

# プロジェクタと配布教材との連携による 2重積分に関する授業の試み

工学院大学・基礎教養教育部門

北原 清志 (Kiyoshi Kitahara)

Division of Liberal Arts,

Kogakuin University

東邦大学・薬学部

高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Faculty of Pharmaceutical Sciences,

Toho University

## 1 はじめに

本研究の目的は、大学または高等専門学校での数学教育において、図入り教材のもつ役割・効果・意味などについて考察し、数学的認識や理解の特徴を教育的視点から分析することにより、教育効果の高い教材を作成するための指針を、具体的な教材例を用いた研究授業を通して探究することである。

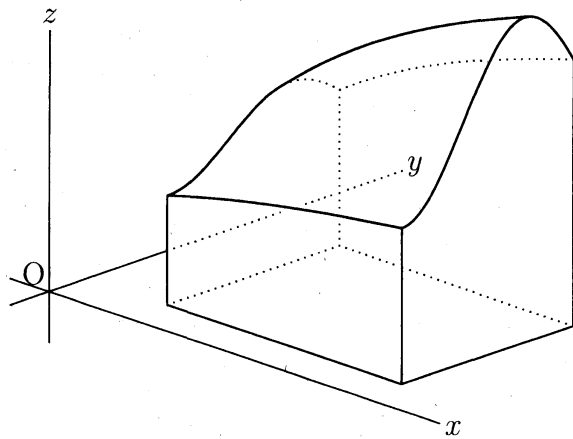
扱う単元は多変数関数の重積分であり、導入部分の授業での試みである。教員によるプロジェクタを用いた説明と学生が行う作業で約 60 分を使い、その後、演習問題を約 30 分かけて解く。2 変数関数の 2 重積分と累次積分について、 $\text{KpTpic}$  で描いた 3 次元図をプロジェクタで投影し、説明と短い質問を織り交ぜながら授業を進める。学生の手元にはプリントが配布されており、プロジェクタによる投影図の主要なものが同じ形で印刷されている。学生は説明の進行とともに、プロジェクタによる投影図とプリントの図を比較対照しながら、指示された内容と質問の答えをプリント内に書き込んでゆく。こうして授業終了後は豊かな情報を含んだ教材が学生の手によって作成されることになる。また、プロジェクタによる説明を漫然と眺めるのではなく、手を動かす作業を通じて主体的に授業に参加することが求められる。

図形はすべて  $\text{KpTpic}$  を用いて描いている。 $\text{KpTpic}$  は単色線画を基本とした描画機能を持ち、精度の高い出力が可能である。線画の特徴を生かしたシンプルで情報量を抑えた表現により、初心者にとって全体像を把握しやすく、グラフの特徴へ自然と注意が向くような画像を生成することができる。

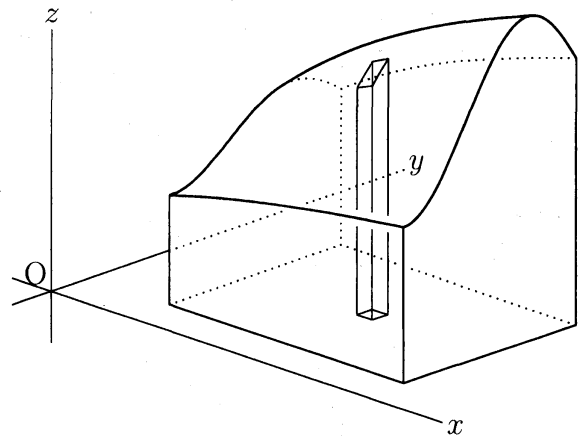
以下、第 2 節と第 3 節で授業内容の報告を行い、第 4 節で数学概念を表現するグラフと図形の役割に言及し、第 5 節でまとめと今後の課題を述べる。

## 2 底面 $D$ が長方形の場合

### 2.1 2重積分による体積の計算



$D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$   
 図1 上面  $z = f(x, y)$  と底面  $D$  の立体



細い柱の体積  $dV \equiv f(x, y) dx dy$   
 図2 点  $(x, y)$  に立つ底面積  $dx dy$  の細柱

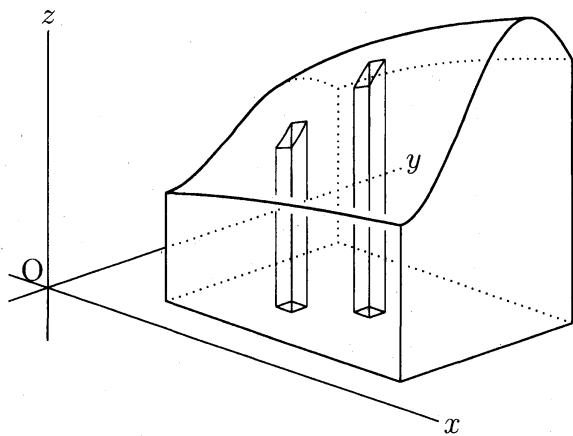


図3 細い柱を他の場所にも作る

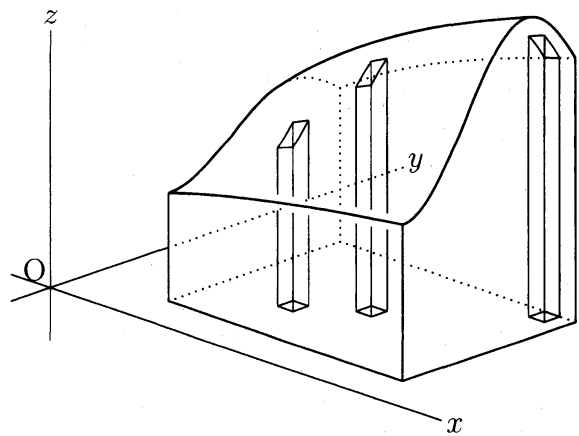


図4 細い柱をさらに作る

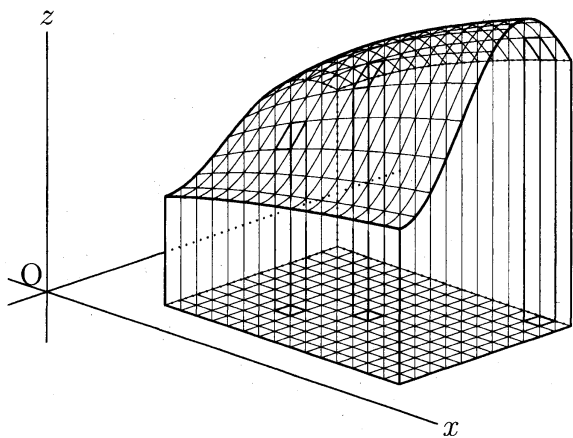


図5 細い柱で立体を埋めつくす

細い柱の体積  $dV \equiv f(x, y) dx dy$   
 $\downarrow$   
 細い柱の体積をすべて加える  
 $\downarrow$   
 微小底面積  $dx dy \rightarrow 0$  とする  
 $\downarrow$   
 立体の体積  $V = \iint_D f(x, y) dx dy$   
 この積分を **2重積分** という

2.2 累次積分による体積の計算

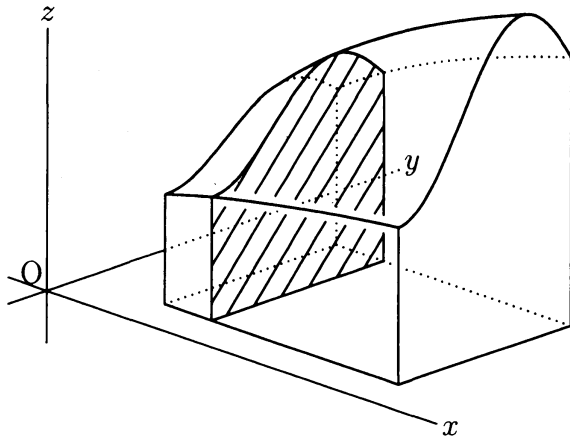


図6  $x$  軸に垂直な面 ( $x = x_1$ ) での切断

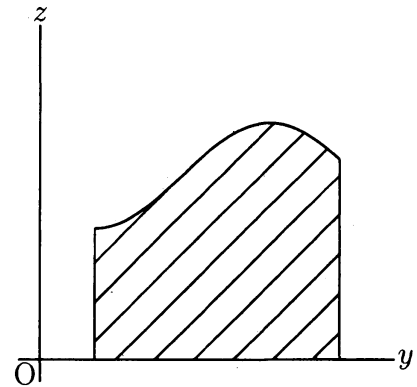


図7 切断面を真横から見る

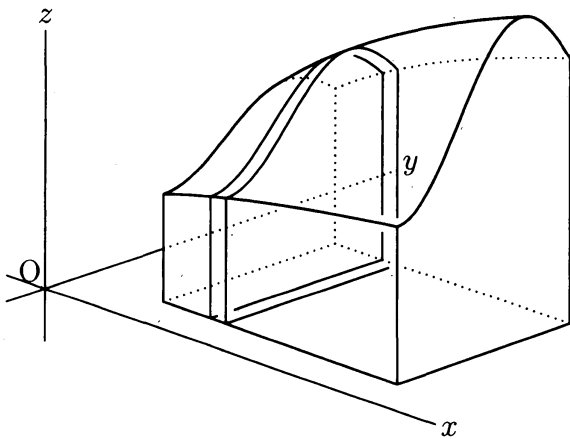


図8 厚み  $dx_1$  の薄い立体を切り出す

図7の切断面の面積は

$$S(x_1) = \int_c^d f(x_1, y) dy$$

図8の薄い立体の体積は

$$dV_1 = S(x_1) dx_1$$

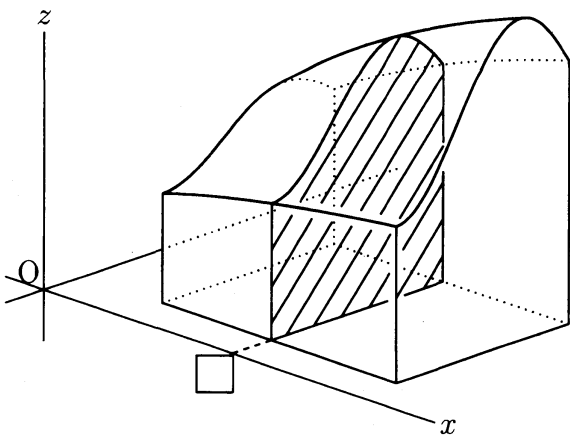


図9  $x$  軸に垂直な面 ( $x = x_2$ ) での切断

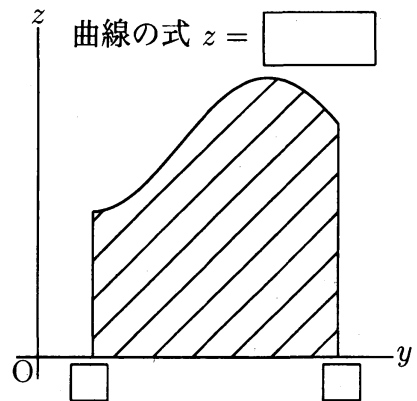


図10 切断面を真横から見る

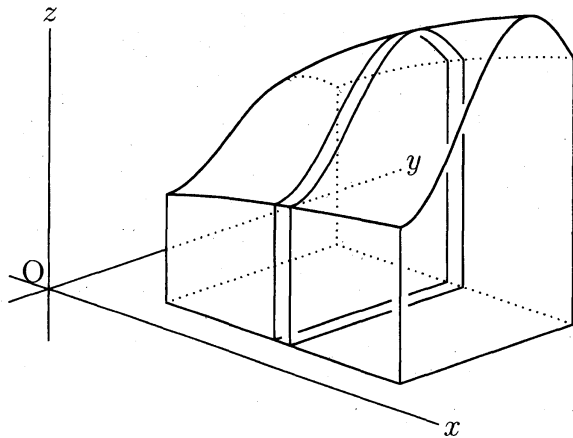


図11 厚み  $dx_2$  の薄い立体を切り出す

図10の切断面の面積は

$$S(x_2) = \int_c^d f(x_2, y) dy$$

図11の薄い立体の体積は

$$dV_2 \doteq S(x_2) dx_2$$

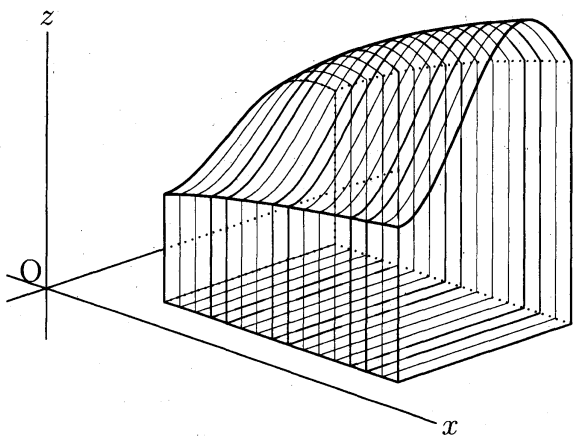


図12 薄い板で立体を埋めつくす

場所  $x$  での断面積

$$S(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

↓

厚み  $dx$  の薄い立体の体積

$$dV \doteq S(x) dx$$

↓

$dV$  を  $x = a$  から  $x = b$  まで加える

↓

厚み  $dx \rightarrow 0$  とする

↓

立体の体積

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

$$\text{立体の体積 } V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$$

これを累次積分 (繰返し積分) という。この式は  $y$  に付いて先に積分する方法である。

**問題 1** 下の図を参考にして、次の空欄を埋めなさい。

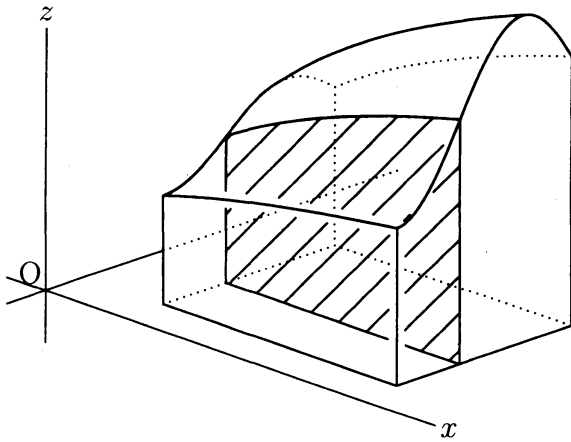


図 13  $y$  軸に垂直な面 (場所  $y$ ) での切断

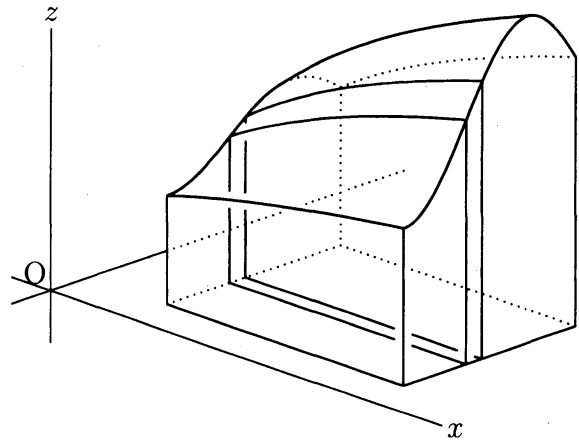


図 14 厚み  $dy$  の薄い立体を切り出す

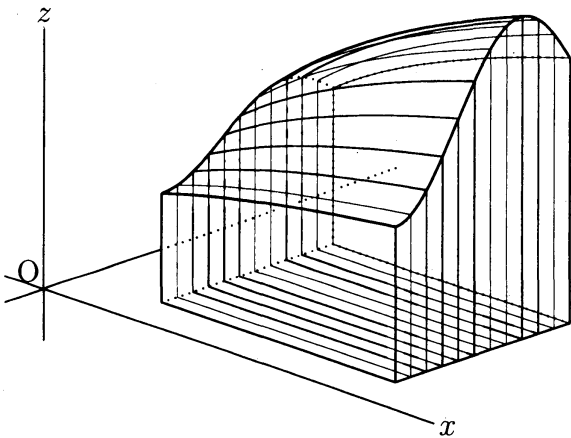


図 15 薄い板で立体を埋めつくす

場所  $y$  での断面の面積は  
 $S(y) =$    
 $\downarrow$   
 厚み  $dy$  の薄い立体の体積は  
 $dV \equiv S(y) dy$

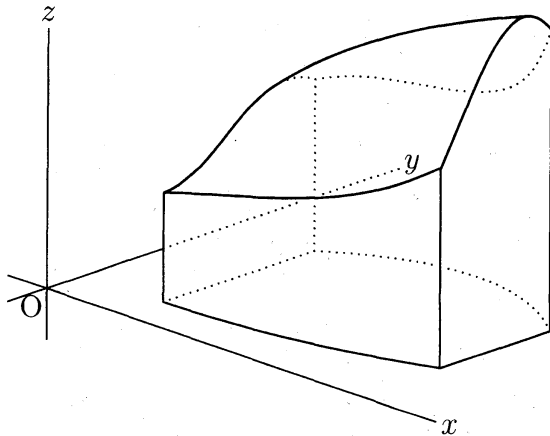
$dV$  を  $y = c$  から  $y = d$  まで加えて  $dy \rightarrow 0$  とすると

立体の体積  $V =$    $=$

これを累次積分 (繰り返し積分) という。  $x$  に付いて先に積分する方法である。

### 3 底面 $D$ が複雑な場合

3.1 2重積分による体積の計算



$D: a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)$   
 図16 底面  $D$  が複雑な形の場合

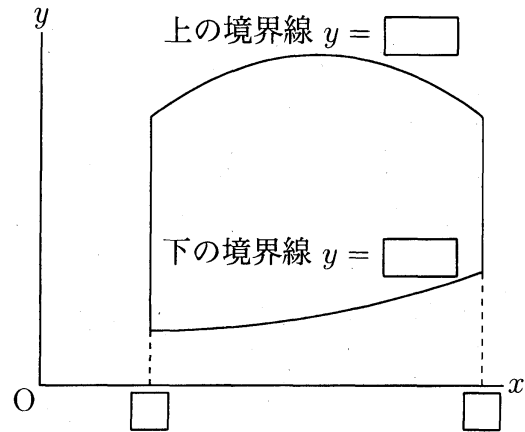


図17 真上から見下ろした図

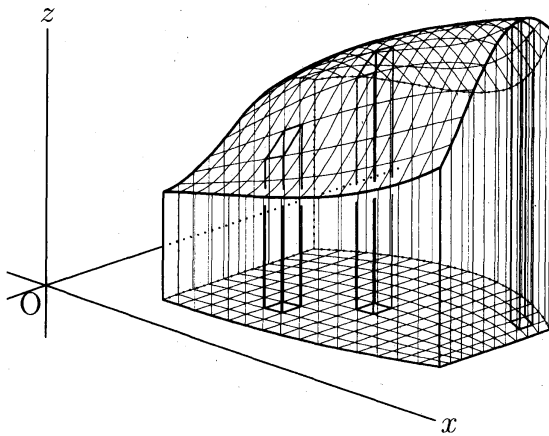


図18 細い柱で立体を埋めつくす

細い柱の体積  $dV \doteq f(x, y) dx dy$

↓

細い柱の体積をすべて加える

↓

微小底面積  $dxdy \rightarrow 0$  とする

↓

立体の体積  $V = \iint_D f(x, y) dx dy$

この積分を2重積分という。

3.2 累次積分による体積の計算

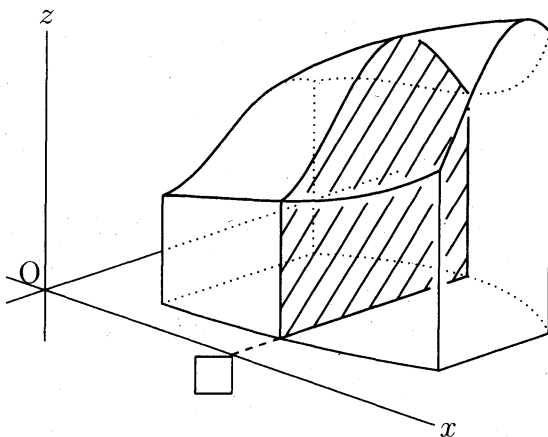


図19  $x$  軸に垂直な面 ( $x = x_2$ ) での切断

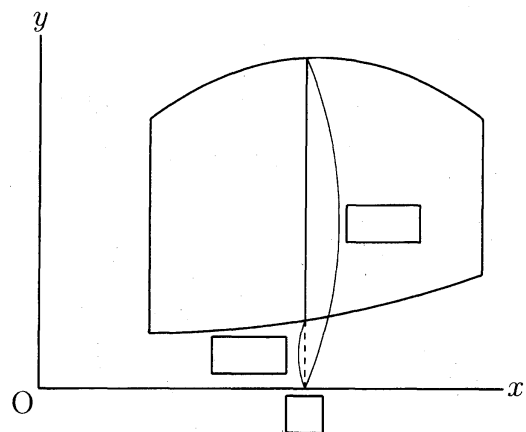


図17' 切断面を真上から見る

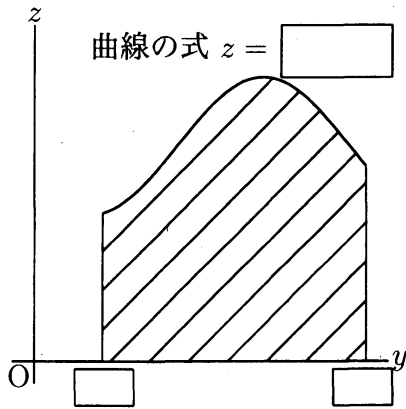


図 20 切断面を真横から見る

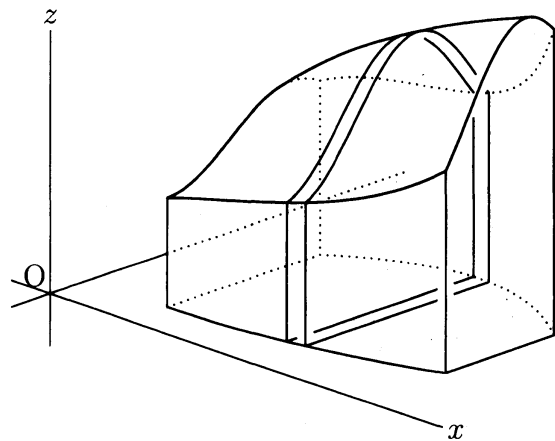


図 21 厚み  $dx_2$  の薄い立体を切り出す

切断面の面積： $S(x_2) = \int_{\text{[ ]}}^{\text{[ ]}} f(x_2, y) dy$

薄い立体の体積： $dV_2 \doteq S(x_2) dx_2$

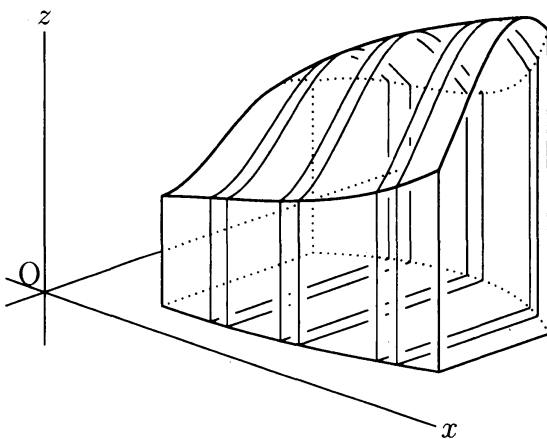


図 23 いくつかの薄い板を作る

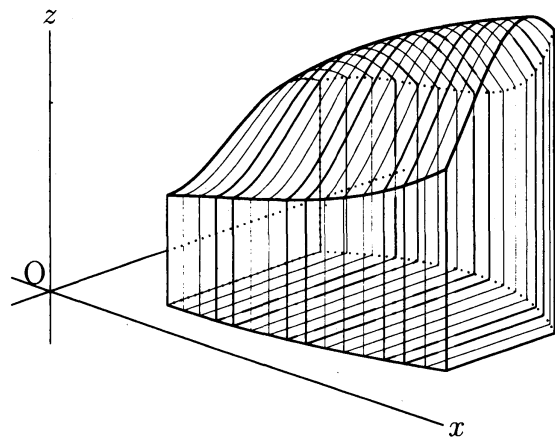


図 24 薄い板で立体を埋めつくす

場所  $x$  での断面積： $S(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$       $x$  は固定して  $y$  に付いて積分

↓

厚み  $dx$  の薄い立体の体積： $dV \doteq S(x) dx$

↓

$dV$  を  $x = a$  から  $x = b$  まで加えて、厚み  $dx \rightarrow 0$  とする

↓

立体の体積  $V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right\} dx$

## 4 グラフと関連図形の役割

大学または高等専門学校の数学教育において、数学概念を表現するグラフと関連図形の役割について、次の6点を指摘しておこう。

### 1. 注意の喚起と集中

グラフや図形は細部を気にとめる必要がないので注意を喚起しやすく、興味を引けば持続的に注意を留めさせることができる。注意を集中するという点については、グラフや図形が現在扱っている問題を適度な情報によって明示的に表現していることが重要である。たとえ厳密な表示であったとしても情報過多な表現は却って中心課題を見失わせる。また、注意の喚起が起こるタイミングは人によって違い、状況の変化に応じて何度でも起こる。

### 2. 客観的で正確な状況把握

正確なグラフや図形によって現在の問題に対する客観的で誤解のない認識が得られる。グラフや図形は具体的な対象の表示なので、問題に対する主観的な思い込みによる誤解を修正する働きをもつ。グラフや図形を見誤る可能性もあるので、誤解を与えやすい表現はどのようなものかを学生との対話を通じて常に把握する必要がある。

### 3. 数値情報や式情報の意味の認識と確認

グラフや図形と関連させて記述された数値や式は、具体物との結び付きが強いので理解されやすい。説明の必要すらないことも多いが、図形と数字・文字などの配置には十分な配慮が必要である。

### 4. 理論への橋渡し

グラフや図形は象徴記号の側面を持ち、数学概念を獲得するための道具として働く。象徴記号から数学概念が得られる過程は十分に分析する必要がある。

### 5. 数学概念の統合的認識と理解

グラフや図形によって、複数の概念が相互に有機的な関連性をもったまとまりとして理解される可能性がある。なぜなら、グラフや図形が完成された形で提示されるためには、複数の概念の統合が必要だからである。

### 6. 強い印象付けによる長期記憶への定着

概念を適切に表現したグラフや図形は、見るものに強いインパクトを与え、細部の印象は薄れても大枠の印象は残りやすい。プリント等の配布によって学生が手元で反復参照できる環境を作ることにより長期記憶への定着が期待される。

## 5 まとめと今後の課題

今回は配布教材とプロジェクタを併用する方法の発展形として、2重積分と累次積分に関する話題を扱った。学生の反応は良好であったが、問題を解いて正解する学生が増加



するまでには至っていない。しかし、「2重積分や累次積分のイメージがはっきりしたか」というアンケートに対しては「たいへんにはっきりした」が少数いて「少しイメージが持てた」が多数を占め「あまりはっきりしなかった」と「イメージが持てなかった」は僅かであった。配布教材中に様々な情報を書き込んでゆくというやり方は、授業の雰囲気、また「学生が一方的な聞き手にならず自ら考えながら授業に参加できるので良かった」という主旨の感想などから、今後も活用すべき方法であると考えられる。

数学概念の獲得に関与するグラフや図形の役割については、今後の研究の方向性を探る意味でまとめてみた。これについては、グラフや図形を提供する側からの見方と、受け取る側からの見方の2つの視点が求められるが、少なくともここに挙げた6点については継続して内容を掘り下げることが重要である。

## 参考文献

- [1] 北原清志, 高遠節夫: 「図表示された曲面の理解度調査報告」, 京都大学数理解析研究所講究録 1780 「数学ソフトウェアと教育」, pp.141-153, 2012
- [2] 北原清志, 高遠節夫: 「極値問題の図表示と曲面の形状把握に関する調査」, 京都大学数理解析研究所講究録 1735 「数式処理と教育」, pp.162-172, 2011
- [3] 山下哲, 高遠節夫: 「Making Materials based on Symbolic Thinking and Mathematical Understanding (Symbolic Thinking に基づく教材作成と数学の理解)」, 京都大学数理解析研究所講究録 1735 「数式処理と教育」, pp.173-180, 2011
- [4] CASTeX 応用研究会編, 『 $\text{K}_E\text{Tpic}$  で楽々  $\text{T}_E\text{X}$  グラフ』, イーテキスト研究所 (ISBN978-4-904013-07-6), 2011
- [5] Kitahara K., Abe T., Kaneko M., Yamashita S., & Takato S.: "Towards a More Effective Use of 3D-Graphics in Mathematics Education —Utilization of  $\text{K}_E\text{Tpic}$  to Insert Figures into LATEX Documents—", to appear in The International Journal for Technology in Mathematics Education, Vol. 17, Number 4, 2010
- [6] 金子真隆, 阿部孝之, 泉源, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 「線形代数学の教科書における挿図の利用について — $\text{K}_E\text{Tpic}$  利用の可能性を中心に—」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674 「数式処理と教育」, pp.12-25, 2010
- [7] 北原清志, 高遠節夫: 「全微分に関する図入り教材の作成例とその研究授業報告」, 京都大学数理解析研究所講究録 1674 「数式処理と教育」, pp.132-145, 2010
- [8] 北原清志, 高遠節夫: 「級数を扱う授業における  $\text{K}_E\text{Tpic}$  で作成した挿図教材の使用」, 京都大学数理解析研究所講究録 1624, pp.90-105, 2009
- [9] 出原栄一, 吉田武夫, 渥美浩章: 図の体系, 日科技連出版, 1986