数理解析研究所講究録
第 1864 巻 2013 年 82-89

黄金最適化問題の双対化
— 不等式による —

岩本誠一* (九州大学·名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学),
藤田敏治 (九州工業大学)

概 要

本報告では、n 変数 2 次計画問題 (P) に対して、“不等式による” **双対化** (dualise, dualize) に焦点をあてる。その方法は (i) 平方完成、(ii) 相加・相乗平均である。特に平方完成では、拡大ラグランジュ乗数を用いて示していることに注意する。またこのとき、主問題 (P) および双対問題 (D) の最適解と最適値の間に黄金相補双対性が見られることを示す。

1 黄金最適化問題

1.1 主問題

n 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の 2 次計画問題として次の最小化問題 (P) を考える。

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1} x_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \;\; x \in R^n \\ & \text{(ii)} \;\; x_0 = c. \end{array}
$$

ここに $c \in R$ とする。ϕ は**黄金数** (Golden number) を表し、

$$
\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803
$$

である。また黄金数については

$$
1 : \phi = \phi^{-2} : \phi^{-1}, \quad \phi^{-2} + \phi^{-1} = 1
$$

が成り立ち、黄金数 ϕ は 2 次方程式

$$
x^2 - x - 1 = 0 \tag{1}
$$

の正の解としても定義される。

*本研究は、科学研究費補助金「平成 22 年度基盤研究 (C)」課題番号 22540144 の助成を受けた。

補題 1 黄金数 ϕ の和については、任意の自然数 n に対して次が成り立つ。

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{2k-1} = \phi^{2n} - 1,$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{-2k} = \phi^{-1} - \phi^{-2n-1},$
3. $\phi^{n} + \phi^{n+1} = \phi^{n+2} \qquad n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,$
4. $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} \phi^{-3k-1} + \phi^{-3n-2} = \phi^{-2}.$

定義 1 [5] 列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は

$$x_n = c\phi^{-2n} \quad \text{または} \quad x_n = c\phi^{-n}$$

のとき、**黄金経路**（*Golden path, GP*）という。ただし、c は定数である。前者を $1:\phi$ **型**といい、後者を $\phi:1$ **型**という。

定理 1 主問題 (P) は

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n) = c\left(\phi^{-2},\quad \phi^{-4},\quad \cdots,\quad \phi^{-2n+2},\quad \phi^{-2n}\right)$$

で最小値 $m = \phi^{-1}c^2$ をもつ。
最小点 $\hat{x}$ は $1:\phi$ 型黄金経路になっている。

1.2 双対問題

問題 (P) の双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad \mu \in R^n. \end{array}$$

定理 2 双対問題 (D) は

$$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \cdots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^*) = c\left(\phi^{-1},\quad \phi^{-3},\quad \cdots,\quad \phi^{-2n+3},\quad \phi^{-2n+1}\right)$$

で最大値 $M = \phi^{-1}c^2$ をもつ。
最大点 μ^* も $1:\phi$ 型黄金経路になっている。

主問題 (P) の最小解と双対問題 (D) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. （**双対性**）　最小値と最大値が等しい：$m = M$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は黄金数の逆数 ϕ^{-1} である。

2. （**黄金**）　最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_n^*)$ は共に $1:\phi$ 型の黄金経路である。

3. （**相補性**）　最小点と最大点を交互に編むと、$\phi:1$ 型の黄金経路である。

この三位一体の関係を**黄金相補双対性**（Golden complementary duality, GCD）という。

2　不等式による双対化

ここでは主問題 (P) から双対問題 (D) を、不等式による 2 つの方法で導こう。2.1 節では平方完成で、2.2 節では相加・相乗平均で示す。

2.1　平方完成法

主問題 (P) に対して、$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が制約条件 (i), (ii) を満たしているとして、その目的関数の値を $I(x)$ で表す。また任意の実数列 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ に対して、双対問題 (D) の目的関数の値を $J(\mu)$ で表わす。いま、変数列 $u = (u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$ を

$$u_k = x_k - x_{k+1} \qquad 0 \le k \le n-1 \tag{2}$$

で導入する。このとき次の定理を得る。

定理 3 主問題 (P) の実行可能解 $x \in R^n$ と、双対問題 (D) の実行可能解 $\mu \in R^n$ に対して不等式

$$I(x) \ \ \geq \ \ J(\mu) \tag{3}$$

が成り立つ。

Proof.　(2) を満たす任意の (x, u) と、任意の実数列 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ を用いて、$I(x)$ は次でも表される。

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big[u_k^2 + x_{k+1}^2 + 2\mu_{k+1}(x_k - x_{k+1} - u_k) \Big] + \phi^{-1} x_n^2. \tag{4}$$

(4) では 列 $\{2\mu_1,\ 2\mu_2,\ \ldots,\ 2\mu_n\}$ を等式制約に対応するラグランジュ変数列にとっている。これを**拡大ラグランジュ乗数列**(augmented Lagrange multipliers) という。(4) より、

$$\begin{aligned} I(x) \quad &= \quad 2c\mu_1 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_k^2 - 2\mu_{k+1}u_k) + \sum_{k=1}^{n-1}\left[x_k^2 - 2(\mu_k - \mu_{k+1})x_k\right] \\ &\quad + (1+\phi^{-1})x_n^2 - 2\mu_n x_n \end{aligned}$$

が得られる。u_k の項と x_k の項を**平方完成**（標準変形）すると、

$$
\begin{aligned}
I(x) &= 2c\mu_1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left[(u_k - \mu_{k+1})^2 - \mu_{k+1}^2\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\{x_k - (\mu_k - \mu_{k+1})\}^2 - (\mu_k - \mu_{k+1})^2\right] \\
&\quad + \phi(x_n - \phi^{-1}\mu_n)^2 - \phi^{-1}\mu_n^2.
\end{aligned}
$$

ゆえに、右辺から非負項を削除すると、

$$
I(x) \geq 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] - \phi^{-1}\mu_n^2 \tag{5}
$$

となり、この右辺は $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ のみからなり x_k を含まない。すなわち (5) の右辺は、(D) の目的関数値 $J(\mu)$ を表わている。したがって、双対問題が得られた。 □

定理 4 (3) の等号は

$$
\begin{aligned}
u_k &= \mu_{k+1} & k &= 0, 1, \cdots, n-1, \\
x_k &= \mu_k - \mu_{k+1} & k &= 1, 2, \cdots, n-1, \\
x_n &= \phi^{-1}\mu_n
\end{aligned}
$$

のときに限り成り立つ。この解 $(\hat{x}, \hat{u}; \mu^*)$ は、

$$
\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n) = c\left(\phi^{-2},\ \phi^{-4},\ \cdots,\ \phi^{-2n+2},\ \phi^{-2n}\right), \tag{6}
$$

$$
\hat{u} = (\hat{u}_0,\ \hat{u}_1,\ \cdots,\ \hat{u}_{n-2},\ \hat{u}_{n-1}) = c\left(\phi^{-1},\ \phi^{-3},\ \cdots,\ \phi^{-2n+3},\ \phi^{-2n+1}\right), \tag{7}
$$

$$
\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \cdots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^*) = c\left(\phi^{-1},\ \phi^{-3},\ \cdots,\ \phi^{-2n+3},\ \phi^{-2n+1}\right) \tag{8}
$$

である。このとき両辺は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. 等号条件は、定理 3 の証明より明らかである。このときの $\hat{x}, \hat{u}, \mu^*$ の値は、定理 1、定理 2、(2) より得られる。ここでは両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることを示す。

$I(\hat{x})$ については以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
I(\hat{x}) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[(\hat{x}_k - \hat{x}_{k+1})^2 + \hat{x}_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}\hat{x}_n^2 \\
&= c^2 \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\phi^{-2k} - \phi^{-2(k+1)}\right)^2 + \left(\phi^{-2(k+1)}\right)^2\right] + c^2\phi^{-1}\left(\phi^{-2n}\right)^2 \\
&= c^2\left[\sum_{k=1}^{2n}\phi^{-2k} + \phi^{-4n-1}\right] \\
&= c^2\left[\left(\phi^{-1} - \phi^{-4n-1}\right) + \phi^{-4n-1}\right] \quad \text{（補題 1 より）} \\
&= \phi^{-1}c^2.
\end{aligned}
$$

一方、$J(\mu^*)$ については

$$
\begin{aligned}
J(\mu^*) &= 2c\mu_1^* - {\mu_1^*}^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k^* - \mu_{k+1}^*)^2 + {\mu_{k+1}^*}^2\right] - \phi^{-1}{\mu_n^*}^2 \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - \phi^{-2} - \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\phi^{-2k+1} - \phi^{-2k-1}\right)^2 + \left(\phi^{-2k-1}\right)^2\right\} - \phi^{-4n+1}\right] \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - \sum_{k=1}^{2n-2}\phi^{-2k} - (\phi^{-4n+2} + \phi^{-4n+1})\right] \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - (\phi^{-1} - \phi^{-4n+3}) - \phi^{-4n+3}\right] \quad （補題 1 より） \\
&= c^2\left(2\phi^{-1} - \phi^{-1}\right) \\
&= \phi^{-1}c^2.
\end{aligned}
$$

以上より、両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ である。 □

2.2 相加・相乗平均法

定理 5 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \le x^2 + y^2 \tag{9}$$

が成り立つ。等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (9) は**相加・相乗平均不等式** (arithmetic-geometric mean inequality, AG) とよばれる。

AG 不等式より、任意の実数 x_1, μ_1 に対して 2 つの不等式

$$
\begin{aligned}
2(c - x_1)\mu_1 &\le (c - x_1)^2 + \mu_1^2, \\
2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_1\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_1\right) &\le \phi x_1^2 + \phi^{-1}\mu_1^2
\end{aligned}
$$

と 2 つの等号条件 $c - x_1 = \mu_1$, $\phi^{\frac{1}{2}}x_1 = \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_1$ が成り立つ。すなわち、次の補題を得る。

補題 2 c を定数とすると、不等式

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - \phi^{-1}\mu_1^2 \le (c - x_1)^2 + x_1^2 + \phi^{-1}x_1^2 \qquad \forall x_1 \in R^1, \forall \mu_1 \in R^1$$

が成り立つ。等号は $x_1 = \phi^{-2}c$, $\mu_1 = \phi^{-1}c$ のときに限り成り立つ。このとき両辺は $\phi^{-1}c^2$ になる。

補題 3 cを定数とする。$(x_1, x_2) \in R^2$, $(\mu_1, \mu_2) \in R^2$ のとき

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 - \phi^{-1}\mu_2^2 \le (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + \phi^{-1}x_2^2 \quad (10)$$

が成り立つ。等号は $x_1 = \phi^{-2}c$, $x_2 = \phi^{-4}c$; $\mu_1 = \phi^{-1}c$, $\mu_2 = \phi^{-3}c$ のときに限り成り立つ。このとき両辺は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式より、任意の実数 x_1, x_2, μ_1, μ_2 に対して4つの不等式と等号条件

$$\begin{aligned}
2(c - x_1)\mu_1 &\le (c - x_1)^2 + \mu_1^2\,; & c - x_1 &= \mu_1 \\
2x_1(\mu_1 - \mu_2) &\le x_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2\,; & x_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\
2(x_1 - x_2)\mu_2 &\le (x_1 - x_2)^2 + \mu_2^2\,; & x_1 - x_2 &= \mu_2 \\
2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_2\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_2\right) &\le \phi x_2^2 + \phi^{-1}\mu_2^2\,; & \phi^{\frac{1}{2}}x_2 &= \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_2
\end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると、左辺は相殺して

$$2c\mu_1 \le \left[(c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + \phi x_2^2\right] + \left[\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + \phi^{-1}\mu_2^2\right]$$

になる。$\phi = 1 + \phi^{-1}$ より、(10) を得る。等号は4つの等号条件が同時に成り立つとき、すなわち、

$$x_1 = \phi^{-2}c,\ \ x_2 = \phi^{-4}c;\ \ \mu_1 = \phi^{-1}c,\ \ \mu_2 = \phi^{-3}c$$

のとき成り立つ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、次のようにしてわかる。実際、左辺は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&(c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + \phi^{-1}x_2^2 \\
&= c^2\left[\left(\phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \phi^{-8}\right) + \phi^{-9}\right] \\
&= c^2\left[\left(\phi^{-1} - \phi^{-9}\right) + \phi^{-9}\right] \\
&= \phi^{-1}c^2.
\end{aligned}$$

一方、右辺は

$$\begin{aligned}
&2c\mu_1 - \mu_1^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 - \phi^{-1}\mu_2^2 \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - (\phi^{-2} + \phi^{-4}) - (\phi^{-6} + \phi^{-7})\right] \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - (\phi^{-1} - \phi^{-5}) - \phi^{-5}\right] \\
&= c^2\left(2\phi^{-1} - \phi^{-1}\right) \\
&= \phi^{-1}c^2.
\end{aligned}$$

したがって、両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ である。 □

定理 6 c を定数として、$x_0 = c$ とすると、任意の $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n, \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in R^n$ に対して

$$\begin{aligned} 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] - \phi^{-1}\mu_n^2 & \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}x_n^2 & \qquad (11) \end{aligned}$$

が成り立つ。等号は x が (6) の $\hat{x}$, μ が (8) の μ^* であるときに限り成り立つ。このとき両辺は $\phi^{-1}c^2$ になる。さらに (11) の右辺は $I(x)$ を、左辺は $J(\mu)$ を表わしている。

Proof. AG 不等式より、x, μ に対して $2n$ 個の不等式と等号条件

$$\begin{aligned} 2x_{k-1}(\mu_{k-1} - \mu_k) &\leq x_{k-1}^2 + (\mu_{k-1} - \mu_k)^2 \ ; \ x_{k-1} = \mu_{k-1} - \mu_k \qquad k = 2, \ldots, n \\ 2(x_{k-1} - x_k)\mu_k &\leq (x_{k-1} - x_k)^2 + \mu_k^2 \ ; \ x_{k-1} - x_k = \mu_k \qquad k = 1, \ldots, n \\ 2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_n\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_n\right) &\leq \phi x_n^2 + \phi^{-1}\mu_n^2 \ ; \ \phi^{\frac{1}{2}}x_n = \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_n \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると、左辺が相殺して

$$\begin{aligned} 2c\mu_1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}x_n^2 & \\ + \mu_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}\mu_n^2 & \end{aligned}$$

になる。$\phi = 1 + \phi^{-1}$ より、(11) を得る。$2n$ 個の等号条件が同時に成り立つとき、等号は成り立つ。しかもこの $2n$ 連立 $2n$ 元 1 次方程式は唯一の解 (6), (8) をもつ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。実際、左辺は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}x_n^2 &= c^2 \left[\sum_{k=1}^{2n} \phi^{-2k} + \phi^{-4n-1}\right] \\ &= c^2 \left[\left(\phi^{-1} - \phi^{-4n-1}\right) + \phi^{-4n-1}\right] \\ &= \phi^{-1}c^2. \end{aligned}$$

一方、右辺は

$$\begin{aligned} & 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\ &= c^2 \left[2\phi^{-1} - \sum_{k=1}^{2n-2} \phi^{-2k} - (\phi^{-4n+2} + \phi^{-4n+1})\right] \\ &= c^2 \left[2\phi^{-1} - (\phi^{-1} - \phi^{-4n+3}) - \phi^{-4n+3}\right] \\ &= c^2 \left(2\phi^{-1} - \phi^{-1}\right) \\ &= \phi^{-1}c^2. \end{aligned}$$

したがって、両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ である。 □

参考文献

[1] Bellman, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] Bellman, R.E., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] 岩本誠一,『動的計画論』, 九大出版会, 1987 年.

[4] Iwamoto, S., "The Golden trinity — optimility, inequality, identity —,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録, 2006 年, pp.1–14.

[5] 岩本誠一: 最適経路 — フィボナッチから黄金へ —, 不確実性下における意思決定問題, 京大数理研講究録, 1734, 2011 年, pp.196–204.

[6] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之,「ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 2/3 号, 2009 年, pp.1–22.

[7] Iwamoto, S. and Kira, A., "The Fibonacci complementary duality in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.

[8] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes," Ed. Elaydi, S., Nishimura, K., Shishikura, M. and Tose, N., *Advanced Studies in Pure Mathematics* Vol.53, Advances in Discrete Dynamic Systems, 2009, pp.77–86.

[9] Kira, A. and Iwamoto, S., "Golden complementary dual in quadratic optimization," Modeling Decisions for Artificial Intelligence, *Proceedings of the Fifth Intl. Confernece (MDAI 2008)*, Barcelona, 2008. Eds. Torra, V. and Narukawa, Y., Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.