数理解析研究所講究録
第1864巻 2013年 181-190

単調核によるUncertain測度の構成

侯 平軍 [1], 布和額尓敦 [2], 影山 正幸 [3]

[1,2] 千葉大学理学研究科 基盤理学専攻

[3] 名古屋市立大学大学院

摘要. 劉教授 (清華大学不確実性研究所) の不確実性原理 (Uncertainty Principle) のアイディアを適用して、作用素 $J_{0.5}$ を定義し、非加法的な測度から、双対性を満たすUncertain 測度を構成する方法を提案する。更に、単調核を導入し、Choquet 積分を用いて、高次の単調核を考えて、Uncertain 測度を構成する。

1 はじめに

ランダム現象に加法的な確率理論 (Kolomogorov) はよく適用されているが、現実には、非加法的な不確実現象は存在している。非加法的な測度に関しては、Choquet [1] は加法的な測度公理を緩めて、Capacity 理論を提案した。さらに、1965年に、Zadeh[12] はメンバシップ関数を利用して、ファジ現象に適用するファジ集合理論を提案した。しかし、これらの理論はある事象の測度と余事象の測度の和は1であるという人間の自然な思考法に内在する自己双対性を含んでいない。Liu[7] によって提案された可信性理論は自己双対性公理を含んだ理論であり、不確実性の問題を分析する一つの方法として研究がなされている。Kageyama and Iwamura[4] は、可信性核と言う概念を導入し、離散時間の可信性過程を議論した。又、Liu[6] は可信性理論と確率理論の統合理論としてChance 理論を提案した、Chance 理論の動的システムとして、Kageyama ら [5] はChance 理論を用いて、離散時間のハイブリッド過程を構成し、さらに、Yang ら [11] によって、決定過程に拡張された。最近、Liu[8] は不確実現象にChance 理論より柔軟性にあるUncertain 理論を提案した。

この論文ではUncertain 測度を構成する一つの手法を提案する。具体的には、Liu [8] の不確実性原理を適用して、非加法的な測度から、Uncertain 測度を構成する。さらに、単調核を導入し、Choquet 積分を用いて、高次の単調核を考えて、Uncertain 測度を構成する。論文の第二セクションは記号と基本補題を述べる。第三セクションは単調核と言う概念を導入し、Choquet 積分を用いて、Uncertain 測度を構成する。

2　記号と補題

X を任意の非空集合, Σ を X の σ-集合族とする、可測空間 (X,Σ) 上で、集合関数 $\mu:\Sigma\to[0,1]$ が次の条件を満たすならば、μ は条件 $\mathscr{K}$ を満たすという。

1. (正規性) $\mu(\phi)=0,\ \ \mu(X)=1;$
2. (単調性) $A,B\in\Sigma,\ A\subset B$ ならば、$\mu(A)\leq\mu(B);$
3. (有限劣加法性) $A_i\in\Sigma(i=1,2,\ldots,n)$ ならば、$\mu(\cup_{i=1}^n A_i)\leq\sum_{i=1}^n\mu(A_i);$
4. (順序連続性) $A_i\in\Sigma(i=1,2,\ldots),\ \lim_{i\to\infty}A_i=\phi$ ならば、$\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)=0.$

任意の $A_i\in\Sigma\ (i=1,2,\ldots)$ に対して、$\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i)\leq\sum_{i=1}^\infty\mu(A_i)$ を満たすならば、集合関数 μ は可算劣加法性を持つという、又、$\lim_{i\to\infty}A_i=A$ の時、$\lim_{i\to\infty}\mu(A_i)=\mu(A)$ ならば、集合関数 μ は連続性をもつと言う。 次の二つ補題が成り立つ。

補題 2.1　(*cf.[9]*) 集合関数 μ が条件 $\mathscr{K}$ を満たすならば、μ は可算劣加法性を持つ。

証明:まず、$A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$ の場合を証明する、この時、$\lim_{n\to\infty}\cup_{i=n+1}^\infty A_i=\phi$ は明らかである、従って、

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i)&\leq\mu(\cup_{i=1}^n A_i)+\mu(\cup_{i=n+1}^\infty A_i)\\&\leq\sum_{i=1}^n\mu(A_i)+\mu(\cup_{i=n+1}^\infty A_i)\\&\to\sum_{i=1}^\infty\mu(A_i),\ n\to\infty\end{aligned}$$

が成り立つ。

つぎに、もし $A_i\cap A_j\neq\phi\ (i\neq j)$ の場合、

$$\begin{aligned}B_1&=A_1\\B_2&=A_2\setminus B_1\\B_3&=A_3\setminus B_2\cup B_1\\&\cdots\ \cdots\\B_n&=A_n\setminus\cup_{i=1}^{n-1}B_i\\&\cdots\ \cdots\end{aligned}$$

とすると、明らかに、$B_i \cap B_j = \phi\ (i \neq j)$ かつ、$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ が成り立つ。ゆえに、

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

が成り立つ。 □

補題 2.2 を証明する為に、次の命題を与える。

命題 2.1 (*cf.[9], Proposition 2.1*)

(X, Σ) 上有限単調集合関数 μ が連続である必要十分条件は μ が上、下から連続である。

補題 2.2 集合関数 μ が条件 $\mathscr{K}$ を満たすならば、μ は連続である。

証明：命題 2.1 により、集合関数 μ が上、下から連続であることを証明すれば、良い。まず、上から連続のことを証明する。$\{A_n \in \Sigma, n = 1, 2, \dots\}$ は任意の集合列で、$A_n \searrow A \in \Sigma,\ n \to \infty$ を仮定すると、明らかに、

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \setminus A) = \phi, \quad A_n = A \cup (A_n \setminus A)$$

が成り立つ、μ の有限劣加法性から、$\mu(A_n) \leq \mu(A) + \mu(A_n \setminus A)$ が成り立つ、従って、μ の順序連続性により、$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \leq \mu(A)$ が分かる。一方、$A_n \supset A$ と μ の単調性から、$\mu(A_n) \geq \mu(A)$ に成り立つ、故に、$\underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n) \geq \mu(A)$ も分かる。従って、$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ が成り立つ、これで、μ が上から連続を証明した。同様に、μ が下から連続の証明もできる。 □

これから、*Uncertain* 測度 (*cf.*[8]) と作用素 $J_{0.5}(\cdot,\cdot)$ を定義し、このセクションの重要な結果 *(Fundamental Lemma)* を導く。

定義 2.1 (*Uncertain Measure cf.*[8])

(X, Σ) 上で、次の三つ公理を満たす集合関数 $\mathcal{M} : \Sigma \to [0, 1]$ を *Uncertain* 測度と呼ぶ：

1. (正規性) $\mathcal{M}(X) = 1$;
2. (双対性) $A, A^c \in \Sigma$ ならば、$\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A^c) = 1$;
3. (可算劣加法性) $A_i \in \Sigma\ (i = 1, 2, \dots)$ ならば、$\mathcal{M}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}(A_i)$.

定義 2.2 (*Operator by uncertainty principle*)

任意の $0 \leq x \leq y \leq 1$ を満たすの実数対 (x, y) に対して、$J_{0.5}(\cdot,\cdot)$ を次の様に定義する：

$$J_{0.5}(x, y) = \begin{cases} x, & x > 0.5 \text{ の時;} \\ y, & y < 0.5 \text{ の時;} \\ 0.5, & x \leq 0.5 \leq y \text{ の時.} \end{cases}$$

(X, Σ) 上、条件 $\mathscr{K}$ を満たす関数 μ に対して、μ の有限劣加法性から、

$$0 \leq 1 - \mu(A^c) \leq \mu(A) \leq 1, \quad A \in \Sigma$$

は明らかである。ここで、(X, Σ) 上の測度 $\delta : \Sigma \to [0,1]$ を下記の通りに定義する：

$$\delta(A) = J_{0.5}\Big(1 - \mu(A^c), \mu(A)\Big), \quad A \in \Sigma. \tag{1}$$

式 (1) において、μ から δ を構成するとき、記号を簡単にして

$$\delta = J_{0.5}\mu \tag{2}$$

と表わす。

このセクションの最後に、重要な結果 *(Fundamental Lemma)* を与える。

補題 2.3 (*Fundamental Lemma*)

可測空間 (X, Σ) 上、μ が条件 $\mathscr{K}$ を満たすならば、$\delta(\cdot) = J_{0.5}\mu(\cdot)$ は *Uncertain* 測度である。

証明：定義 (2.1) の公理の正規性と双対性を簡単に検証できるから、可算劣加法性だけを証明する。任意の $A_i \in \Sigma,\ i = 1, 2, \ldots$ において、三つのケースを分けて、証明する：

ケース 1：全ての A_i に対して、$\mu(A_i) < 0.5$ の時、$\delta(A_i) = \mu(A_i)$ かつ、$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(A_i)$ が成り立つ、従って、

$$\begin{aligned}
&\delta(\cup A_i) \\
&= \begin{cases} \mu(\cup A_i), & \mu(\cup A_i) < 0.5 \\ 1 - \mu((\cup A_i)^c), & 1 - \mu((\cup A_i)^c) > 0.5 \\ 0.5, & 1 - \mu((\cup A_i)^c) \leq 0.5 \leq \mu(\cup A_i) \end{cases} \\
&\leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(A_i)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

ケース 2: A_i の中で、ただ一つの項が測度 μ について、0.5 により大きいの時、一般性を失わない為に、$\mu(A_1) > 0.5,\ \mu(A_i) < 0.5,\ i = 2, 3, \ldots$ を仮定すると、$\delta(A_i) = \mu(A_i)(i = 2, 3, \ldots)$ かつ、$\delta(A_1) \geq 0.5$ が成り立つのは容易にわかる。又、測度 μ の単調性から、明らかに、$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq 0.5$、ゆえに、$1 - \mu((\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c) \leq 0.5 \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$ の時、

$$\begin{aligned}
\delta(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= J_{0.5}(1 - \mu((\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c), \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) \\
&= 0.5 \leq \delta(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \delta(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \delta(A_i)
\end{aligned}$$

が成り立つ。更に、
$0.5 \leq 1-\mu((\cup_{i=1}^{\infty}A_i)^c) \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)$ の時、

$$
\begin{aligned}
\delta(\cup_{i=1}^{\infty}A_i) &= J_{0.5}(1-\mu((\cup_{i=1}^{\infty}A_i)^c), \mu(\cup_{i=1}^{\infty}A_i)) \\
&= 1-\mu((\cup_{i=1}^{\infty}A_i)^c) \\
&= 1-\mu(A_1^c \cap (\cup_{i=2}^{\infty}A_i)^c) \\
&\leq 1-\mu(A_1^c)+\mu(\cup_{i=2}^{\infty}A_i)) \qquad (3) \\
&\leq \delta(A_1)+\sum_{i=2}^{\infty}\delta(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\delta(A_i)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。不等式 (3) が成り立つのは次の集合関係と μ の有限劣加法性から分かる:

$$A_1^c = \Big(A_1^c \cap (\cup_{i=2}^{\infty}A_i)^c\Big) \cup \Big(A_1^c \cap (\cup_{i=2}^{\infty}A_i)\Big).$$

ケース 3: A_i の中で、二項及び二項以上が測度 μ について、0.5 により大きいの時、この場合は簡単に証明できるので、省略する。
以上、$\delta = J_{0.5}\mu$ は *Uncertain* 測度であることを証明しました。 □

3 Uncertain 測度の構成

このセクションでは単調核を定義して、この単調核と *Choquet* 積分を用いて、*Uncertain* 測度を構成する。まず、いくつの補題を与えて、最後に最も重要な構成定理を提案する。

補題 3.1 (X, Σ) を可測空間とする、μ は Σ 上単調かつ、順序連続な集合関数とする。この時、$f_n : X \to [0,1]$ $(n \geq 0)$ からなる 0 に収束する単調減少列 $\{f_n\}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty}(C)\int f_n(x)\mu(dx) = 0$$

が成り立つ。ここで、$(C)\int$ は *Choquet* 積分とする。

証明：任意の $t \in (0, +\infty)$ に対して、集合 $A_n := \{x \mid f_n(x) \geq t\}$ を定義すると、$A_n \to \phi$ は明らかである、さらに、μ の順序連続性から、

$$\mu(f_n(x) \geq t) = \mu(A_n) \to 0,\ n \to \infty.$$

従って、*Choquet* 積分の定義から、

$$(C)\int f_n(x)\mu(dx) = \int_0^{\infty}\mu(f_n(x) \geq t)dt \to 0,\ n \to \infty$$

が分かる、証明終了。 □

定義 3.1 (*Submodular*集合関数)
任意の $A, B \in \Sigma$ に対して、

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

を満たす集合関数を *Submodular* と呼ぶ。
簡単に表すために、$U(X), U_{SO}(X), U_{AO}(X)$ を下記の通りに定義する：

$$U(X) := \left\{ \mu : \Sigma \to [0,1] \mid \begin{matrix} \mu(\phi) = 0, \mu(X) = 1, \\ \mu : \text{単調性} \end{matrix} \right\};$$

$$U_{SO}(X) := \left\{ \mu \in U(X) \mid \begin{matrix} \mu : \text{順序連続性} \\ \mu : \textit{Submodular}\,\text{性} \end{matrix} \right\};$$

$$U_{AO}(X) := \left\{ \mu \in U(X) \mid \begin{matrix} \mu : \text{順序連続性} \\ \mu : \text{有限劣加法性} \end{matrix} \right\}.$$

定義 3.2 (単調核 (*monotone kernel*))
$\mathcal{K}(\cdot \mid \cdot)$ は $\Sigma \times X \to [0,1]$ の関数で、任意の $x \in X$ に対して、$\mathcal{K}(\cdot \mid x) \in U(X)$ の時、$\mathcal{K}$ は単調核と言う。
単調核の全体を $U(X \mid X)$ で表す。さらに、$U_{SO}(X \mid X)$ と $U_{AO}(X \mid X)$ を

$$U_{SO}(X \mid X) := \left\{ \mathcal{K} \mid \begin{matrix} \mathcal{K}(\cdot \mid \cdot) \in U(X \mid X), \\ \mathcal{K}(\cdot \mid x) \in U_{SO}(X),\ x \in X \end{matrix} \right\},$$

$$U_{AO}(X \mid X) := \left\{ \mathcal{K} \mid \begin{matrix} \mathcal{K}(\cdot \mid \cdot) \in U(X \mid X), \\ \mathcal{K}(\cdot \mid x) \in U_{AO}(X),\ x \in X \end{matrix} \right\}$$

で定義する。
補題 (3.2) と (3.3) を証明の為に、次の命題を与える。

命題 3.1 (*cf.*[*9*])
X 上の任意の非負可測関数 f, g に対して、μ は非負、単調、連続的な集合関数かつ、*Submodular* ならば、

$$(C)\int (f+g)d\mu \leq (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu$$

が成り立つ。

補題 3.2 $\mathcal{K} \in U_{AO}(X \mid X)$, $\mu \in U_{SO}(X)$ ならば、$(C)\int \mathcal{K}(\cdot \mid x)\mu(dx) \in U_{AO}(X)$ である。
証明:簡単の為に、$(C)\int \mathcal{K}(\cdot \mid x)\mu(dx)$ を $\mu^{(1)}$ と表す、条件 $\mathcal{K} \in U_{AO}(X \mid X)$ から、$\mu^{(1)} \in U(X)$ は容易に証明出来る。$\mu^{(1)}$ の有限劣加法性と順序連続性を証明すれば、良い。まず、有限劣加法性を証明する。任意の $A, B \in \Sigma, x \in X$

に対して、μ は *Submodular* から、有限劣加法性をもつのが明らかである、さらに、補題 2.2 により、μ は連続であることも分かる、そして、次の式がなりたつ。

$$\begin{aligned}\mu^{(1)}(A\cup B) &= (C)\int_X \mathcal{K}(A\cup B\mid x)\mu(dx)\\ &\le (C)\int_X (\mathcal{K}(A\mid x)+(B\mid x))\mu(dx) \qquad (4)\\ &\le (C)\int_X \mathcal{K}(A\mid x)\mu(dx) \qquad (5)\\ &+ (C)\int_X \mathcal{K}(B\mid x)\mu(dx)\\ &= \mu^{(1)}(A)+\mu^{(1)}(B),\end{aligned}$$

不等式 (4) は $\mathcal{K}$ の有限劣加法性と *Choquet* 積分の単調性から、不等式 (5) は命題 (3.1) からなりたつ。従って、$\mu^{(1)}$ は有限劣加法性を持つ。

次に、順序連続性を証明する、単調減少 ϕ に収束列 $E_i \in \Sigma$ $(i=1,2,\dots)$ に対して、条件 $\mathcal{K}(\cdot\mid x)\in U_{AO}(X\mid X)$ から、

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}(E_n\mid x)=0$$

があきらかである、従って、補題 (3.1) から、

$$\lim_{n\to\infty}\mu^{(1)}(E_n)=\lim_{n\to\infty}(C)\int \mathcal{K}(E_n\mid x)\mu(dx)=0$$

が成り立つ、故に、$\mu^{(1)}$ は順序連続性をもつ。証明終了。 □

補題 3.3 $\mathcal{K}\in U_{SO}(X\mid X)$ ならば、

$$\mathcal{K}^{(2)}(\cdot\mid x)=(C)\int \mathcal{K}(\cdot\mid y)\mathcal{K}(dy\mid x)\in U_{AO}(X\mid X)$$

である。

証明：条件 $\mathcal{K}\in U_{SO}(X\mid X)$ から、$\mathcal{K}^{(2)}(\cdot\mid\cdot)\in U(X\mid X)$ は明らかである。$\mathcal{K}^{(2)}(\cdot\mid x)$, $x\in X$ は有限劣加法性と順序連続性を証明すれば良い。

まず、有限劣加法性を証明する、任意の $A,B\in\Sigma, x\in X$ に対して、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\mathcal{K}^{(2)}(A\cup B\mid x)\\ =&(C)\int_X \mathcal{K}(A\cup B\mid y)\mathcal{K}(dy\mid x)\\ \le&(C)\int_X(\mathcal{K}(A\mid y)+\mathcal{K}(B\mid y))\mathcal{K}(dy\mid x) \qquad (6)\\ \le&(C)\int_X \mathcal{K}(A\mid y)\mathcal{K}(dy\mid x)\\ +&(C)\int_X \mathcal{K}(B\mid y)\mathcal{K}(dy\mid x) \qquad (7)\\ =&\mathcal{K}^{(2)}(A\mid x)+\mathcal{K}^{(2)}(B\mid x),\end{aligned}$$

不等式 (6) は *Choquet* 積分の単調性と $\mathcal{K}$ の *Submodular* 性から、不等式 (7) は $\mathcal{K}$ の *Submodular* 性と命題 (3.1) から分かる。これで、有限劣加法性が証明された。

順序連続性の証明は補題 (3.2) と同じ様に証明が出来る。証明終了。 □

定理 3.1 $\mu \in U_{SO}(X)$, $\mathcal{K} \in U_{SO}(X \mid X)$ ならば、

$$\mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid \mu) := (C) \int \mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid x)\mu(dx) \in U_{AO}(X)$$

である。但し、

$$\mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid x) = (C) \int \mathcal{K}^{(n-1)}(\cdot \mid y)\mathcal{K}(dy \mid x),\ n \geq 2$$

である。

証明：補題 (3.2) と (3.3) から、定理 (3.1) の主張は明らかである。

定理 3.2 (高次 *Uncertain* 測度構成定理)

1. $\mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid \mu)$ は条件 $\mathscr{K}$ を満たす；

2. $\delta^{(n)} = J_{0.5}\big(\mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid \mu)\big)$ は *Uncertain* 測度である。

証明：(1) と (2) は定理 (3.1) と補題 (2.3) から、容易に証明出来る。 □

4 例題

例題 4.1 (*Distorted* 測度から *Uncertain* 測度の構成)

p は (X, Σ) 上の確率測度、単調増加な連続関数 $y = g(x)$ は $g(0) = 0, g(1) = 1$ の時、

$$P_g(A) = g(p(A)) \quad A \in \Sigma$$

を *Distorted* 確率測度と呼ぶ ($cf.$[9])。もし関数 $g(x)$ が *concave* ならば、P_g は *Submodular* となり、条件 $\mathscr{K}$ を満たす。従って、補題 (2.3) により、$\delta(\cdot) = J_{0.5}P_g(\cdot)$ は *Uncertain* 測度である。

例題 4.2 (確率核から *Uncertain* 測度の構成)

例題 (4.1) と同様にして、*concave* 関数 $g(x)$ として、(X, Σ) 上の確率核 $p(\cdot \mid x)$ に対して、次の式がなりたつ.

$$\mathcal{K}(\cdot \mid \cdot) = P_g(\cdot \mid \cdot) = g\big(p(\cdot \mid \cdot)\big) \in U_{SO}(X \mid X).$$

まだ、初期確率分布 ν に対して、$\mu = \nu_g \in U_{SO}$ も分かる。補題 (3.3) と定理 (3.1), (3.2) を利用して、$\mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid \mu)$ $(n = 1, 2, \dots)$ は条件 $\mathscr{K}$ を満たすし、$\delta^{(n)} = J_{0.5}(\mathcal{K}^{(n)}(\cdot \mid \mu))$ は *Uncertain* 測度である。

例題 4.3 (条件付き *Uncertain* 測度)

(X, Σ) を可測空間とする、$\mathcal{M}$ は Σ 上の *Uncertain* 測度、$\mathcal{M}(A) > 0$ なる $A \in \Sigma$ に対して、集合関数

$$m(B \mid A) = \frac{\mathcal{M}(B \cup A)}{\mathcal{M}(A)},\ B \in \Sigma$$

を定める。この時、

$$\mathcal{M}(\cdot \mid A) := J_{0.5} m(\cdot \mid A)$$

は *Uncertain* 測度となる。$\mathcal{M}(\cdot \mid A)$ は A を与えたときの条件付き *Uncertain* 測度と呼ぶ $(cf.[8])$.

5 Remark

Uncertain 理論の動的システム関しては、この論文と *Peng and Iwamura[10]* の結果を利用して、μ と $\mathcal{K}(\cdot \mid \cdot)$ から、有限期間の離散型 *Uncertain* 過程の構成が簡単にできるが、無限時間過程に関しては今後の課題である。

参考文献

[1] G. Choquet, Theory of capacities, Annal de l'Institute Fourier, vol.5,131-295, 1954.

[2] J.L. Doob, Stochastic Processes, Jhon Wiley, New York, 1953.

[3] M. Kageyama, Credibilistic Markov decision processes: The average case, J. Comput. Appl. Math., 224, 140-145, 2009.

[4] M. Kageyama and K.Iwamura, Discrete time credibilistic processes: Construction and convergences, Inform. Sci., 179, 4277-4283, 2009.

[5] M. Kageyama, B. Yang, P. Hou, Discrete-time hybrid processes and discounted total expected values, Fuzzy Optimization and Decision Making, volume 10, Number4, 341-355, 2011.

[6] X. Li and B. Liu, Chance measure for hybrid events with fuzziness and randomness, Sobt Computing, to be published.

[7] B. Liu, Uncertain Theory, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[8] B. Liu, Uncertain Theory, third ed., UTLAB, 2009.

[9] E. Pap, Null-additive set functions, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[10] Z. Peng, K. Iwamura, Some Properties of Product Uncertain Measure, http://www.orsc.edu.cn/online/081228.pdf.

[11] B. Yang, P. Hou, M. Kageyama, Discrete-time hybrid decision processes: the discounted case, preprint.

[12] L. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, vol.8, 338-353, 1965.