数理解析研究所講究録
第 1860 巻 2013 年 9-32

ガンマ分布の形状母数の推定について

大阪府立大・工学研究科 上玉利 瑛太 (Eita Kamitamari)
Graduate School of Engineering,
Osaka Prefecture University

大阪府立大・高等教育推進機構 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
Faculty of Liberal Arts and Sciences,
Osaka Prefecture University

1 はじめに

ガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$ の確率密度関数は,

$$f(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (x>0)$$

と表わされ, $\alpha(>0)$ は形状母数, $\beta(>0)$ は尺度母数と呼ばれる. ガンマ分布は様々な分野で幅広く応用されている. ガンマ分布のハザード比 (ある一つの個体の寿命がある時間だけ続いた後, 次の瞬間に死んでいる確率) は母数の値によって非増加, 定数, 非減少のいずれの場合にもなるため, 寿命分布のような, 非負の値しかとらない変量であり, 分布の形状が非対称である分布を考える上で, 非常に都合のよい分布となっている.

Dey, Ghosh, and Srinivasan [3] は, 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_p$ は独立とし, 確率変数 X_i $(i=1,2,\ldots,p)$ が形状母数 α_i が既知, 尺度母数 β_i が未知の $\mathrm{Gam}(\alpha_i,\beta_i)$ に従うとき, entropy loss の下での $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p$ の最良不変推定量 $\hat{\beta}$ の許容性を調べた. 彼らは, $p=2$ のとき, $\min(\alpha_1,\alpha_2)>4$ ならば, $\hat{\beta}$ は許容的であり, $p\geq 3$ のとき, $\hat{\beta}$ は非許容的となることを示した. 尺度母数の推定量の許容性は比較的扱いやすく, 様々な研究がなされている. 一方, 形状母数の推定量の許容性については小標本の立場からは比較的困難であり, それほど多くの研究はなされていないようである. そこで, 本論では大標本の立場から形状母数の推定量の許容性について考えることにする.

Ghosh and Sinha [4] は一般の 1 母数分布族の設定の下で, 修正最尤推定量が 2 次漸近許容的となるための必要十分条件を導出した. また, Obayashi, Tanaka and Takagi [5] は p (≥ 2) 母数のとき, 基準化された 2 乗誤差損失関数の下で, 修正最尤推定量が 2 次漸近許容的となるための必要条件と十分条件を導出した. 最近では, Takagi [6] が形状母数, 尺度母数が未知のガンマ分布において, 形状母数 (1 母数) の最尤推定量 (以下, MLE), 線形偏り修正最尤推定量 (LMLE), 最尤尺度不変推定量 (IMLE) の 2 次漸近許容性について考察し, それらの 2 次漸近許容性と非許容性

を明らかにした. そこで本論では, これらの結果を 2 母数の場合に拡張する.

本論の構成は以下の通りである. まず, 第 2 章では本論で用いる記号や定義を与え, 2 母数分布の一般的な設定における 2 次漸近許容性に関するいくつかの結果を紹介する. 第 3 章ではガンマ分布における形状母数の IMLE を紹介し, MLE との関係について述べる. 第 4 章ではガンマ分布における形状母数の LMLE と線形偏り修正 IML 推定量 (LIMLE) の 2 次漸近許容性について調べる.

2 準備

本章では, 一般的な設定において規準化された 2 乗誤差損失関数の下での 2 次漸近許容性に関する必要条件及び十分条件について述べる.

まず, $X_1, \dots, X_n$ を互いに独立に同一の分布 P_θ に従う確率ベクトルとする. ただし, $\theta = (\theta_1, \theta_2)' \in \mathbb{R}^2$ は未知母数である. ここで, P_θ はある σ-有限測度に関する確率密度関数 $f(x, \theta)$ を持つものとする. さらに, 適当な正則条件 (例えば Takeuchi and Akahira [7] の (i)〜(iv)) を仮定する. このとき, 規準化された 2 乗誤差損失関数

$$l(\theta, \hat{\theta}) := (\hat{\theta} - \theta)' I(\theta)(\hat{\theta} - \theta)$$

の下で θ の推定問題を考える. $R(\theta, \hat{\theta})$ を θ の推定量 $\hat{\theta}$ のリスク, つまり, $R(\theta, \hat{\theta}) := E_\theta[l(\theta, \hat{\theta})]$ とする. $\lambda_{\max}(\theta)$ と $\lambda_{\min}(\theta)$ をそれぞれ $I(\theta)$ の最大固有値, 最小固有値とし, $\mathrm{tr}\{A\}$ と $|A|$ をそれぞれ正方行列 A のトレース, 行列式とする. また, ベクトル値関数 $f(\theta)$ に対して, $(d/d\theta)f(\theta) := ((\partial/\partial\theta_1)f(\theta), (\partial/\partial\theta_2)f(\theta), \dots, (\partial/\partial\theta_p)f(\theta))'$, $(d/d\theta')f(\theta) := ((d/d\theta)f(\theta))'$ とする.

Ghosh and Sinha [4] は以下のような 2 次漸近許容性の概念を提案した.

定義 $\mathcal{D}$ を θ の 1 次漸近有効な推定量のクラスとする.
(I) 以下の (i), (ii) を同時に満たす $\hat{\theta}^*(\in \mathcal{D})$ が存在するならば, $n \to \infty$ のとき, $\hat{\theta}(\in \mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ において 2 次漸近非許容的であるという.

(i) 任意の $\theta \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\lim_{n\to\infty} n^2\{R(\theta, \hat{\theta}^*) - R(\theta, \hat{\theta})\} \leq 0$.

(ii) ある $\theta_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\lim_{n\to\infty} n^2\{R(\theta_0, \hat{\theta}^*) - R(\theta_0, \hat{\theta})\} < 0$.

(II) $n \to \infty$ のとき, $\hat{\theta}(\in \mathcal{D})$ が $\mathcal{D}$ において 2 次漸近非許容的でないならば, $n \to \infty$ のとき, $\hat{\theta}$ は $\mathcal{D}$ において 2 次漸近許容的であるという.

$\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ を θ の MLE とし, $\hat{\theta}_c$ を関数 c による θ の修正 MLE, つまり,

$$\hat{\theta}_c := \hat{\theta}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n} c(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}})$$

とする．ここで，推定量を

$$\mathcal{D} := \left\{ \hat{\theta}_c : c \in C^1(\mathbb{R}^2) \right\}$$

に制限して考える．ただし，$C^1(\mathbb{R}^2)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の連続的微分可能な関数全体である．以降，2 次漸近許容性は，規準化された 2 乗誤差損失関数の下で $n \to \infty$ のときの $\mathcal{D}$ における 2 次漸近許容性を意味するものとする．$b_c(\theta)$ を $\hat{\theta}_c$ の漸近バイアスの係数，つまり，$b_c(\theta) := \lim_{n\to\infty} nE_\theta[\hat{\theta}_c - \theta] = b_{\mathrm{ML}}(\theta) + c(\theta)$ とする．このとき，$\hat{\theta}_c$ と $\hat{\theta}_d (\in \mathcal{D})$ のリスクの差は，$n \to \infty$ のとき

$$R(\theta, \hat{\theta}_d) - R(\theta, \hat{\theta}_c) = \frac{1}{n^2} \mathrm{tr} \left\{ g(\theta) g'(\theta) I(\theta) + 2 b_c(\theta) g'(\theta) I(\theta) + 2 \frac{d}{d\theta'} g(\theta) \right\} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる．ここで，$g(\theta) := d(\theta) - c(\theta)$ である．よって，修正 MLE $\hat{\theta}_c$ が 2 次漸近許容的となるための必要十分条件は，任意の $\theta \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{tr} \left\{ g(\theta) g'(\theta) I(\theta) + 2 b_c(\theta) g'(\theta) I(\theta) + 2 \frac{d}{d\theta'} g(\theta) \right\} \le 0 \tag{2.1}$$

を満足する $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ が $g(\theta) = 0$ のみであることとなる．

ここで，ポテンシャル関数に対応する条件について述べる．

条件 (A1)　$b_c(\theta)$ に対して，連続的微分可能な関数 $\pi_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ が存在して，

$$I(\theta) b_c(\theta) = \frac{d}{d\theta} \log \pi_c(\theta)$$

が，すべての $\theta \in \mathbb{R}^2$ に対して成り立つ．

条件 (A1) の下で，(2.1) は $h(\theta) = g(\theta)\pi_c(\theta)$ と変換することにより，

$$\frac{1}{\pi_c(\theta)} h'(\theta) I(\theta) h(\theta) \le -2 \mathrm{tr} \left\{ \frac{d}{d\theta'} h(\theta) \right\} \tag{2.2}$$

と同値である．

ここで，$\theta \in \mathbb{R}^2$ を $\theta = r\omega_\xi$ と変換する．ただし，$r > 0$, $\omega_\xi := (\cos\xi, \sin\xi)$, $\xi \in [0, 2\pi)$ である．

定理 1　修正 MLE $\hat{\theta}_{c_0}$ は条件 (A1) を満足し，かつ，ある $\xi_0 \in [0, 2\pi)$ が存在して，すべての $\theta \in \Theta$ に対して，

$$H(\theta) := \int_0^\infty \left[\frac{\lambda_{\max}(x)}{\pi_{c_0}(x)} \right]_{x=\theta+r\omega_0} dr < \infty$$

を満足するものとする．ここで，$\omega_0 := \omega_{\xi_0}$ である．さらに，$H(\theta)$ の微分が積分記号内の微分によって得られる，つまり，

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} H(\theta) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\theta_i} \left[\frac{\lambda_{\max}(x)}{\pi_{c_0}(x)} \right]_{x=\theta+r\omega_0} dr \ (i = 1, 2)$$

を満足するものとする．このとき，$\hat{\theta}_{c_0}$ は 2 次漸近非許容的である．

定理1は積分と微分の順序交換可能性について吟味する必要がある.

定理 2 修正 MLE $\hat{\theta}_{c_0}$ は条件 (A1) を満たしているものとし,

$$\phi_{c_0}(r) := \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi_{c_0}(\theta)}{\lambda_{\min}(\theta)}\right]_{\theta=r\omega_\xi} d\xi$$

とおく. このとき, ある $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{dr}{r\phi_{c_0}(r)} = \infty$$

ならば, $\hat{\theta}_{c_0}$ は2次漸近許容的である.

3 IML 推定量

本章では, 最尤尺度不変推定量 (IMLE) について述べる. Zaigraev and Podraza-Karakulska [9] がバイアス, 分散を小さくするという意味で, MLE よりも良い IMLE と呼ばれる推定量を提案した. いま, 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_p$ は互いに独立に $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$ に従っているとする. また, $h(\alpha) := \log\alpha - \psi(\alpha)$ とすると MLE は,

$$h(\alpha) = \log\bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i$$

の解である. ただし, $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ とする. 一方, IMLE は,

$$h(\alpha) - h(n\alpha) = \log\bar{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i$$

の解である. ここで, α の最尤推定量を $\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$, IML 推定量を $\hat{\alpha}_{\mathrm{I}}$ とすると,

$$h(\hat{\alpha}_{\mathrm{I}}) - h(n\hat{\alpha}_{\mathrm{I}}) = h(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}})$$

となる. これを, $\hat{\alpha}_{\mathrm{I}} = \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$ の周りで Taylor 展開すると,

$$h(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) - h(n\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) + (h'(\hat{\alpha}^*_{\mathrm{ML}}) - nh'(n\hat{\alpha}^*_{\mathrm{ML}}))(\hat{\alpha}_{\mathrm{I}} - \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) = h(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) \tag{3.1}$$

となる. ここで, $\hat{\alpha}^*_{\mathrm{ML}} := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \gamma(\hat{\alpha}_{\mathrm{I}} - \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}})$ $(0 < \gamma < 1)$ である. Abramowitz and Stegun [1] の 6.3.18, 6.4.12 より, $\alpha \to \infty$ のとき,

$$\begin{cases} h(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha} + o\left(\dfrac{1}{\alpha}\right), \\ h'(\alpha) = -\dfrac{1}{2\alpha^2} + o\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right) \end{cases}$$

である．したがって，$n \to \infty$ のとき，

$$\begin{cases} h(n\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) = \dfrac{1}{2n\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}} + o_p\left(\dfrac{1}{n}\right), \\ h'(\hat{\alpha}^*_{\mathrm{ML}}) - nh'(n\hat{\alpha}^*_{\mathrm{ML}}) = h'(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) + o_p(1) \end{cases}$$

となることがわかる．それゆえに，(3.1) において，$n \to \infty$ とすることにより，

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{I}} = \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} h'(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}})}\right) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る．

4　ガンマ分布における2次漸近許容性

本章では，ガンマ分布の形状母数 (2 母数) の推定について考える．確率ベクトル X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は互いに独立とし，$X_i = (X_{i1}, X_{i2})'$ とする．確率変数 X_{ij} が $\mathrm{Gam}(\alpha_j, \beta_j)$ に従うとき，X_i の確率密度関数は，

$$f(x_i : \alpha, \beta) = \prod_{j=1}^{2}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha_j)\beta_j^{\alpha_j}} x_{ij}^{\alpha_j - 1} \exp\left(-\frac{x_{ij}}{\beta_j}\right)\right\} \quad (x_{ij} > 0)$$

であり，未知母数 $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)'(\in \mathbb{R}_+^2)$ は興味のある母数，未知母数 $\beta := (\beta_1, \beta_2)'(\in \mathbb{R}_+^2)$ は局外母数とする．ここで，ガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha_j, \beta_j)$ はパラメータ直交性をもたないので，パラメータ変換として，β_j を $\eta_j = \alpha_j \beta_j$ で変換する．このとき，X_i の確率密度関数は，

$$f(x_i : \alpha, \eta) = \prod_{j=1}^{2}\left\{\frac{{\alpha_j}^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)\eta_j^{\alpha_j}} x_{ij}^{\alpha_j - 1} \exp\left(-\frac{\alpha_j x_{ij}}{\eta_j}\right)\right\}$$

となり，フィッシャー情報行列は，

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \psi'(\alpha_1) - 1/\alpha_1 & & & \\ & \psi'(\alpha_2) - 1/\alpha_2 & & \\ & & \alpha_1/\eta_1^2 & \\ & & & \alpha_2/\eta_2^2 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$\theta := (\alpha_1, \alpha_2, \eta_1, \eta_2)'(\in \mathbb{R}_+^4)$ であり，$\psi(\alpha) := \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ はオイラーのディガンマ関数である．また，

$$I^*(\alpha) := \begin{pmatrix} \psi'(\alpha_1) - 1/\alpha_1 & 0 \\ 0 & \psi'(\alpha_2) - 1/\alpha_2 \end{pmatrix}$$

とする．

$\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$ を α の MLE とし, $\hat{\alpha}_c$ を関数 c による α の修正 MLE, つまり,

$$\hat{\alpha}_c := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n} c(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}, \hat{\eta}_{\mathrm{ML}})$$

とする. ここで, 推定量を

$$\mathcal{D} := \left\{ \hat{\alpha}_c : c \in C^1(\mathbb{R}_+^4) \right\}$$

に制限して考える. このとき, $\hat{\alpha}_c$ と $\hat{\alpha}_d$ のリスク差は, $n \to \infty$ のとき,

$$R(\theta, \hat{\alpha}_d) - R(\theta, \hat{\alpha}_c) = \frac{1}{n^2} \mathrm{tr} \left[g(\theta) g'(\theta) I^*(\alpha) + 2 b_c(\theta) g'(\theta) I^*(\alpha) + 2 \frac{d}{d\alpha'} g(\theta) \right] + o\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

となる. よって, 修正 MLE $\hat{\alpha}_c$ が 2 次漸近許容的となるための必要十分条件は, 任意の $\theta \in \mathbb{R}_+^4$ に対して,

$$\mathrm{tr} \left[g(\theta) g'(\theta) I^*(\alpha) + 2 b_c(\theta) g'(\theta) I^*(\alpha) + 2 \frac{d}{d\alpha'} g(\theta) \right] \leq 0 \tag{4.1}$$

を満足する $g \in C^1(\mathbb{R}_+^4)$ が $g(\theta) = 0$ のみであることとなる.

ここで, ポテンシャル関数に対応する条件について述べる.

条件 (A2) $b_c(\theta)$ に対して, 連続的微分可能な関数 $\pi_c : \mathbb{R}_+^4 \to \mathbb{R}_+$ が存在して,

$$I^*(\alpha) b_c(\theta) = \frac{d}{d\alpha} \log \pi_c(\theta)$$

が, すべての $\theta \in \mathbb{R}_+^4$ に対して成り立つ.

いま, 興味ある母数が負の値をとらないことに注意しなければならない (定理 2 の証明で円周上での積分にグリーンの定理を適用しており, 母数空間が $\mathbb{R}^2$ であることは本質的である). そこで定理 1 と定理 2 を適用するために次のような変換を行う.

$$\alpha := \begin{pmatrix} e^{s_1} \\ e^{s_2} \end{pmatrix}, \ \tilde{I}(s) := \begin{pmatrix} e^{s_1} & 0 \\ 0 & e^{s_2} \end{pmatrix} I^*(e^{s_1}, e^{s_2}) \begin{pmatrix} e^{s_1} & 0 \\ 0 & e^{s_2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{g}(s, \eta) := \begin{pmatrix} e^{-s_1} & 0 \\ 0 & e^{-s_2} \end{pmatrix} g(e^{s_1}, e^{s_2}, \eta), \ \tilde{b}_c(s, \eta) := \begin{pmatrix} e^{-s_1} & 0 \\ 0 & e^{-s_2} \end{pmatrix} b_c(e^{s_1}, e^{s_2}, \eta) + \tilde{I}^{-1}(s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このとき, (4.1) は任意の $s := (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $\eta \in \mathbb{R}_+^2$ に対して,

$$\mathrm{tr} \left[\tilde{g}(s, \eta) \tilde{g}'(s, \eta) \tilde{I}(s) + 2 \tilde{b}_c(s, \eta) \tilde{g}'(s, \eta) \tilde{I}(s) + 2 \frac{d}{ds'} \tilde{g}(s, \eta) \right] \leq 0$$

となる. 定理 1 と定理 2 と同様の議論で定理 3 と定理 4 を得る.

定理 3 修正 MLE $\hat{\alpha}_{c_0}$ は条件 (A2) を満足し, かつ, ある $\xi_0 \in [0, 2\pi)$ が存在して, すべての $s \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$H(s,\eta) := \int_0^\infty \left[\frac{\tilde{\lambda}_{\max}(z)}{\tilde{\pi}_{c_0}(z,\eta)} \right]_{z=s+r\omega_0} dr < \infty$$

を満足するものとする. ここで, $\tilde{\pi}_{c_0}(s,\eta) := \pi_{c_0}(e^{s_1}, e^{s_2}, \eta)e^{s_1+s_2}$, $\omega_0 := \omega_{\xi_0}$ であり, $\tilde{\lambda}_{\max}(s)$ は $\tilde{I}(s)$ の最大固有値である. さらに, $H(s,\eta)$ の微分が積分記号内の微分によって得られる, つまり,

$$\frac{\partial}{\partial s_i} H(\theta) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s_i} \left[\frac{\tilde{\lambda}_{\max}(z)}{\tilde{\pi}_{c_0}(z,\eta)} \right]_{z=s+r\omega_0} dr \ (i = 1, 2)$$

を満足するものとする. このとき, $\hat{\alpha}_{c_0}$ は 2 次漸近非許容的である.

定理 4 修正 MLE $\hat{\alpha}_{c_0}$ は条件 (A2) を満たしているものとし,

$$\phi_{c_0}(r,\eta) := \int_0^{2\pi} \left[\frac{\tilde{\pi}_{c_0}(s,\eta)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)} \right]_{s=r\omega_\xi} d\xi$$

とおく. ここで, $\tilde{\lambda}_{\min}(s)$ は $\tilde{I}(s)$ の最小固有値である. このとき, ある $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{dr}{r\tilde{\phi}_{c_0}(r)} = \infty$$

ならば, $\hat{\alpha}_{c_0}$ は 2 次漸近許容的である.

次に, α の線形偏り修正最尤推定量 $\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}}$ と α の線形偏り修正 IML 推定量 $\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}}$ の漸近バイアスの係数を求める. ここで,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{\mathrm{LML}} &= \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \hat{\alpha}_{\mathrm{LI}} &= \hat{\alpha}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{n} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \hat{\alpha}_{\mathrm{I}} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

であり, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ である. まず, 一般の設定の下で MLE の漸近バイアスの係数を求める. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立に確率密度関数 $f(x,\theta)$ をもつ分布に従うとする. ただし, $\theta := (\theta_1, \theta_2)' (\in \mathbb{R}^2)$ である. このとき, Takeuchi and Akahira [7] の定理 1 より, 適当な正則条件の下で,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{\mathrm{ML}} - \theta) = U(\theta) - \frac{1}{2\sqrt{n}} I_*^{-1}(\theta)V(\theta) + \frac{1}{\sqrt{n}} I_*^{-1}(\theta)W(\theta) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{4.2}$$

が成り立つ. ただし, $k,l,m=1,2$ に対して,

$$\begin{aligned}
&Z_k(\theta) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\log f(X_i:\theta),\ Z_{kl}(\theta) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_l}\log f(X_i:\theta) + I_{*kl}(\theta)\right\},\\
&\rho_{klm}(\theta) := J_{kl,m}(\theta) + J_{km,l}(\theta) + J_{lm,k}(\theta) + K_{klm}(\theta),\\
&U(\theta) := \left(\sum_{l=1}^{2} I_*^{kl}(\theta)Z_l(\theta)\right)_{k=1,2},\ V(\theta) := \left(\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\rho_{klm}(\theta)U_l(\theta)U_m(\theta)\right)_{k=1,2},\\
&W(\theta) := \left(\sum_{l=1}^{2} U_l(\theta)Z_{lk}(\theta)\right)_{k=1,2}
\end{aligned}$$

である. ここで, $I_*(\theta)$ は X_i のフィッシャー情報行列とし, $I_*^{kl}(\theta)$ は $I_*^{-1}(\theta)$ の (k,l) 成分である. 計算から,

$$\begin{aligned}
&E_\theta\left[Z_k(\theta)\right] = 0,\ E_\theta\left[Z_k(\theta)Z_l(\theta)\right] = I_{*kl}(\theta),\ E_\theta\left[Z_k(\theta)Z_{kl}(\theta)\right] = J_{lm,k}(\theta),\\
&E_\theta\left[U_k(\theta)\right] = 0,\ E_\theta\left[U_l(\theta)U_m(\theta)\right] = I_*^{lm}(\theta),\\
&E_\theta\left[V(\theta)\right] = \left(\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\rho_{klm}(\theta)I_*^{lm}(\theta)\right)_{k=1,2},\ E_\theta\left[W(\theta)\right] = \left(\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}I_*^{lm}(\theta)J_{lk,m}(\theta)\right)_{k=1,2}
\end{aligned}$$

を得る. (4.2) の両辺の期待値をとると, θ の MLE の漸近バイアスの係数は,

$$b_{\mathrm{ML}}(\theta) = \frac{1}{2}I_*^{-1}(\theta)E_\theta\left[2W(\theta) - V(\theta)\right]$$

となるので,

$$b_{\mathrm{ML}}(\theta) = -\frac{1}{2}I_*^{-1}(\theta)\left(\sum_{l=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}I_*^{lm}(\theta)\left(J_{lm,k}(\theta) + K_{klm}(\theta)\right)\right)_{k=1,2}$$

となることがわかる.

次に, $\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}}$, $\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}}$ の漸近バイアスの係数 $b_{\mathrm{LML}}(\alpha)$, $b_{\mathrm{LI}}(\alpha)$ を求める. いま, 確率ベクトル X_1 と X_2 は独立であるので, 1 母数, すなわち, 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立にガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha, \eta/\alpha)$ に従うときの $\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}}$ と $\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}}$ の漸近バイアスの係数を求めればよい.

$$\begin{aligned}
J_{kl,m}(\theta) &:= E_\theta\left[\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_k\partial\theta_l}\log f(X:\theta)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_m}\log f(X:\theta)\right\}\right],\\
K_{klm}(\theta) &:= E_\theta\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_k}\log f(X:\theta)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_l}\log f(X:\theta)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta_m}\log f(X:\theta)\right\}\right]
\end{aligned}$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
J_{11,1}(\theta) &= J_{11,2}(\theta) = J_{12,1}(\theta) = J_{21,1}(\theta) = J_{22,1}(\theta) = 0,\\
J_{12,2}(\theta) &= J_{21,2}(\theta) = \frac{1}{\eta^2}, \quad J_{22,2}(\theta) = -\frac{2\alpha}{\eta^3},\\
K_{111}(\theta) &= \psi''(\alpha) + \frac{1}{\alpha^2}, \quad K_{112}(\theta) = K_{121}(\theta) = K_{211}(\theta) = 0,\\
K_{221}(\theta) &= K_{212}(\theta) = K_{122}(\theta) = -\frac{1}{\eta^2}, \quad K_{222}(\theta) = \frac{2\alpha}{\eta^3}
\end{aligned}
$$

を得る．したがって, $\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ の漸近バイアスの係数 $b_{\mathrm{ML}}(\theta)$ は,

$$
b_{\mathrm{ML}}(\theta) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\psi''(\alpha)+1/\alpha^2}{(\psi'(\alpha)-1/\alpha)^2} - \dfrac{1}{\alpha\left(\psi'(\alpha)-1/\alpha\right)} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となることがわかる．それゆえに, $\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}$ の漸近バイアスの係数 $b_{\mathrm{ML}}(\alpha)$ は,

$$
b_{\mathrm{ML}}(\alpha) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{I_{11}^{*\prime}(\alpha)}{I_{11}^{*2}(\alpha)} - \dfrac{1}{\alpha_1 I_{11}^{*}(\alpha)} \\ \dfrac{I_{22}^{*\prime}(\alpha)}{I_{22}^{*2}(\alpha)} - \dfrac{1}{\alpha_2 I_{22}^{*}(\alpha)} \end{pmatrix}
$$

を得る．したがって, $\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}}$, $\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}}$ の漸近バイアスの係数 $b_{\mathrm{LML}}(\alpha)$, $b_{\mathrm{LI}}(\alpha)$ は, それぞれ

$$
\begin{aligned}
b_{\mathrm{LML}}(\alpha) &= E_\alpha(\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}} - \alpha)\\
&= E_\alpha(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} - \alpha) + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} E_\alpha(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\\
&= b_{\mathrm{ML}}(\alpha) + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\\
&= I^{*-1}(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{2}\frac{\exp\{(a_j\alpha_j+b_j)\psi(\alpha_j)-a_j\alpha_j\}}{\alpha_j^{b_j-1/2}\Gamma^{a_j}(\alpha_j)\sqrt{\psi'(\alpha_j)-1/\alpha_j}},\\
b_{\mathrm{LI}}(\alpha) &= E_\alpha(\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}} - \alpha)\\
&= E_\alpha(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} - \alpha) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} E_{\alpha_1}\left(\dfrac{1}{\alpha_{\mathrm{ML1}}h'(\alpha_{\mathrm{ML1}})}\right) \\ E_{\alpha_2}\left(\dfrac{1}{\alpha_{\mathrm{ML2}}h'(\alpha_{\mathrm{ML2}})}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} E_\alpha(\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}}) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\\
&= b_{\mathrm{ML}}(\alpha) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/\alpha_1 I_{11}^{*}(\alpha) \\ 1/\alpha_2 I_{22}^{*}(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\\
&= I^{*-1}(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\log\prod_{j=1}^{2}\frac{\exp\{(a_j\alpha_j+b_j)\psi(\alpha_j)-a_j\alpha_j\}}{\alpha_j^{b_j}\Gamma^{a_j}(\alpha_j)\sqrt{\psi'(\alpha_j)-1/\alpha_j}}
\end{aligned}
$$

となり, $\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}}$ と $\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}}$ は,

$$
\begin{aligned}
\pi_{\mathrm{LML}}(\alpha) &= \prod_{j=1}^{2} \frac{\exp\{(a_j\alpha_j + b_j)\psi(\alpha_j) - a_j\alpha_j\}}{\alpha_j^{b_j-1/2}\Gamma^{a_j}(\alpha_j)\sqrt{\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j}}, \\
\pi_{\mathrm{LI}}(\alpha) &= \prod_{j=1}^{2} \frac{\exp\{(a_j\alpha_j + b_j)\psi(\alpha_j) - a_j\alpha_j\}}{\alpha_j^{b_j}\Gamma^{a_j}(\alpha_j)\sqrt{\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j}}
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

とすることにより, 条件 (A2) を満たしていることがわかる[1].

定理 3 を適用するために, いくつかの補題を準備する.

補題 1 次が成り立つ.

$$
\text{(i)}\ \Gamma(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-1/2}e^{-\alpha}(1+o(1)) & (\alpha \to \infty), \\ \dfrac{1}{\alpha} + o\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) & (\alpha \to 0). \end{cases}
$$

$$
\text{(ii)}\ \psi(\alpha) = \begin{cases} \log\alpha - \dfrac{1}{2\alpha} + o\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) & (\alpha \to \infty), \\ -\dfrac{1}{\alpha} - \gamma_0 + o(1) & (\alpha \to 0). \end{cases}
$$

$$
\text{(iii)}\ \psi'(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha^2} + o\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right) & (\alpha \to \infty), \\ \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{\pi^2}{6} + o(1) & (\alpha \to 0). \end{cases}
$$

ここで, $\gamma_0(= 0.57721\ldots)$ はオイラーの定数である.

<u>証明</u> Abramowitz and Stegun [1] の 6.1.37, 6.3.5, 6.3.18, 6.4.2, 6.4.6 を用いて容易に示すことができる.

補題 2 $j = 1, 2$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\pi_{\mathrm{LML}j}(\alpha_j) &:= \frac{\exp\{(a_j\alpha_j + b_j)\psi(\alpha_j) - a_j\alpha_j\}}{\alpha_j^{b_j-1/2}\Gamma^{a_j}(\alpha_j)\sqrt{\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j}}, \\
\pi_{\mathrm{LI}j}(\alpha_j) &:= \frac{\exp\{(a_j\alpha_j + b_j)\psi(\alpha_j) - a_j\alpha_j\}}{\alpha_j^{b_j}\Gamma^{a_j}(\alpha_j)\sqrt{\psi'(\alpha_j) - 1/\alpha_j}}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき次が成り立つ.

$$
\text{(i)}\ \pi_{\mathrm{LML}j}(\alpha_j) = \begin{cases} \dfrac{2^{1/2}}{(2\pi e)^{a_j/2}}\alpha_j^{(a_j+3)/2}(1+o(1)) & (\alpha_j \to \infty), \\ e^{-a_j-b_j\gamma_0}\alpha_j^{a_j-b_j+3/2}e^{-b_j/\alpha_j}(1+o(1)) & (\alpha_j \to 0). \end{cases}
$$

[1] 京都大学数理解析研究所短期共同研究集会による研究会で講演したときの漸近バイアスの係数は間違いであることが後日判明しました. 本講究録では, 漸近バイアイスの係数を修正し, それにより結果が変わる定理 5, 定理 6, 定理 7, 定理 8, 定理 9, 定理 10, 定理 11, 定理 12 も修正致しました.

$$\text{(ii)}\ \pi_{\mathrm{LI}j}(\alpha_j) = \begin{cases} \dfrac{2^{1/2}}{(2\pi e)^{a_j/2}}\alpha_j^{1+a_j/2}(1+o(1)) & (\alpha_j \to \infty), \\ e^{-a_j-b_j\gamma_0}\alpha_j^{a_j-b_j+1}e^{-b_j/\alpha_j}(1+o(1)) & (\alpha_j \to 0). \end{cases}$$

証明 補題 1 より, 容易に示すことができる.

定理 5 線形偏り修正最尤推定量は次の (I)〜(IX) のいずれかを満たすとき, 2 次漸近非許容的である.

(I) $a_1 + 5 > 0$,

(II) $a_2 + 5 > 0$,

(III) $b_1 < 0$,

(IV) $b_1 = 0$ かつ $2a_1 - a_2 < 0$,

(V) $b_1 = 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} < 0$,

(VI) $b_1 + b_2 = 0$ かつ $a_1 + a_2 + 5 < 0$,

(VII) $b_2 = 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} < 0$,

(VIII) $b_2 < 0$,

(IX) $b_2 = 0$ かつ $2a_2 - a_1 < 0$.

証明 (4.3) と補題 2 より, $r \to \infty$ のとき,

$$\left[\frac{\tilde{\lambda}_{\max}(z)}{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(z)}\right]_{z=s+r\omega_0}$$

$$= \begin{cases} K_1 \exp\left[-\left(\dfrac{a_1+5}{2}\cos\xi_0 + \dfrac{a_2+5}{2}\sin\xi_0\right)r\right](1+o(1)) & \left(0 \le \xi_0 \le \dfrac{\pi}{2}\right), \\ K_2 \exp\left[-\left\{\left(a_1 - b_1 + \dfrac{5}{2}\right)\cos\xi_0 + \dfrac{a_2+5}{2}\sin\xi_0\right\}r + b_1\exp(-s_1 - r\cos\xi_0)\right](1+o(1)) & \left(\dfrac{\pi}{2} \le \xi_0 \le \pi\right), \\ K_3 \exp\left[-\left\{\left(a_1 - b_1 + \dfrac{5}{2}\right)\cos\xi_0 + \left(a_2 - b_2 + \dfrac{5}{2}\right)\sin\xi_0\right\}r\right. & \\ \qquad \left. + b_1\exp(-s_1 - r\cos\xi_0) + b_2\exp(-s_2 - r\sin\xi_0)\right](1+o(1)) & \left(\pi \le \xi_0 \le \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ K_4 \exp\left[-\left\{\dfrac{a_1+5}{2}\cos\xi_0 + \left(a_2 - b_2 + \dfrac{5}{2}\right)\sin\xi_0\right\}r + b_2\exp(-s_2 - r\sin\xi_0)\right](1+o(1)) & \left(\dfrac{3\pi}{2} \le \xi_0 \le 2\pi\right) \end{cases}$$

を得る. ここで, K_1, K_2, K_3, K_4 は正の定数である. $\xi_0 = 0$ の場合を考えると, $r \to \infty$ のとき,

$$\left[\frac{\tilde{\lambda}_{\max}(z)}{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(z)}\right]_{z=s+r\omega_0} = K_1 \exp\left(-\frac{a_1+5}{2}r\right)(1+o(1))$$

となる. それゆえに,

$$\int_0^\infty \left[\frac{\tilde{\lambda}_{\max}(z)}{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(z)}\right]_{z=s+r\omega_0} dr < \infty \Longleftrightarrow a_1 + 5 > 0$$

を得る. 他の場合も同様にして考える. 以下の (I)〜(XVI) を満たすとき,

$$\int_0^\infty \left[\frac{\tilde{\lambda}_{\max}(z)}{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(z)}\right]_{z=s+r\omega_0} dr < \infty$$

となる.

(I) $\xi_0 = 0$ のとき.

$$a_1 + 5 > 0.$$

(II) $0 < \xi_0 < \frac{\pi}{4}$ のとき.

(i) $a_2 + 5 > 0$ かつ $a_1 + a_2 + 10 > 0$,
(ii) $a_1 + 5 > 0$ かつ $a_2 + 5 \leq 0$.

(III) $\xi_0 = \frac{\pi}{4}$ のとき.

$$a_1 + a_2 + 10 > 0.$$

(IV) $\frac{\pi}{4} < \xi_0 < \frac{\pi}{2}$ のとき.

(i) $a_1 + 5 > 0$ かつ $a_1 + a_2 + 10 > 0$,
(ii) $a_1 + 5 \leq 0$ かつ $a_2 + 5 > 0$.

(V) $\xi_0 = \frac{\pi}{2}$ のとき.

$$a_2 + 5 > 0.$$

(VI) $\frac{\pi}{2} < \xi_0 < \frac{3}{4}\pi$ のとき.

(i) $b_1 < 0$,
(ii) $b_1 = 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} \geq 0$ かつ $a_2 + 5 > 0$,
(iii) $b_1 = 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} < 0$ かつ $2a_1 - a_2 < 0$.

(VII) $\xi_0 = \frac{3}{4}\pi$ のとき.

(i) $b_1 < 0$,
(ii) $b_1 = 0$ かつ $a_1 - \frac{a_2}{2} < 0$.

(VIII) $\frac{3}{4}\pi < \xi_0 < \pi$ のとき.

(i) $b_1 < 0$,
(ii) $b_1 = 0$ かつ $a_2 + 5 > 0$ かつ $2a_1 - a_2 < 0$,
(iii) $b_1 = 0$ かつ $a_2 + 5 \leq 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} < 0$.

(IX) $\xi_0 = \pi$ のとき.

(i) $b_1 < 0$,
(ii) $b_1 = 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} < 0$.

(X) $\pi < \xi_0 < \frac{5}{4}\pi$ のとき.

(i) $b_1 < 0$,
(ii) $b_1 = 0$ かつ $b_2 < 0$,
(iii) $b_1 = b_2 = 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} \geq 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} < 0$,
(iv) $b_1 = b_2 = 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} < 0$ かつ $a_1 + a_2 + 5 < 0$.

(XI) $\xi_0 = \frac{5}{4}\pi$ のとき.

(i) $b_1 + b_2 < 0$,
(ii) $b_1 + b_2 = 0$ かつ $a_1 + a_2 + 5 < 0$.

(XII) $\frac{5}{4}\pi < \xi_0 < \frac{3}{2}\pi$ のとき.

(i) $b_2 < 0$,
(ii) $b_2 = 0$ かつ $b_1 < 0$,
(iii) $b_1 = b_2 = 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} \geq 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} < 0$,
(iv) $b_1 = b_2 = 0$ かつ $a_1 + \frac{5}{2} < 0$ かつ $a_1 + a_2 + 5 < 0$.

(XIII) $\xi_0 = \frac{3}{2}\pi$ のとき.

(i) $b_2 < 0$,
(ii) $b_2 = 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} < 0$.

(XIV) $\frac{3}{2}\pi < \xi_0 < \frac{7}{4}\pi$ のとき.

(i) $b_2 < 0$,
(ii) $b_2 = 0$ かつ $a_1 + 5 > 0$ かつ $-a_1 + 2a_2 < 0$,
(iii) $b_2 = 0$ かつ $a_1 + 5 \leq 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} < 0$.

(XV) $\xi_0 = \frac{7}{4}\pi$ のとき.

(i) $b_2 < 0$,
(ii) $b_2 = 0$ かつ $-a_1 + 2a_2 < 0$.

(XVI) $\frac{7}{4}\pi < \xi_0 < 2\pi$ のとき.

(i) $b_2 < 0$,
(ii) $b_2 = 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} \geq 0$ かつ $a_1 + 5 > 0$,
(iii) $b_2 = 0$ かつ $a_2 + \frac{5}{2} < 0$ かつ $-a_1 + 2a_2 < 0$.

(I)〜(XVI) の結果をまとめると, 定理 5 の条件を得る. ■

定理 4 を適用するために, 補題を準備する.

補題 3 次が成り立つ.

(I) $\displaystyle \lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi/4} \exp\{(A\cos\xi + B\sin\xi)r\}\,d\xi < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & B>0 \text{ かつ } A+B\le 0, \\ \text{(ii)} & B\le 0 \text{ かつ } A\le 0. \end{array}$$

(II) $\displaystyle \lim_{r\to\infty}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \exp\{(A\cos\xi + B\sin\xi)r\}\,d\xi < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & A>0 \text{ かつ } A+B\le 0, \\ \text{(ii)} & A\le 0 \text{ かつ } B\le 0. \end{array}$$

(III) $\displaystyle \lim_{r\to\infty}\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \exp\{(A\cos\xi + B\sin\xi)r + C\exp(-r\cos\xi)\}\,d\xi < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & C<0 \text{ かつ } B\le 0, \\ \text{(ii)} & C=0 \text{ かつ } A\ge 0 \text{ かつ } B\le 0, \\ \text{(iii)} & C=0 \text{ かつ } A<0 \text{ かつ } B-A\le 0. \end{array}$$

(IV) $\displaystyle \lim_{r\to\infty}\int_{3\pi/4}^{\pi} \exp\{(A\cos\xi + B\sin\xi)r + C\exp(-r\cos\xi)\}\,d\xi < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & C<0, \\ \text{(ii)} & C=0 \text{ かつ } B>0 \text{ かつ } A-B\ge 0, \\ \text{(iii)} & C=0 \text{ かつ } B\le 0 \text{ かつ } A\ge 0. \end{array}$$

(V) $\displaystyle \lim_{r\to\infty}\int_{\pi}^{5\pi/4} \exp\{(A\cos\xi + B\sin\xi)r + C\exp(-r\cos\xi) + D\exp(-r\sin\xi)\}\,d\xi < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & C<0 \text{ かつ } D<0, \\ \text{(ii)} & C<0 \text{ かつ } D>0 \text{ かつ } C+D<0, \\ \text{(iii)} & D=0 \text{ かつ } C<0, \\ \text{(iv)} & C=0 \text{ かつ } D<0 \text{ かつ } A\ge 0, \\ \text{(v)} & C=D=0 \text{ かつ } B\ge 0 \text{ かつ } A\ge 0, \\ \text{(vi)} & C=D=0 \text{ かつ } B<0 \text{ かつ } A+B\ge 0. \end{array}$$

(VI) $\displaystyle \lim_{r\to\infty}\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \exp\{(A\cos\xi + B\sin\xi)r + C\exp(-r\cos\xi) + D\exp(-r\sin\xi)\}\,d\xi < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & C<0 \text{ かつ } D<0, \\ \text{(ii)} & C>0 \text{ かつ } D<0 \text{ かつ } C+D<0, \\ \text{(iii)} & C=0 \text{ かつ } D<0, \\ \text{(iv)} & D=0 \text{ かつ } C<0 \text{ かつ } B\ge 0, \\ \text{(v)} & C=D=0 \text{ かつ } A\ge 0 \text{ かつ } B\ge 0, \\ \text{(vi)} & C=D=0 \text{ かつ } A<0 \text{ かつ } A+B\ge 0. \end{array}$$

(VII) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{3\pi/2}^{7\pi/4}\exp\left\{(A\cos\xi+B\sin\xi)r+D\exp(-r\sin\xi)\right\}d\xi<\infty$

$$\iff \begin{array}{ll}\text{(i)} & D<0,\\ \text{(ii)} & D=0 \text{ かつ } A>0 \text{ かつ } B-A\geq 0,\\ \text{(iii)} & D=0 \text{ かつ } A\leq 0 \text{ かつ } B\geq 0.\end{array}$$

(VIII) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{7\pi/4}^{2\pi}\exp\left\{(A\cos\xi+B\sin\xi)r+D\exp(-r\sin\xi)\right\}d\xi<\infty$

$$\iff \begin{array}{ll}\text{(i)} & D<0 \text{ かつ } A\leq 0,\\ \text{(ii)} & D=0 \text{ かつ } B\geq 0 \text{ かつ } A\leq 0,\\ \text{(iii)} & D=0 \text{ かつ } B<0 \text{ かつ } A-B\leq 0.\end{array}$$

証明 最も複雑な (V) のみ証明する.

$$I_r:=\int_{\pi}^{5\pi/4}\exp\left\{(A\cos\xi+B\sin\xi)r+C\exp(-r\cos\xi)+D\exp(-r\sin\xi)\right\}d\xi$$

とする.

(i) $C>0$ かつ $D>0$ のとき.

$$I_r\geq\int_{\pi}^{5\pi/4}\exp\left\{-(|A|+|B|)r+C\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+D\right\}d\xi$$

より, $r\to\infty$ のとき, $I_r\to\infty$ となる.

(ii) $C<0$ かつ $D>0$ かつ $C+D>0$ のとき.

$$\kappa_r(\xi):=C\exp(-r\cos\xi)+D\exp(-r\sin\xi)$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned}\kappa_r'(\xi) &= Cr\sin\xi\exp(-r\cos\xi)-Dr\cos\xi\exp(-r\sin\xi)\\ &= -r\sqrt{C^2\exp(-2r\cos\xi)+D^2\exp(-2r\sin\xi)}\sin\left(\xi+\arctan\left(-\frac{D\exp(-r\sin\xi)}{C\exp(-r\cos\xi)}\right)\right)\\ &> 0\end{aligned}$$

となる. ここで, r が十分大きいとき,

$$\kappa_r(\pi)=Ce^r+D<0,\ \kappa_r\left(\frac{5\pi}{4}\right)=(C+D)\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)>0$$

となる. つまり, $\kappa_r(\xi_0)=0$ となる $\xi_0\in\left(\pi,\dfrac{5\pi}{4}\right)$ が存在する. $\xi_0\leq\xi\leq\dfrac{5\pi}{4}$ に対して,

$$\kappa_r'(\xi)<r\sqrt{C^2\exp(-2r\cos\xi_0)+D^2\exp(\sqrt{2}r)}$$

より,

$$\begin{aligned}
I_r &> \int_{\xi_0}^{5\pi/4} \exp\{-(|A|+|B|)r + \kappa_r(\xi)\}\, d\xi \\
&> \frac{\exp\{-(|A|+|B|)r\}}{r\sqrt{C^2\exp(-2r\cos\xi_0) + D^2\exp(\sqrt{2}r)}} \int_0^{(C+D)\exp(r/\sqrt{2})} e^t dt \\
&> \frac{\exp\{-(|A|+|B|)r\}}{r\sqrt{2\max\{C^2\exp(-2r\cos\xi_0), D^2\exp(\sqrt{2}r)\}}} \left[\exp\left\{(C+D)\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\} - 1\right]
\end{aligned}$$

となるので, $r\to\infty$ のとき, $I_r \to \infty$ となる.

(iii) $C<0$ かつ $D>0$ かつ $C+D<0$ のとき.

$$I_r \le \int_{\pi}^{5\pi/4} \exp\left\{(|A|+|B|)r + (C+D)\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\} d\xi$$

より, $r\to\infty$ のとき, $I_r\to 0$ となる.

(iv) $C<0$ かつ $D<0$ のとき.

$$I_r \le \int_{\pi}^{5\pi/4} \exp\left\{(|A|+|B|)r + C\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) + D\right\} d\xi$$

より, $r\to\infty$ のとき, $I_r\to 0$ となる.

(v) $C>0$ かつ $D<0$ かつ $C+D<0$ のとき.

$$\nu_r(\xi) := -C\exp(-r\cos\xi) - D\exp(-r\sin\xi)$$

とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\nu_r'(\xi) &= -Cr\sin\xi\exp(-r\cos\xi) + Dr\cos\xi\exp(-r\sin\xi) \\
&= -r\sqrt{C^2\exp(-2r\cos\xi) + D^2\exp(-2r\sin\xi)}\sin\left(\xi + \arctan\left(-\frac{D\exp(-r\sin\xi)}{C\exp(-r\cos\xi)}\right)\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

となる. ここで, r が十分大きいとき,

$$\nu_r(\pi) = -Ce^r - D < 0,\ \nu_r\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -(C+D)\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) > 0$$

となる. つまり, $\nu_r(\xi_0)=0$ となる $\xi_0 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ が存在する. $\pi\le\xi\le\xi_0$ に対して,

$$\nu_r'(\xi) < r\sqrt{C^2\exp(2r) + D^2\exp(-2r\sin\xi_0)}$$

より,

$$\begin{aligned}
I_r &> \int_\pi^{\xi_0} \exp\{-(|A|+|B|)r - \nu_r(\xi)\}\, d\xi \\
&> \frac{\exp\{-(|A|+|B|)r\}}{r\sqrt{C^2\exp(2r)+D^2\exp(-2r\sin\xi_0)}} \int_{-Ce^r-D}^{0} e^{-t}dt \\
&> \frac{\exp\{-(|A|+|B|)r\}}{r\sqrt{2\max\{C^2\exp(2r), D^2\exp(-2r\sin\xi_0)\}}} \{-1+\exp(Ce^r+D)\}
\end{aligned}$$

となるので, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to \infty$ となる.

(vi) $C > 0$ かつ $D < 0$ かつ $C + D > 0$ のとき.

$$I_r \geq \int_\pi^{5\pi/4} \exp\left\{-(|A|+|B|)r + (C+D)\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\} d\xi$$

より, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to \infty$ となる.

(vii) $C < 0$ かつ $D = 0$ のとき.

$$I_r \leq \int_\pi^{5\pi/4} \exp\left\{(|A|+|B|)r + C\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\} d\xi$$

より, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to 0$ となる.

(viii) $C > 0$ かつ $D = 0$ のとき.

$$I_r \geq \int_\pi^{5\pi/4} \exp\left\{-(|A|+|B|)r + C\exp\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right\} d\xi$$

より, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to \infty$ となる.

(ix) $C = 0$ かつ $D < 0$ かつ $A < 0$ のとき.

$$u := -r\sin\xi$$

とおくと,

$$I_r = \frac{e^{-Ar}}{r}\int_0^{r/\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{A}{\sqrt{1-(u/r)^2}+1}\frac{u^2}{r} - Bu + De^u\right\} \frac{du}{\sqrt{1-(u/r)^2}}$$

となることがわかる. ここで, $r \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{r/\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{A}{\sqrt{1-(u/r)^2}+1}\frac{u^2}{r} - Bu + De^u\right\} \frac{du}{\sqrt{1-(u/r)^2}} \\
\to\ & \int_0^{\infty} \exp(-Bu + De^u)\, du \\
<\ & \infty
\end{aligned}$$

を得る. したがって, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to \infty$ となる.

(x) $C = 0$ かつ $D < 0$ かつ $A \geq 0$ のとき.

$$u := -r\sin\xi$$

とおくと,

$$I_r = \frac{e^{-Ar}}{r}\int_0^{r/\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{A}{\sqrt{1-(u/r)^2}+1}\frac{u^2}{r} - Bu + De^u\right\}\frac{du}{\sqrt{1-(u/r)^2}}$$

となることがわかる. ここで, $r \to \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} &\int_0^{r/\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{A}{\sqrt{1-(u/r)^2}+1}\frac{u^2}{r} - Bu + De^u\right\}\frac{du}{\sqrt{1-(u/r)^2}} \\ \to\ & \int_0^{\infty} \exp\left(-Bu + De^u\right) du \\ <\ & \infty \end{aligned}$$

を得る. したがって, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to 0$ となる.

(xi) $C = 0$ かつ $D > 0$ のとき.

$\delta \in (\pi, 5\pi/4)$ に対して,

$$\begin{aligned} I_r &\geq \int_\pi^{5\pi/4} \exp\left\{-(|A|+|B|)r + D\exp\left(r\sin\delta\right)\right\} d\xi \\ &\geq \int_\delta^{5\pi/4} \exp\left\{-(|A|+|B|)r + D\exp\left(r\sin\delta\right)\right\} d\xi \\ &\geq \left(\frac{5\pi}{4} - \delta\right)\exp\left\{-(|A|+|B|)r + D\exp\left(r\sin\delta\right)\right\} \end{aligned}$$

より, $r \to \infty$ のとき, $I_r \to \infty$ となる.

(xii) $C = D = 0$ のとき.

$$A\cos\xi + B\sin\xi \leq 0$$

をみたす A, B が存在するとき, $\lim\limits_{r\to\infty} I_r < \infty$ となる. ここで,

$$A\cos\xi + B\sin\xi = \begin{cases} \sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\xi + \arctan\dfrac{A}{B}\right) & (B > 0), \\ A\cos\xi & (B = 0), \\ -\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(\xi + \arctan\dfrac{A}{B}\right) & (B < 0) \end{cases}$$

である. $B>0$ のとき,

$$\sin\left(\xi+\arctan\frac{A}{B}\right)\le 0$$

とすると,

$$\frac{A}{B}\ge-\tan\xi$$

となることがわかる. $\pi\le\xi\le\frac{5\pi}{4}$ より,

$$\frac{A}{B}\ge 0\Longleftrightarrow A\ge 0$$

を得る. $B=0$ のとき,

$$A\cos\xi\le 0\Longleftrightarrow A\ge 0$$

を得る. $B<0$ のとき,

$$\sin\left(\xi+\arctan\frac{A}{B}\right)\ge 0$$

とすると,

$$\frac{A}{B}\le-\tan\xi$$

となることがわかる. $\pi\le\xi\le\frac{5\pi}{4}$ より,

$$\frac{A}{B}\le -1\Longleftrightarrow A+B\ge 0$$

を得る.

なお, (V) の証明と同様にして, 他の場合も示すことができる. ■

注意 $C+D=0$ のときの I_r の挙動は未解決な部分として残されているが, 定理 5 と次の定理 6 を考慮すると結果的に必要ないことがわかる.

定理 6 線形偏り修正最尤推定量は次を満たすとき, 2 次漸近許容的である.

$$a_1+5\le 0 \text{ かつ } a_2+5\le 0 \text{ かつ } b_1>0 \text{ かつ } b_2>0.$$

証明 補題 2 より, $r\to\infty$ とすると,

$$
\left[\frac{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi}
= \begin{cases}
L_1 \exp\left[\left(\dfrac{a_1+5}{2}\cos\xi + \dfrac{a_2+5}{2}\sin\xi\right)r\right](1+o(1)) & \left(0<\xi<\dfrac{\pi}{2}\right), \\
L_2 \exp\left[\left\{(a_1-b_1+\dfrac{5}{2})\cos\xi + \dfrac{a_2+5}{2}\sin\xi\right\}r - b_1\exp(-r\cos\xi)\right](1+o(1)) & \left(\dfrac{\pi}{2}<\xi<\pi\right), \\
L_3 \exp\left[\left\{(a_1-b_1+\dfrac{5}{2})\cos\xi + (a_2-b_2+\dfrac{5}{2})\sin\xi\right\}r\right. & \\
\qquad\qquad \left. -b_1\exp(-r\cos\xi) - b_2\exp(-r\sin\xi)\right](1+o(1)) & \left(\pi<\xi<\dfrac{3\pi}{2}\right), \\
L_4 \exp\left[\left\{\dfrac{a_1+5}{2}\cos\xi + (a_2-b_2+\dfrac{5}{2})\sin\xi\right\}r - b_2\exp(-r\sin\xi)\right](1+o(1)) & \left(\dfrac{3\pi}{2}<\xi<2\pi\right)
\end{cases}
$$

を得る．ここで，L_1, L_2, L_3, L_4 は正の定数であり，

$$
\tilde{\phi}_{\mathrm{LML}k}(r) := \int_{(k-1)\pi/4}^{k\pi/4} \left[\frac{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} d\xi \ (k=1,2,\ldots,8)
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_{\mathrm{LML}}(r) &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} d\xi \\
&= \left(\int_0^{\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} + \cdots + \int_{7\pi/4}^{2\pi}\right) \left[\frac{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} d\xi \\
&= \tilde{\phi}_{\mathrm{LML1}}(r) + \tilde{\phi}_{\mathrm{LML2}}(r) + \cdots + \tilde{\phi}_{\mathrm{LML8}}(r)
\end{aligned}
$$

となる．すべての k に対して，$\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML}k}(r) < \infty$ となる条件を求める．$0<\xi<\dfrac{\pi}{4}$ の場合を考えると，$r\to\infty$ のとき，

$$
\left[\frac{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} = L_1 \exp\left[\left(\frac{a_1+5}{2}\cos\xi + \frac{a_2+5}{2}\sin\xi\right)r\right](1+o(1))
$$

となる．補題 3 (I) より，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{\tilde{\pi}_{\mathrm{LML}}(s)}{\tilde{\lambda}_{\min}(s)}\right]_{s=r\omega_\xi} d\xi < \infty \\
\iff &\begin{array}{ll} \text{(i)} & a_2+5>0 \text{ かつ } a_1+a_2+10 \le 0, \\ \text{(ii)} & a_2+5 \le 0 \text{ かつ } a_1+5 \le 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

を得る．他の場合も同様にして考える．

(I) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML1}}(r) < \infty$

$$
\iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & a_2+5>0 \text{ かつ } a_1+a_2+10 \le 0, \\ \text{(ii)} & a_2+5 \le 0 \text{ かつ } a_1+5 \le 0. \end{array}
$$

(II) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML2}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & a_1 + 5 > 0 \text{ かつ } a_1 + a_2 + 10 \leq 0, \\ \text{(ii)} & a_1 + 5 \leq 0 \text{ かつ } a_2 + 5 \leq 0. \end{array}$$

(III) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML3}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & b_1 > 0 \text{ かつ } a_2 + 5 \leq 0, \\ \text{(ii)} & b_1 = 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} \geq 0 \text{ かつ } a_2 + 5 \leq 0, \\ \text{(iii)} & b_1 = 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} < 0 \text{ かつ } -2a_1 + a_2 \leq 0. \end{array}$$

(IV) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML4}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & b_1 > 0, \\ \text{(ii)} & b_1 = 0 \text{ かつ } a_2 + 5 > 0 \text{ かつ } 2a_1 - a_2 \geq 0, \\ \text{(iii)} & b_1 = 0 \text{ かつ } a_2 + 5 \leq 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} \geq 0. \end{array}$$

(V) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML5}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & b_1 > 0 \text{ かつ } b_2 > 0, \\ \text{(ii)} & b_1 > 0 \text{ かつ } b_2 < 0 \text{ かつ } b_1 + b_2 > 0, \\ \text{(iii)} & b_2 = 0 \text{ かつ } b_1 > 0, \\ \text{(iv)} & b_1 = 0 \text{ かつ } b_2 > 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} \geq 0, \\ \text{(v)} & b_1 = b_2 = 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} \geq 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} \geq 0, \\ \text{(vi)} & b_1 = b_2 = 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} < 0 \text{ かつ } a_1 + a_2 + 5 \geq 0. \end{array}$$

(VI) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML6}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & b_1 > 0 \text{ かつ } b_2 > 0, \\ \text{(ii)} & b_1 < 0 \text{ かつ } b_2 > 0 \text{ かつ } b_1 + b_2 > 0, \\ \text{(iii)} & b_1 = 0 \text{ かつ } b_2 > 0, \\ \text{(iv)} & b_2 = 0 \text{ かつ } b_1 > 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} \geq 0, \\ \text{(v)} & b_1 = b_2 = 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} \geq 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} \geq 0, \\ \text{(vi)} & b_1 = b_2 = 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} < 0 \text{ かつ } a_1 + a_2 + 5 \geq 0. \end{array}$$

(VII) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML7}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & b_2 > 0, \\ \text{(ii)} & b_2 = 0 \text{ かつ } a_1 + \frac{5}{2} > 0 \text{ かつ } -a_1 + 2a_2 \geq 0, \\ \text{(iii)} & b_2 = 0 \text{ かつ } a_1 + 5 \leq 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} \geq 0. \end{array}$$

(VIII) $\lim_{r\to\infty} \tilde{\phi}_{\mathrm{LML8}}(r) < \infty$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & b_2 > 0 \text{ かつ } a_1 + 5 \le 0, \\ \text{(ii)} & b_2 = 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} \ge 0 \text{ かつ } a_1 + 5 \le 0, \\ \text{(iii)} & b_2 = 0 \text{ かつ } a_2 + \frac{5}{2} < 0 \text{ かつ } a_1 - 2a_2 \le 0. \end{array}$$

(I)〜(VIII) を同時に満たす条件が定理 6 の条件となる. ■

定理 7 線形偏り修正 IML 推定量は次の (I)〜(IX) のいずれかを満たすとき, 2 次漸近非許容的である.

(I) $a_1 + 4 > 0$,

(II) $a_2 + 4 > 0$,

(III) $b_1 < 0$,

(IV) $b_1 = 0$ かつ $2a_1 - a_2 < 0$,

(V) $b_1 = 0$ かつ $a_1 + 2 < 0$,

(VI) $b_1 + b_2 = 0$ かつ $a_1 + a_2 + 4 < 0$,

(VII) $b_2 = 0$ かつ $a_2 + 2 < 0$,

(VIII) $b_2 < 0$,

(IX) $b_2 = 0$ かつ $2a_2 - a_1 < 0$.

証明 定理 5 の証明と同様にして示すことができる. ■

定理 8 線形偏り修正 IML 推定量は次を満たすとき, 2 次漸近許容的である.

$$a_1 + 4 \le 0 \text{ かつ } a_2 + 4 \le 0 \text{ かつ } b_1 > 0 \text{ かつ } b_2 > 0.$$

証明 定理 6 の証明と同様にして示すことができる. ■

定理 5 と定理 6 の条件を検証すると, 定理 6 の条件が線形偏り修正最尤推定量が 2 次漸近許容的となるための必要十分条件となることが分かる. 同様に, 定理 8 の条件が線形偏り修正 IML 推定量が 2 次漸近許容的となるための必要十分条件となることが分かる.

定理 9 線形偏り修正最尤推定量は次を満たすとき, またそのときに限り, 2 次漸近許容的である.

$$a_1 + 5 \le 0 \text{ かつ } a_2 + 5 \le 0 \text{ かつ } b_1 > 0 \text{ かつ } b_2 > 0.$$

定理 10 線形偏り修正 IML 推定量は次を満たすとき, またそのときに限り, 2 次漸近許容的である.

$$a_1 + 4 \le 0 \text{ かつ } a_2 + 4 \le 0 \text{ かつ } b_1 > 0 \text{ かつ } b_2 > 0.$$

特に,

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a \\ b_1 = b_2 = b \end{cases} \tag{4.4}$$

としたときの線形偏り修正最尤推定量と線形偏り修正 IML 推定量が 2 次漸近許容的となる (a, b) の領域を図示すると, 図 1 及び図 2 のようになる.

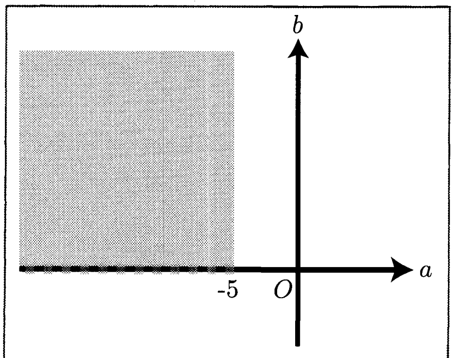

図 1. 線形偏り修正最尤推定量が 2 次漸近許容的となる (a, b) の領域

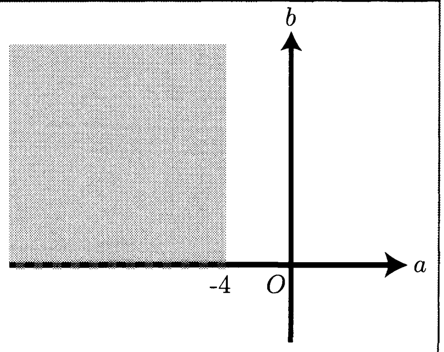

図 2. 線形偏り修正 IML 推定量が 2 次漸近許容的となる (a, b) の領域

ここで, 1 母数, すなわち, 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が互いに独立にガンマ分布 $\mathrm{Gam}(\alpha, \eta/\alpha)$ に従うときの線形偏り修正最尤推定量の 2 次漸近許容性ついては, Takagi [6] で得られている.

定理 11 (Takagi [6]). 1 母数のとき, 線形偏り修正最尤推定量

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{LML}} := \hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + \frac{1}{n}(a\hat{\alpha}_{\mathrm{ML}} + b) \ (a, b \in \mathbb{R})$$

は次を満たすとき, またそのときに限り, 2 次漸近許容的である.

$$a + 5 \leq 0 \text{ かつ } b > 0.$$

一方, 線形偏り修正 IML 推定量の 2 次漸近許容性は以下のとおりである.

定理 12 1 母数のとき, 線形偏り修正 IML 推定量

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{LI}} := \hat{\alpha}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{n}(a\hat{\alpha}_{\mathrm{I}} + b) \ (a, b \in \mathbb{R})$$

は次を満たすとき, またそのときに限り, 2 次漸近許容的である.

$$a + 4 \leq 0 \text{ かつ } b > 0.$$

したがって, 定理 9 と定理 10 において, (4.4) としたときの結果は, それぞれ定理 11 と定理 12 の結果と等価になることがわかる.

Zaigraev and Podraza-Karakulska [9] は, 最尤推定量よりも良い推定量として, IML 推定量を提案した. 定理 9 と定理 10 より, 線形偏り修正 IML 推定量の方が, 線形偏り修正最尤推定量よりも広範囲で 2 次漸近許容的となり, 安易な考えではあるが, 今回の研究からも IML 推定量の方が最尤推定量よりも良い推定量であることが言える.

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, A. I. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover, New York, (1964).

[2] Cox, D. R. and Reid, N. Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *J. Royal Statist. Soc. B.*, **49**, 1–39 (1987).

[3] Dey, D. K., Ghosh, M. and Srinivasan, C. Simultaneous estimation of parameters under entropy loss. *J. Stat. Plan. Infer.*, **15**, 347–389 (1987).

[4] Ghosh, J. K. and Sinha, B. K. A necessary and sufficient condition for second order admissibility with applications to Berkson's bioassay problem. *Ann. Statist.*, **9**, 1334–1338 (1981).

[5] Obayashi, C., Tanaka, H. and Takagi, Y. Second order admissibilities in multi-parameter logistic regression model. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **69**, 870–874 (2012).

[6] Takagi, Y. On the estimation of the shape parameter of the gamma distribution in second-order asymptotics. *Statis. Prob. Letter.*, **82**, 15–21 (2012).

[7] Takeuchi, K. and Akahira, M. Asymptotic optimality of the generalized Bayes estimator in multiparameter cases. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **31**, 403–415 (1979).

[8] Yanagimoto, T. The conditional maximum likelihood estimator of the shape parameter in the gamma distribution. *Metrika.*, **35**, 161–175 (1988).

[9] Zaigraev, A. and Podraza-Karakulska, A. On estimation of the shape parameter of the gamma distribution. *Statis. Prob. Letter.*, **78**, 286–295 (2008).