\alpha \in]0,1]})$$

と定義する。

クリスプ集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathrm{cl}(c_S) = c_{\mathrm{cl}(S)}, \quad \mathrm{co}(c_S) = c_{\mathrm{co}(S)}, \quad \overline{\mathrm{co}}(c_S) = c_{\overline{\mathrm{co}}(S)}$$

となるので、ファジィ集合の閉包, 凸包, 閉凸包はクリスプ集合の閉包, 凸包, 閉凸包の拡張になっている。

2　ファジィ集合列の極限

本節では、レベル集合を用いてファジィ集合列の極限を定義する。

次の定義２－１は、定義１－１のファジィ版である。

定義２－１　$\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、各 $\alpha \in]0,1]$ に対して

$$L_\alpha = \liminf_{k\to\infty}[\widetilde{s}_k]_\alpha, \quad U_\alpha = \limsup_{k\to\infty}[\widetilde{s}_k]_\alpha$$

とする。$\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の下極限をファジィ集合

$$\liminf_{k\to\infty}\widetilde{s}_k = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{L_\alpha} = M(\{L_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$$

と定義し、$\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の上極限をファジィ集合

$$\limsup_{k\to\infty}\widetilde{s}_k = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{U_\alpha} = M(\{U_\alpha\}_{\alpha\in]0,1]})$$

と定義する。$\liminf_{k\to\infty}\widetilde{s}_k = \limsup_{k\to\infty}\widetilde{s}_k$ のとき、$\{\widetilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するといい

$$\lim_{k\to\infty}\widetilde{s}_k = \liminf_{k\to\infty}\widetilde{s}_k = \limsup_{k\to\infty}\widetilde{s}_k$$

と定義する。

クリスプ集合 $S_k \subset \mathbb{R}^n, k\in\mathbb{N}$ に対して、$L = \liminf_{k\to\infty} S_k, U = \limsup_{k\to\infty} S_k$ とし、もし $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するならば $T = \lim_{k\to\infty} S_k$ とする。このとき、$\liminf_{k\to\infty} c_{S_k} = c_L, \limsup_{k\to\infty} c_{S_k} = c_U$ となり、もし $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の極限が存在するならば $\lim_{k\to\infty} c_{S_k} = c_T$ となる。よって、ファジィ集合列の下極限, 上極限, 極限はクリスプ集合列の下極限, 上極限, 極限の拡張になっている。

3　ファジィ集合値写像の極限

本節では、レベル集合を用いてファジィ集合値写像の極限を定義し、その性質を調べる。

ファジィ集合値写像 $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ と $\alpha \in]0,1]$ に対してクリスプ集合値写像 $F_\alpha : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ を各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$F_\alpha(\boldsymbol{x}) = [\widetilde{F}(\boldsymbol{x})]_\alpha$$

と定義する。

ファジィ集合値写像 $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ が閉-値, 凸-値, 閉凸-値であるとは、任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対してそれぞれ $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{CF}(\mathbb{R}^m), \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{KF}(\mathbb{R}^m), \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{CKF}(\mathbb{R}^m)$ であるときをいう。

次の定義３－１は、定義１－２のファジィ版である（後述の命題３－４参照)。

定義３－１　ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とし、各 $\alpha \in]0,1]$ に対して

$$L_\alpha(\overline{\boldsymbol{x}}) = \liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F_\alpha(\boldsymbol{x}), \quad U_\alpha(\overline{\boldsymbol{x}}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F_\alpha(\boldsymbol{x}),$$

とする。$\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの $\widetilde{F}$ の下極限をファジィ集合

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{L_\alpha(\overline{\boldsymbol{x}})} = M(\{L_\alpha(\overline{\boldsymbol{x}})\}_{\alpha\in]0,1]})$$

と定義し、$\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの $\widetilde{F}$ の上極限をファジィ集合

$$\limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \alpha c_{U_\alpha(\overline{\boldsymbol{x}})} = M(\{U_\alpha(\overline{\boldsymbol{x}})\}_{\alpha\in]0,1]})$$

と定義する。$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x})$ のとき、$\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの $\widetilde{F}$ の極限が存在するといい

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x})$$

と定義する。

クリスプ集合値写像 F: $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ と $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ に対して、$L(\overline{\boldsymbol{x}}) = \liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x})$, $U(\overline{\boldsymbol{x}}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x})$ とし、もし $\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの F の極限が存在するならば $T(\overline{\boldsymbol{x}}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} F(\boldsymbol{x})$ とする。このとき、$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} c_{F(\boldsymbol{x})} = c_{L(\overline{\boldsymbol{x}})}$, $\limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} c_{F(\boldsymbol{x})} = c_{U(\overline{\boldsymbol{x}})}$ となり、もし $\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの F の極限が存在するならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} c_{F(\boldsymbol{x})} = c_{T(\overline{\boldsymbol{x}})}$ となる。よって、ファジィ集合値写像の下極限, 上極限, 極限はクリスプ集合値写像の下極限, 上極限, 極限の拡張になっている。

次の定義３－２は、定義１－３のファジィ版である。

定義３－２　ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とする。$\widetilde{F}$ が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において下半連続であるとは

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \geq \widetilde{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$$

のときをいい、$\widetilde{F}$ が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において上半連続であるとは

$$\limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \leq \widetilde{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$$

のときをいう。$\widetilde{F}$ が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において連続であるとは、$\widetilde{F}$ が $\overline{\boldsymbol{x}}$ において下半連続かつ上半連続、すなわち

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$$

のときをいう。

命題３－３　ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とする。

(i) $\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{CF}(\mathbb{R}^m)$ となる。よって、$\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの $\widetilde{F}$ の極限が存在す

るならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{CF}(\mathbb{R}^m)$ となる。また、$\widetilde{u} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ に対して、$\overline{\boldsymbol{x}}$ のある近傍 $V \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{u}, \boldsymbol{x} \in V$ ならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{cl}(\widetilde{u})$ となる。

(ii) $\widetilde{F}$ は凸-値であるとする。このとき、$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{CKF}(\mathbb{R}^m)$ となる。よって、$\boldsymbol{x} \to \overline{\boldsymbol{x}}$ のときの $\widetilde{F}$ の極限が存在するならば $\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{CKF}(\mathbb{R}^m)$ となる。

次の命題3－4は、定義3－1が定義1－2のファジィ版であることを示している。

命題3－4 ファジィ集合値写像を $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}} \liminf_{k\to\infty} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}_k), \quad \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{\boldsymbol{x}_k\to\overline{\boldsymbol{x}}} \limsup_{k\to\infty} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}_k)$$

となる。

命題3－5 ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}, \widetilde{G} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}}$ のある近傍 $V \subset \mathbb{R}^n$ が存在して $\mathrm{cl}(\widetilde{F}(\boldsymbol{x})) = \mathrm{cl}(\widetilde{G}(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{x} \in V$ であるとする。このとき、$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \liminf_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{G}(\boldsymbol{x}), \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \limsup_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{G}(\boldsymbol{x})$ となる。

命題3－6 ファジィ集合値写像を $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき、$\lim_{\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$ となるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}_k \to \overline{\boldsymbol{x}}$ となる任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\lim_{k\to\infty} \widetilde{F}(\boldsymbol{x}_k) = \widetilde{F}(\overline{\boldsymbol{x}})$ となることである。

4 結論

本稿では、クリスプ集合列の極限およびクリスプ集合値写像の極限のファジィ版として、ファジィ集合のレベル集合を用いてファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限を定義し、それらの性質を調べた。

ファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限に関して得られた結果は、すべてのファジィ集合（特に、所謂サポート有界でないファジィ集合）を扱っているという意味で非常に一般的な結果である。ファジィ集合列の極限およびファジィ集合値写像の極限は、最適解がファジィ集合として出力される数理モデルに対して、入力またはパラメータに関する最適解の安定性を考える場合に必要かつ重要な概念になる。そのような場合に、得られた一連の結果が有用であると期待できる。

参考文献

[1] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: history and basic notions, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade, Eds.) (Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000), pp.21-124.

[2] M. Florenzano and C. L. Van, *Finite Dimensional Convexity and Optimization*, (Springer-Verlag, Berlin, 2001).

[3] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).

[4] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational analysis*, (Springer-Verlag, New York, 1998).

[5] T. Tanino, Theory and applications of set-valued mappings – Part 1: fundamental properties of set-valued mappings – (in Japanese), Japan Society for Fuzzy and Systems, Vol. 13, 2001, pp.11-19.

[6] T. Tanino, Theory and applications of set-valued mappings – Part 2: derivatives of set-valued mappings and applications to optimization – (in Japanese), Japan Society for Fuzzy and Systems, Vol. 13, 2001, pp.146-154.

[7] T. Tanino, Theory and applications of set-valued mappings – Part 3: applications of set-valued mappings to dynamical systems, game theory and so on – (in Japanese), Japan Society for Fuzzy and Systems, Vol. 13, 2001, pp.234-242.