

ファジィベイズ手法の品質管理への応用 (An application of fuzzy Bayesian method to quality control)

日本化学工業株式会社・生産技術部 佐々木 稔 (Minoru SASAKI)
Department of Industrial Technology,
NIPPON CHEMICAL INDUSTRIAL CO., LTD.
神奈川大学・理学部 堀口 正之 (Masayuki HORIGUCHI)
Faculty of Science, Kanagawa University

1 はじめに

品質管理の世界は、通常、主観や曖昧さは少ないと思われている。特に、製造された製品の合否を判定するための規格値は厳密なものと思われがちである。しかし、そうとも言い切れないところがある。規格値には定量的のものと定性的のものがある。定量的な場合は、上限値或いは下限値を少しでも外れれば、不合格と割り切って判定することができる (Table 1)。これに対して、定性値は、合否の境界が曖昧である。化学分析を例にとれば、外観 (色、溶状、濁度・透明度)、におい、堅さ、異物等の定性的な規格値は、極めて曖昧である (Table 2)。

規格項目	下限値	上限値	測定値	判定
比重	1.60	1.70	1.67	合格 (Accept)
			1.71	不合格 (reject)

Table 1: 定量的な規格値

規格項目	下限値	上限値	測定値	判定
外観 (色)	白色であること (黄色みがないこと)	人の感覚		人により異なる
外観 (溶状)	無色澄明であること (濁り着色のないこと)			
におい	無臭であること			

Table 2: 定性的な規格値

このような人の感覚による評価、判定を行うものを官能検査（手法としては、一点試験法、二点識別試験法、三点識別試験法、配偶法、順位法、採点法、格付け法、一対比較法等がある）と呼んでいる。しかし、官能検査は人の五感に頼っているため、感情の変化、習熟度等により個人差が大きい問題がある。この個人差を極力小さくするために、外観等の評価の場合、通常は、標準資料（現物見本、色見本、標準液、等）と比較して判定している。尚、透明液体の場合、ハーゼン色数などが JIS 規格にある。

何れにしても、人の感覚が頼りである以上は、境界は曖昧である。このような曖昧さを統計的品質管理に積極的に取り込むこと及びその方法論としてファジィ理論の応用の必要性が、以前より、主張されている（長沢伸也：「ファジィ理論と応用」品質管理 Vol.43 No.8 pp.83~ 89、1992.8）。しかし、現在まで、品質管理の分野において、ファジィ理論が導入された例は我々の知る限りにおいてほとんどない。

我々は、以前より、ベイズ的手法を品質管理の問題に適用することを検討し、先には、区間ベイズ手法を用いた不適合品の事前検出方法を提案した ([18])。そこで、本報告では、我々のベイズ手法を一步進め、ファジィ理論も取り込んだファジィベイズ手法の品質管理への応用を提案する。具体的には、Zadeh の拡張原理を適用しファジィ領域まで応用範囲を拡大することを目的とする。

2 記号と補題

はじめに、ファジィ数と δ -レベル集合、ファジィ正規分布など次節において必要となるいくつかの補題について述べておく。

実数空間全体を $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で表し、 \mathbb{R} 上のファジィ集合をそのメンバーシップ (membership) 関数 $\tilde{a} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ で表す。 \mathbb{R} 上のファジィ集合の全体を $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ で表す。 \tilde{a} と任意の $\delta (0 < \delta \leq 1)$ に対して、

$$\tilde{a}_\delta := \{x \in \mathbb{R} | \tilde{a} \geq \delta\}$$

を \tilde{a} の δ -レベル集合という。また、 \tilde{a}_0 で集合 $\{x \in \mathbb{R} | \tilde{a} > 0\}$ の閉包 (closure) を表し \tilde{a} のサポート (support) という。

\mathbb{R} 上のファジィ集合 \tilde{a} が次の (i)-(iv) の条件を満たすとき、 \tilde{a} をファジィ数という：

(i) (normality) $\tilde{a}(x_0) = 1$ となる $x_0 \in \mathbb{R}$ が存在する。

(ii) (convexity) 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ に対して

$$\tilde{a}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \tilde{a}(x_1) \wedge \tilde{a}(x_2).$$

ただし、2つの実数 a, b に対して、 $a \wedge b = \min\{a, b\}$ である。

(iii) (upper-semicontinuity) 関数 $\tilde{a} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ は上半連続 (upper-semicontinuous) である。

(iv) \tilde{a}_0 は有界閉集合である。

ファジィ数の全体を $\tilde{\mathbb{R}}$ で表す。上の条件 (ii)-(iv) は、任意の $\delta (0 < \delta \leq 1)$ に対して δ -レベル集合 \tilde{a}_δ が有界閉区間であることと同値である (cf. [5])。従って、 $\tilde{a} \in \tilde{\mathbb{R}}$ のとき、 $\tilde{a}_\delta = [a_\delta^-, a_\delta^+]$ と表す。

本論文では、ファジィ集合に関する管理法を構成するために、Zadehの拡張原理([14])から、関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次の方法により $f: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ に拡張する。

Zadeh([14])の拡張原理:

$\tilde{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ に対して、

$$(1) \quad f(\tilde{x})(y) = \begin{cases} \sup_{x: f(x)=y} \tilde{x}(x) & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Lemma 1 (Nguyen, cf.[23, 5]). $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ となる任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して、 $f(\tilde{x})(y) = \tilde{x}(x)$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在するとする。このとき、

$$(2) \quad f(\tilde{x})_\delta = f(\tilde{x}_\delta) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in \tilde{x}_\delta\} \quad (0 < \delta \leq 1)$$

が成り立つ。

Lemma 1 より、次が明らかに成り立つ。

Lemma 2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が単調かつ連続関数とする。このとき、 $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{R}}$ ならば $f(\tilde{x}) \in \tilde{\mathbb{R}}$ である。

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数と閉区間 $[a, b]$ 上の正規確率を次の記号で表す。

$$(3) \quad N(\mu, \sigma^2)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$N([a, b] | \mu, \sigma^2) = \int_a^b N(\mu, \sigma^2)(t) dt.$$

任意の \mathbb{R} 上のファジィ集合 $\tilde{\mu} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ を平均にもつ、分散 σ^2 のファジィ正規分布 $N(\tilde{\mu}, \sigma^2)$ を Zadeh の拡張原理により次で定める:

区間 $[a, b]$ のファジィ生起確率

$$(4) \quad N([a, b] | \tilde{\mu}, \sigma^2)(t) = \sup_{\mu: N([a, b] | \mu, \sigma^2)=t} \tilde{\mu}(\mu), \quad -\infty < a < b < \infty, 0 < t \leq 1.$$

3 ファジィベイジアンモデル

この節では、母平均 (θ と表す) が未知、分散 (c^2 と表す) は既知の正規母集団について、ファジィ正規分布を母平均の事前分布としたときのベイズ解析について考察する。

3.1 ファジィ事後分布

X_1, X_2, \dots, X_n を正規母集団 $N(\theta, c^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする (θ は未知、 c は既知)。このとき、 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ は $N(\theta, \frac{c^2}{n})$ に従う。

θ の事前分布を $N(\mu, \sigma_0^2)$ とするとき, $\bar{X} = \bar{x}$ のときの θ の事後分布は $N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_n^2)$ である。ただし,

$$(5) \quad \mu_{\bar{x}} = \frac{n\bar{x}/c^2 + \mu/\sigma_0^2}{n/c^2 + 1/\sigma_0^2},$$

$$(6) \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{n/c^2 + 1/\sigma_0^2}.$$

$\tilde{\mu} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ に対して, ファジィ正規分布 $N(\tilde{\mu}, \sigma_0^2)$ を未知の母平均 θ の事前分布とし, $\bar{X} = \bar{x}$ を観測した場合の事後ファジィ正規分布 $N(\tilde{\mu}_{\bar{x}}, \sigma_n^2)$ を以下のようにして定義しよう。式 (5) の右辺を $\mu \in \mathbb{R}$ の関数と見て $\theta_{\bar{x}}(\mu)$ で表す。すなわち,

$$(7) \quad \theta_{\bar{x}}: \mu \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{n\bar{x}/c^2 + \mu/\sigma_0^2}{n/c^2 + 1/\sigma_0^2} \in \mathbb{R},$$

ここで, 事後ファジィ正規分布を次で定める。

$$(8) \quad N(\tilde{\mu}_{\bar{x}}, \sigma_n^2) = N(\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_n^2),$$

$$(9) \quad \tilde{\mu}_{\bar{x}} = \theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}).$$

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $N(\tilde{\mu}_{\bar{x}}, \sigma_n^2)$ の片側ファジィ確率を次で表す:

$$(10) \quad \tilde{\lambda}_U(a|\bar{x}) := N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_n^2),$$

$$(11) \quad \tilde{\lambda}_L(a|\bar{x}) := N((-\infty, a]|\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_n^2).$$

Theorem 1. $\tilde{\mu} \in \tilde{\mathbb{R}}$ のとき, 次の (i)-(iii) が成り立つ。

(i) 任意の $a \in \mathbb{R}, \bar{X} = \bar{x}$ に対して, $\tilde{\lambda}_U(a|\bar{x}) \in \tilde{\mathbb{R}}, \tilde{\lambda}_L(a|\bar{x}) \in \tilde{\mathbb{R}}$,

(ii) 任意の $\delta (0 \leq \delta \leq 1)$ に対して,

$$(12) \quad \tilde{\lambda}_U(a|\bar{x})_\delta = [\lambda_U^-(a|\bar{x})_\delta, \lambda_U^+(a|\bar{x})_\delta],$$

$$(13) \quad \tilde{\lambda}_L(a|\bar{x})_\delta = [\lambda_L^-(a|\bar{x})_\delta, \lambda_L^+(a|\bar{x})_\delta].$$

ただし, $\tilde{\mu}_\delta = [\mu_\delta^-, \mu_\delta^+]$ とおくと,

$$\lambda_U^\pm(a|\bar{x})_\delta = N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^\pm), \sigma_n^2), \quad \lambda_L^\pm(a|\bar{x})_\delta = N((-\infty, a]|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^\pm), \sigma_n^2) \quad (\text{複合同順}).$$

(iii) $\lambda_U^\pm(a|\bar{x})$ は a についての連続な減少関数, $\lambda_L^\pm(a|\bar{x})$ は a についての連続な増加関数である。

Proof. 式 (3), (7) より $N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\mu), \sigma_n^2)$ は μ に関して連続な増加関数である。Lemma 2 より $\tilde{\lambda}_U(a|\bar{x}) \in \tilde{\mathbb{R}}$ が成り立つ。同様に, $\tilde{\lambda}_L(a|\bar{x}) \in \tilde{\mathbb{R}}$ が示される。任意の $y \in (0, 1)$ に対して, $N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\mu), \sigma_n^2) = y$ となる μ は一意に存在する。従って, Lemma 1 より δ -レベル集合は

$$N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_n^2)_\delta = [N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^-), \sigma_n^2), N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^+), \sigma_n^2)].$$

これは, 式 (12) を意味する。式 (13) も同様に成り立つ。(iii) は明らかに成り立つ。■

3.2 δ -レベルパーセンタイル

任意の $\delta (0 < \delta \leq 1)$, $\alpha (0 < \alpha < 1)$ に対して, $\lambda_{\bar{L}}^-(p|\bar{x})_{\delta} = \alpha$ となる p は, Theorem 1 (iii) より一意に定まる。これを $\underline{p}(\alpha|\bar{x}, \delta)$ と記す。同様に, $\lambda_{\bar{U}}^+(\bar{p}|\bar{x})_{\delta} = \alpha$ となる \bar{p} を $\bar{p}(\alpha|\bar{x}, \delta)$ と記す。 $\underline{p}(\alpha|\bar{x}, \delta)$ (または $\bar{p}(\alpha|\bar{x}, \delta)$) を δ -レベル下側 (または上側) α -パーセンタイルという。次のような仮説を考える。

$$H_0 : \theta = \theta_0 (\text{または } \theta \in \Theta_0), \quad H_1 : \theta < \theta_0 (\theta \in \Theta_1), \quad H_2 : \theta > \theta_0 (\theta \in \Theta_2).$$

$N([a, \infty) | \theta_{\bar{x}(\bar{\mu}), \sigma_n^2})_{\delta} \ni \alpha$ であることは, Theorem 1 より $\lambda_{\bar{U}}^-(a|\bar{x})_{\delta} \leq \alpha \leq \lambda_{\bar{U}}^+(a|\bar{x})_{\delta}$ と表せるから, そのような a の最大値は $\bar{p}(\alpha|\bar{x}, \delta)$ となる。従って, ベイズ理論の仮説検定の方法を適用して, 対立仮説 H_1 に対する H_0 の棄却域は次のようになる:

$$(14) \quad \theta_0 \geq \bar{p}(\alpha|\bar{x}, \delta).$$

同様に, 対立仮説 H_2 に対する H_0 の棄却域は次のようになる:

$$(15) \quad \theta_0 \leq \underline{p}(\alpha|\bar{x}, \delta).$$

ここで, 棄却域 (14), (15) を具体的に求めてみよう。母平均 θ に関して, $\tilde{\theta} \sim N(\tilde{\mu}, \sigma_0^2)$ とする。前述で定義した δ -レベル上側 α -パーセンタイル $\bar{p}(\alpha|\bar{x}, \delta)$ を \bar{p} とするとき, $\lambda_{\bar{U}}^+(\bar{p}|\bar{x})_{\delta} = \alpha$ を書き下すと

$$N(\tilde{\theta} \geq \bar{p} | \theta_{\bar{x}}(\mu_{\delta}^+), \sigma_n^2) = \alpha, \quad N(\tilde{\theta} \leq \bar{p} | \theta_{\bar{x}}(\mu_{\delta}^+), \sigma_n^2) = 1 - \alpha.$$

これより, $\bar{p} = \theta_{\bar{x}}(\mu_{\delta}^+) + \sigma_n \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ を得る。ただし, Φ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数を表す。

したがって, 不等式 (14) は, 次の式と同値になる:

$$(16) \quad \bar{x} \leq \frac{c^2}{n} \left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_{\delta}^+}{\sigma_0} - \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sigma_n} \right)$$

これを, 対立仮説 H_1 に対する棄却域の許容左端点 (限界点) として $\underline{d}(\theta_0, \delta, \alpha)$ とおくことにする。同様に, 上式の μ_{δ}^+ を μ_{δ}^- に変えて

$$(17) \quad \bar{x} \leq \frac{c^2}{n} \left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_{\delta}^-}{\sigma_0} - \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sigma_n} \right)$$

を対立仮説 H_1 に対する棄却域の許容右端点として $\bar{d}(\theta_0, \delta, \alpha)$ とおく。このとき, 次のような判断をすることができる。

$$(18) \quad \bar{x} \leq \underline{d}(\theta_0, \delta, \alpha) \text{ ならば停止,}$$

$$(19) \quad \underline{d}(\theta_0, \delta, \alpha) < \bar{x} < \bar{d}(\theta_0, \delta, \alpha) \text{ ならば監視状態,}$$

$$(20) \quad \bar{x} \geq \bar{d}(\theta_0, \delta, \alpha) \text{ ならば継続 (正常状態).}$$

対立仮説 H_2 に対する棄却域については, 以下のようになる。はじめに,

$$(21) \quad \underline{p} = \theta_{\bar{x}}(\mu_{\delta}^+) + \sigma_n \Phi^{-1}(\alpha)$$

とにおいて, $\theta_0 \leq \underline{p}$ となる領域を求めると,

$$(22) \quad \bar{x} \geq \frac{c^2}{n} \left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_\delta^+}{\sigma_0^2} - \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma_n} \right) := \underline{e}(\theta_0, \delta, \alpha)$$

となり, 上式の μ_δ^+ を μ_δ^- に変えた場合についても

$$(23) \quad \bar{x} \geq \frac{c^2}{n} \left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_\delta^-}{\sigma_0^2} - \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sigma_n} \right) := \bar{e}(\theta_0, \delta, \alpha)$$

を得るから,

$$(24) \quad \bar{x} \geq \bar{e}(\theta_0, \delta, \alpha) \text{ ならば停止,}$$

$$(25) \quad \underline{e}(\theta_0, \delta, \alpha) < \bar{x} < \bar{e}(\theta_0, \delta, \alpha) \text{ ならば監視状態,}$$

$$(26) \quad \bar{x} \leq \underline{e}(\theta_0, \delta, \alpha) \text{ ならば継続 (正常状態).}$$

Remark: ベイズ流の仮説検定は, 次のような考え方に基づいて行う。有意水準 (significance level) を α とするとき, 例えば,

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \theta \leq \theta_0, \text{ 対立仮説 } H_1 : \theta > \theta_0$$

に対して,

$$\int_{\theta \leq \theta_0} p(\theta|x) d\theta < \alpha$$

ならば, 帰無仮説 H_0 を棄却し, 対立仮説 H_1 を採択する。

4 数値例

4.1 三角ファジィ数での例

ここでは, $\tilde{\mu}$ を三角ファジィ数とする。すなわち,

$$(27) \quad \tilde{\mu} := N(a/b/c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c, \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

δ -レベル集合は次で与えられる:

$$(28) \quad \tilde{\mu}_\delta = [\mu_\delta^-, \mu_\delta^+], \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

ただし, $\mu_\delta^- = b\delta + a(1-\delta)$, $\mu_\delta^+ = b\delta + c(1-\delta)$.

具体的に, $N(-4/0/4)$, $n = 10$, 既知の分散の値 $c^2 = 1$, 事前知識 $N(\tilde{\mu}, 1)$ として, 有意水準 $\alpha = 0.025, 0.05$ に対する δ -レベルの棄却域に対する端点を, 以下の図 (Figure 1, Figure 2, Figure 3) と表 (Table 3, Table 4) に示す。

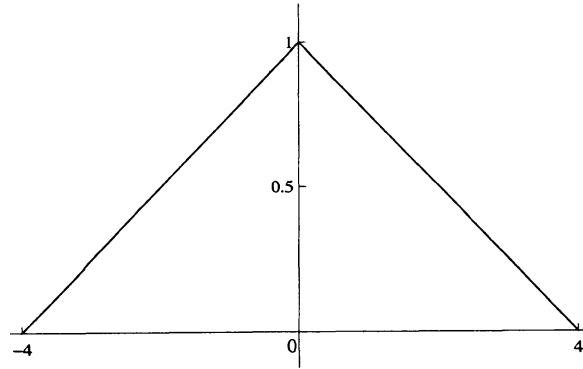


Figure 1: 三角ファuzzi数の例 $N(-4/0/4)$

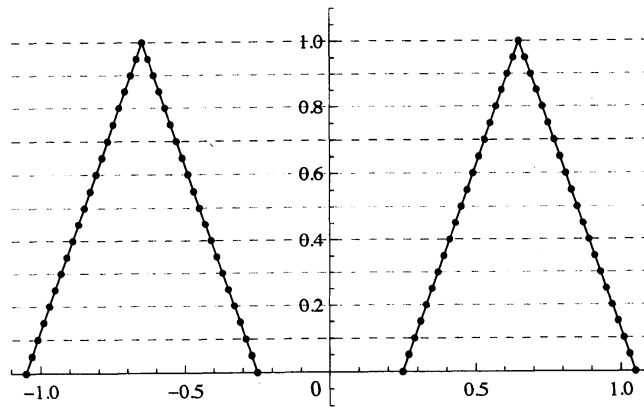


Figure 2: 棄却域と許容範囲の例 $\tilde{\mu} = N(-4/0/4)$

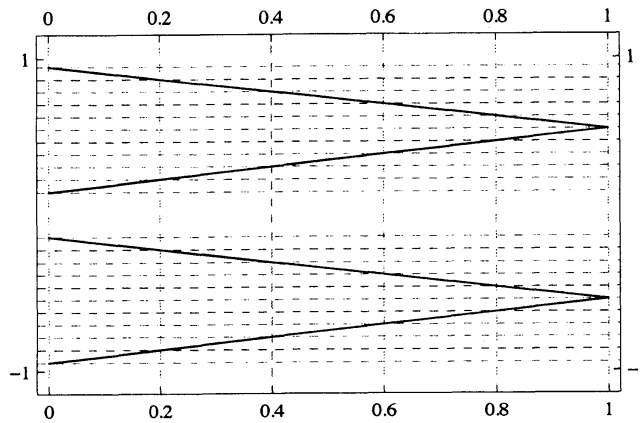


Figure 3: 管理限界の例 $\tilde{\mu} = N(-4/0/4)$, 横軸は δ の数値を表す.

Table 3: 棄却域を決める各端点 ($\underline{d}, \bar{d}, \underline{e}, \bar{e}$), $\alpha = 0.025$

δ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
\bar{e}	1.05005	0.970047	0.890047	0.810047	0.730047	0.650047
\underline{e}	0.250047	0.330047	0.410047	0.490047	0.570047	0.650047
\bar{d}	-0.250047	-0.330047	-0.410047	-0.490047	-0.570047	-0.650047
\underline{d}	-1.05005	-0.970047	-0.890047	-0.810047	-0.730047	-0.650047

Table 4: 棄却域を決める各端点 ($\underline{d}, \bar{d}, \underline{e}, \bar{e}$), $\alpha = 0.05$

δ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
\bar{e}	0.945536	0.865536	0.785536	0.705536	0.625536	0.545536
\underline{e}	0.145536	0.225536	0.305536	0.385536	0.465536	0.545536
\bar{d}	-0.145536	-0.225536	-0.305536	-0.385536	-0.465536	-0.545536
\underline{d}	-0.945536	-0.865536	-0.785536	-0.705536	-0.625536	-0.545536

例えば、帰無仮説 $H_0: \theta = 0$, 対立仮説 $H_1: \theta \neq 0$, $\alpha = 0.05$ での両側検定の場合について、 $\delta = 0.8$ で考えた場合、 \bar{x} の値が、 $\bar{x} < -0.730047$ または $0.730047 < \bar{x}$ ならば、仮説 H_0 を棄却し、 $-0.730047 \leq \bar{x} < -0.570047$ または $0.570047 < \bar{x} \leq 0.730047$ ならば監視状態、 $-0.570047 \leq \bar{x} \leq 0.570047$ ならば正常状態と考える。

4.2 台形ファジイ数での例

今度は、 $\tilde{\mu}$ を

$$(29) \quad \tilde{\mu} := N(a/b/c/d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b < x < c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする。 δ -レベル集合は次で与えられる:

$$(30) \quad \tilde{\mu}_\delta = [\mu_\delta^-, \mu_\delta^+], \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

ただし、 $\mu_\delta^- = b\delta + a(1-\delta)$, $\mu_\delta^+ = c\delta + d(1-\delta)$.

$N(-4/-1/1/4)$, $n = 10$, 既知の分散の値 $c^2 = 1$, 事前知識 $N(\tilde{\mu}, 1)$ として、有意水準 $\alpha = 0.025, 0.05$ に対する δ -レベルの棄却域に対する端点を以下の表に示す (Table 5, Table 6)。

Table 5: 棄却域を決める各端点 ($\underline{d}, \bar{d}, \underline{e}, \bar{e}$), $\alpha = 0.025$

δ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
\underline{d}	-1.05005	-0.990047	-0.930047	-0.870047	-0.810047	-0.750047
\bar{d}	-0.250047	-0.310047	-0.370047	-0.430047	-0.490047	-0.550047
\underline{e}	0.250047	0.310047	0.370047	0.430047	0.490047	0.550047
\bar{e}	1.05005	0.990047	0.930047	0.870047	0.810047	0.750047

Table 6: 棄却域を決める各端点 ($\underline{d}, \bar{d}, \underline{e}, \bar{e}$), $\alpha = 0.05$

δ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
\underline{d}	-0.945536	-0.885536	-0.825536	-0.765536	-0.705536	-0.645536
\bar{d}	-0.145536	-0.205536	-0.265536	-0.325536	-0.385536	-0.445536
\underline{e}	0.145536	0.205536	0.265536	0.325536	0.385536	0.445536
\bar{e}	0.945536	0.885536	0.825536	0.765536	0.705536	0.645536

References

- [1] J. A. Bather. Control charts and minimization of costs. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 25:49–80, 1963.
- [2] Robert V. Baxley, Jr. An application of variable sampling interval control charts. *Journal of Quality Technology*, 27(4):275–282, 1995.
- [3] Lorraine De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9(2):235–244, 1981.
- [4] M. A. Girshick and Herman Rubin. A Bayes approach to a quality control model. *Ann. Math. Statistics*, 23:114–125, 1952.
- [5] Vilém Novák. *Fuzzy sets and their applications*. Adam Hilger Ltd., Bristol, 1989. Translated from the Czech.
- [6] E. L. Porteus and A. Angelus. Opportunities for improved statistical process control. *Management Sci.*, 43:1214–1228, 1997.
- [7] Marion R. Reynolds, Jr., Jesse C. Arnold, Raid W. Amin, and Joel A. Nachlas. \bar{X} charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2):181–192, 1988.

- [8] W.A. Schewhart. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. Van Nostrand, 1931. 白崎 文雄 (訳), 「工業製品の経済的品質管理」, 日本規格協会, 1951.
- [9] George Tagaras. A dynamic programming approach to the economic design of X -charts. *IIE Trans.*, 26(3):48–56, 1994.
- [10] George Tagaras. Dynamic control charts for finite production runs. *European J. Oper. Res.*, 91:38–55, 1998.
- [11] Howard M. Taylor. Markovian sequential replacement processes. *Ann. Math. Statist.*, 36:1677–1694, 1965.
- [12] Howard M. Taylor. Statistical control of a Gaussian process. *Technometrics*, 9:29–41, 1967.
- [13] Jiro Yamauchi. *Statistical table and formulas with computer applications JSA-1972*. Japanese Standards Association, 1972.
- [14] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [15] 山本 元. **ファジィ理論 基礎と応用**. 共立出版, 東京, 2010.
- [16] 宮沢 光一. **情報・決定理論序説**. 岩波書店, 1971.
- [17] 太田 宏. **ファジィ理論の品質管理への応用**. 科学研究費報告書, 1989.
- [18] 佐々木稔, 堀口正之. 区間ベイズ手法による不適合品の事前検出. **数理解析研究所講究録 1734 「不確実性下における意思決定問題」**, pages 156–163, 2011.
- [19] 佐々木稔, 堀口正之, and 蔵野正美. 区間ベイズ推定による適応型品質管理. **数理解析研究所講究録 1589 「不確実な状況における意思決定の理論と応用」**, pages 120–129, 2008.
- [20] 繁樹 算男. **ベイズ統計入門**. 東京大学出版会, 1985.
- [21] 長沢 伸也. **ファジィ理論と応用- 品質管理**, 43:83–89, 1992.
- [22] 堀口 正之. 未知の推移確率行列の事前・事後区間表現とマルコフ決定過程について. **数理解析研究所講究録 1682 「不確実・不確実性下での意思決定過程」**, pages 70–77, 2010.
- [23] 坂和 正敏. **ファジィ理論の基礎と応用**. 森北出版, 東京, pod 版, 2007(1989).
- [24] 伊喜 哲一郎, 堀口 正之, 安田 正實, 蔵野 正美. 不確実性の下でのマルコフ決定過程に対する区間ベイズ手法. **数理解析研究所講究録 1636 「不確実性と意思決定の数理」**, pages 1–8, 2009.
- [25] 森口 繁一. **品質管理**. 岩波書店, 1979.

- [26] 駒木 文保. ベイズ理論の現在. 2010年度統計関連学会連合大会チュートリアルセッション予稿集, 2010.
- [27] 佐々木 稔. 適応型の管理図とその品質マネジメントシステムへの応用に関する研究, 放送大学大学院文化科学研究科修士論文, 2004.
- [28] 金川 明弘. ファジィ理論の品質管理への応用. 日本ファジィ学会誌, page 75, 1991/92.
- [29] 渡部 洋. ベイズ統計学入門. 福村出版, 1999.
- [30] 葛谷 和義. 活用多変量管理図- 要求品質特性の工程管理-. In 第24回多変量解析シンポジウム, pages 89-96. 日本科学技術連盟, 2001.