数理解析研究所講究録
第1867巻 2013年 131-138

1. 学校数学における具体例の背景にある数学

中部大学現代教育学部　金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education
Chubu University

§1. はじめに

一口に数学者といっても, 色々な研究者がいる. ある本で, 数学者のタイプに「研究課題を見つけることが上手い人」,「問題を解くことが得意な人」「数学の雑然とした状況で論理的に強く, 分類・整理することが上手な人」など多種類の数学者がいると記載してあり, どのタイプの研究者も必要であるという内容のことを読んだことがある.

また, 飯高茂の数学セミナーの記事で「良い3つの例があれば一つの定理ができる場合がある」という内容を読んだ記憶がある.

これらのことを意識して数学の教科書や大学入試問題などから, それらの内容の背景となっている数学について述べてみる.

§2. 累乗和に関する内容の背景

[9] においては, 解き方について「学ぶ」だけではなく「発見」しようとする態度を身に付ける必要があり, 多少時間をかけて考える・作業することが不可欠であると述べてある.

問題 0以上の整数kに対し, $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$とおく.
(1) 等式$(n+1)^5=1+\sum_{k=0}^{4}{}_5C_kS_k(n)$がすべての正の整数$n$について成り立つことを示せ.
(2) nの5次多項式(整式)として$S_k(n)$を求めよ. [平成7年度　名古屋大学入試問題]

[略解] (1) 二項定理から, $(1+p)^5-p^5={}_5C_0+{}_5C_1p+{}_5C_2p^2+{}_5C_3p^3+{}_5C_4p^4$.
この式の$p=1$からnまでの和を取り, $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$で置き換えると,
$\sum_{p=1}^{n}\{(1+p)^5-p^5\}=\sum_{k=0}^{4}{}_5C_kS_k(n)$. この左辺を計算すると, $(n+1)^5-1$. これより,
$(n+1)^5=1+\sum_{k=0}^{4}{}_5C_kS_k(n)$.

(2) (1) より,

$${}_5C_4S_4(n)=(n+1)^5-1-{}_5C_0S_0(n)-{}_5C_1S_1(n)-{}_5C_2S_2(n)-{}_5C_3S_3(n).$$

ここに, $S_0(n)=n, S_1(n)=\frac{1}{2}n(n+1), S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), S_3(n)=\{\frac{1}{2}n(n+1)\}^2$ を代入して整理すると,

$$S_4(n)=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$ [解終了]

最初述べたように解いただけで満足せず立ち止まって考察してみよう ([9] を参照).

中学数学で学習する放物線 $y=x^2$ 上には上記の点 $(S_1(n),S_3(n))$ が存在する. 点 $(S_1(n),S_2(n))$ は 3 次曲線 $8x^3+x^2-9y^2=0$ 上にある. 点 $(S_2(n),S_3(n))$ は x,y に関する 4 次曲線上にある.

$S_4(n)$ の最高次の係数は $\frac{1}{5}=$ 整数 $\div\ 5!$ となり代数曲線, 局所環や半群の重複度に発展していく. また, $S_k(n)$ は n に関して次数が $k+1$ の整式であり, n^{k-2} 次の項は出てこない. また $S_k(n)$ は ${}_nC_0,{}_nC_1,{}_nC_2,\cdots,{}_nC_{k+1}$ の整数倍の和 (1 次結合) になる. これは逆に高校数学の数学的帰納法の演習問題になる.

§3. 乗法公式と不等式の関係と素因数分解の背景

乗法公式は因数分解に利用されるが, 不等式にも利用される. [3] の第 1 章の演習問題から考えて見る. この教科書では問題が与えられているが, この問題から感覚的に背景を見出すことや問題そのものを作成する力量が期待される.

良く知られている乗法公式 : $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ の応用として, 問いにあるように次の不等式が背景として見える.

a,b,c を正の数とするとき, $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$. これは 2 乗和 $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ より出てくる.

更に a,b,c を正の数とするとき, $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}$ がいえる.

$13\times 7=91$ だから, 91 の素因数分解の背景として, $10a+b$ $(1\leqq a\leqq 9, 0\leqq b\leqq 9)$ の形の数は, $a-9b$ が 13 の倍数なら, $10a+b$ は 13 の倍数である.

何故なら, $a-9b=13m$ とすると, $10a+b=10(13m+9b)+b=130m+91b=13(10m+7b)$ より, $10a+b$ は 13 の倍数である. 背景として $91=13\times 7$ なる 2 つの素数の積である素因数分解がある. 7 の倍数でも同様のことがいえる.

§4. 連立方程式の背景としての統計

連立 2 次方程式 $A+C=2, A^2+C^2=20$ を解いてみよう. 良く知られているように, $A^2+C^2=(A+C)^2-2AC$ だから, $4=(A+C)^2=20+2AC$. 故に, $AC=-8$. A と C の和と積が与えられたから, A, C を 2 つの解として持つ 2 次方程式は, $t^2-2t-8=0$. よって $A=-2, C=4$.

この連立 2 次方程式の応用・背景として, 平成 7 年度の宮崎大学の教育学部中数の入試問題 [聖文社編, 平成 7 年度全国大学数学入試問題詳解 1995 年より] に出ている統計の内容がある.

題材例. 7 人の生徒の身長を調べたところ, それぞれの身長は
$a, b, c, 162, 170, 172, 173(cm)$
で, 7 人の平均は 170(cm), 標準偏差は, $\sqrt{14}$(cm) であった. このとき, 次の各問に答えよ.
(1) $a+b+c$ の値を求めよ.
(2) $(a-170)^2+(b-170)^2+(c-170)^2$ の値を求めよ.
(3) 7 人が身長の高い順に並んだとき, ちょうどまん中の生徒の身長は 171(cm) であった. このとき, a, b, c の値を求めよ. ただし, $a<b<c$ とする.

解答は, (1) は良く知られているように次式で求まる. 小学生に対する言葉で言えば, 「いくつかの数量を, 同じ大きさになるようにならしたものを平均」という. 学習指導要領算数編の第 6 学年 2 内容の D 数量関係の (4) に「資料の平均や散らばりを調べ, 統計的に考察したり表現したりすることができるようにする」とあり, そのアに「資料の平均について知ること」と記述してある. 小学校からこのように平均や散らばりについては学習するようになっている. 平均＝全体の合計÷個数の式から, 平均を m とすると, $(a-m)+(b-m)+\cdots+(c-m)=0$. これより今の場合既知である平均からの差を考えると, $(a-170)+(b-170)+(c-170)+(162-170)+(170-170)+(172-170)+(173-170)=0$. これを整理すると, $a+b+c=513$ となる.

上記で見たことをまとめると, (データの数値) − (平均値) を偏差というから. (偏差) = (平均値) − (データの数値) となる.

(2) バラつきの大きさを示す分散 s^2 も良く知られている. n 個のデータ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ の分散は $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. 但し, $\overline{x}$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均とする. この平方根 s を, 単位を元に戻すために使用し標準偏差ということは良く知られている. 良く使用される偏差値とは, 各回ごとに点数を相互に比較して基準化したもので, (偏差値) = ((点数−平均値) ÷ 標準偏差) × 10 + 50 である.

$\frac{1}{7}((a-170)^2+(b-170)^2+(c-170)^2+(162-170)^2+(170-170)^2+(172-170)^2+(173-170)^2) = 14$. $(a-170)^2+(b-170)^2+(c-170)^2 = 21$.

(3) 題意より, $a \neq 171, c \neq 171$ だから, $b = 171$. (1) より, $a+171+c = 513$. 故に, $(a-170)+(c-170) = 2$.
(2) より, $(a-170)^2+1+(c-170)^2 = 21$. 故に, $(a-170)^2+(c-170)^2 = 20$. ここで, $A = a-170, C = c-170$ と置くと, $A+C = 2, A^2+C^2 = 20$. この連立方程式を解くと, 条件 $a < c$ だから, $A < C$. よって, $A = -2, C = 4$. これより, $a = 168, b = 171, c = 174(cm)$ となる.

このように, 連立方程式の問題が, その背景に, 統計の平均, 分散, 中央値 (メディアン) などが含まれた問題となる. 繰り返しになるが, 小学生で扱う言葉で述べてみる. データの特徴や傾向を表す代表値には, 平均値, モード (最頻値), メディアンの 3 つがある. データの個数が奇数なら, データを小さい順に並べた真ん中のデータを, 偶数なら真ん中の二つの平均を中央値にする. モードはデータの個数が最も多い値のことで, 最も多い値が 2 つ以上あるときはモードを出すことはできない. 中央値や範囲は簡略にデータを知りたいときに便利が良いことが良く知られている.

数字の幅が広く, データの個数が多いときは, 代表値を探すのが難しい. このときには度数分布表を使用して, 集団の特徴を捉える.

度数分布表からヒストグラムを作成し, 階級の幅を極限まで小さくすると, 滑らかな曲線 (分布曲線) になる. この考えは面積を求めるときの定積分と共通の内容が含まれている.

良く知られているように, 平均値の回りの k 次の中心積率 (モーメント) とは, $M_k = \dfrac{\sum(x_i - \overline{x})^k}{N}$ のことをいう. N は資料の個数とする. これは積分表示でも与えられる.

分布が平均値に関して対称なら奇数次の中心積率は0となり, 3次の中心積率は歪度に, 4次の中心積率は尖度と関連している.

小学校では「統計」という言葉は使用されずに, 「資料の整理と読み」という言葉が使用されている. 目的にあった資料を収集して, それを分類整理し, 表やグラフ(棒グラフ・折れ線グラフ・円グラフ・帯グラフ)にしたり, 数値化して, 資料の特徴や傾向を調べる. 柱状グラフはヒストグラムとも呼ばれて, 大学生から頻繁に「棒グラフと柱状グラフの違いは何ですか?」という質問が出てくる. この相違は, 柱状グラフは棒と棒の間が無く, 各階級の幅と度数の面積を表現していることである.

日本数学教育学会研究部小学部会([5])によれば, 「学習指導要領では, 言葉や数, 式, 表, グラフなどを用いた思考力・表現力を重視するために, 低学年から『数量関係』領域が設けられている. 数量関係の主な内容である『関数の考え』『式の表現と読み』『資料の整理と読み』が1年生から示されたことで発達段階を考慮して系統的に指導することがねらわれている」. 「低学年から資料を分類整理し, 表やグラフに表現することで, その関係が ••• 」. 「低学年からの系統的な資料の整理と読みの研究」「資料の特徴や傾向を読み取る学習に関する研究」「資料の調べ方を活用する学習に関する研究」を研究課題としてあげている.

§5. 数式 $37 \times 6 = 222$ の背景にある考え

子どもと教師, 教材の三つは授業トライアングルとして重要視されている. ここでは, 橋本吉彦・坪田耕三・池田敏和共著の[1]から授業研究を中心に算数・数学教育について述べてみよう.

フロイデンタールは, 「子どもが自分で発見できるような秘密を, すべて教師が話してしまうことは, 悪い教え方というよりむしろ罪悪である」と述べている([4]).

子どもからの問いが生ずるように仕掛けをして, 子どもが動き出す方向を認める. この例として次のような例を, [1]では挙げてある.

例. $37 \times 6 = 222, 37 \times 9 = 333, 37 \times 12 = \cdots$ を子どもに与える. 子どもは, $37 \times 12 = 444$ を予想・確認し奇麗に数字が並ぶことに驚く. ここでの教師の配慮は, 単純な場合である $37 \times 3 = 111$ を残しておくことである.

この背景は, $37 \times 3n = 111n$ であり, $n = 1, 2, \cdots, 9$ まで同じ数字の3桁になる. $37 \times 27 =$ までこの状況が続く.

フロイデンタールの言葉のように, $37 \times 3 = 111$ を残すことは教師の心すべき態度と思われる.

§6. 心理学者 C. スケンプの著書「数学学習の心理学」([8]) の紹介

算数・数学教育の研究では, 数学出身者の研究者が少ないのに比較して, 心理学研究者が多いのは注目に値すると思われる. 児童・生徒の理解は心理学者が卓越しているのは当然のことであるので不思議ではないのだが. 数学者の持つべき感覚として, 心理学者・算数数学教育専門の研究者から学ばなければならない感覚があるようである. そこで心理学者の算数・数学教育の考察の例を見てみよう.

小学生が長方形の「たて」という辺を「高さ」として捉えることができていない児童が多いのではないかと, 明治学院大学の心理学部所属の辻宏子は [10] で述べ, 平行四辺形の高さの捉え方等の考察を行っている.

また数学者でもあり, 心理学者でもある (更にはこの2つの領域の教授法の専門家でもある) R.R. スケンプの著書 [8] から印象に残った部分の紹介をしてみよう.

○ 数学は役に立たないと多くの人達から聞くことがある. これに対してスケンプは以下のようにその反論を述べている.

数学の抽象性の効用は潜在的である. 学校時代に数学を学ぶための苦労を重ねた人々の多くが, 何の利益も数学から引き出すことはできず, 楽しみを見出すこともなかった. 理由はこれらの人々が, 真の意味での数学を全く学ばなかったためである. 真に数学を学ぶのは興味深く楽しい過程である. 多くの生徒・学生に強制されているのは無意味な記号を無数の棒暗記した規則に従って操作する技術にすぎない. これは無意味のためうんざりするばかりか, 難事でもある. 無関係な規則の集合は, うまく統合された概念構造にくらべて記憶に負担をかけるからである.

○ また数学の特性をスケンプは次のように記載している.

日常経験の多くは, 環境によって直接獲得され, そこに含まれる概念はあまり抽象度は高くない. 数学は高度の一般性と抽象性を持っている. これは知的な人々が世代から世代へと一般化と抽象化への努力を重ねることによって, ようやく達成された. 現代の数学の学習者は, 生のデータで

はなく, 現存する数学のデータ処理体系そのものを身に付ける必要がある. 有能な学生は, 数年間のうちに, 過去何世紀も費やして発展してきたアイデアを習得して, 数学者や数学の著書・論文を通じて (環境から直接学ぶのではなく) 間接的に学習できるだけである.

○ スケンプの数学の伝達者に関する考えを記載して見よう.

(1) すでに持っている概念より高次の概念は, 単なる定義によっては理解できない. 唯一の方法は, 適切な範例の集合を示すことである.

(2) 数学の範例は, 殆ど他の概念である. 従ってこれらの概念が既に学習者の中に形成済みであることが確認されなければならい.

これらに関連しては, [2] も参照のこと.

§7. 算数の教科書 1年生と2年生上の内容

(1) 「啓林館　わくわく さんすう 1」 ([6]) の内容

順序数, 6の和分解, 0の導入がフインランド式に始めの方で扱われている (玉入れで一つも入らない場合が 0), 形は立体から導入されている (直方体, 円柱, 球), この立体から写す絵を書いて円・四角形・三角形を導入, 加法の合併, 増加, 減法の求残から求差へ,　補数の考え, 長さ比べ, たてとよこ, 時計の文字の読み方, 3つの数の足し算・引き算, 数直線, 加法の合併, かたちづくり, 10進位取り記数法, 100までの数等。

小学校学習指導要領算数編で第1学年から, 2 内容 A　数と計算 (1) ウ に, 「数の大小や順序を考えることによって, 数の系列を作ったり, 数直線の上に表したりすること」と記述してあることは注目に値する.

(2) 「啓林館　わくわく算数 2上」 ([7]) の内容

ひょう・グラフと時計の章がある. ここでは「あそびしらべ」で棒グラフ, 度数分布表. 最頻値も質問の項があり, 言葉には出してないが内容としては組み込んである. 時計の計算などの質問がしてある. これは将来, 整数環の剰余環などに発展して離散数学の教材化の素材として有用である.

時計の計算は60進数の計算を内包している. この例が示すように, G. ガッテニューの「強調と省略」は, 時計の計算2分35秒＋5分46秒＝8

分 21 秒で 8 分を無視して 21 秒のみ強調すると秒針のみ見る場合であることを指している. 60 で整数を割って余りの計算をする同値関係である. また分数も一つの分数に幾つも同じ分数を表す表現がある. これも同値類である.

繰り返しになるが, G. ガッテニョーの「強調と省略」の例である.

参考文献

[1] 橋本吉彦・坪田耕三・池田敏和, 今, なぜ授業研究か一算数授業の再構築一, 東洋館出版社, 2003 年

[2] 石田忠男, 算数・数学『教授＝学習』過程における表現体系の研究 (IV) 一記号的表現の特性とその役割について一 (岩合一男先生退官記念出版会編, 数学教育学の新展開, 聖文社 1992 年), 186-199

[3] 川中宣明ほか 14 名, 数学 II, 数研出版株式会社, 2007 年

[4] 古藤怜・池野正晴他, 豊かな発想をはぐくむ新しい算数学習 Do Math の指導, 東洋館出版社, 2010 年

[5] 日本数学教育学会研究部小学校部会, 第 94 回全国算数・数学教育研究 (福岡) 大会基調発表, 日本数学教育学会 第 94 巻 第 2 号 (2012), 21-37

[6] 清水静海・船越俊介他 50 名, わくわく さんすう 1, 啓林館, 2011 年

[7] 清水静海・船越俊介他 50 名, わくわく さんすう 2 上, 啓林館, 2011 年

[8] R.R. スケンプ著 [藤永保・銀林浩訳], 数学学習の心理学, 新曜社, 1973 年

[9] 鈴木将史・小谷健司・橋本行洋・石戸谷公直・金光三男, 愛知教育大学ブックレット 数学の小箱, 愛知教育大学出版会, 2007 年

[10] 辻宏子, 平行四辺形の求積問題の解決にみる子どもの「高さ」の理解, 日本数学教育学会誌, 第 94 巻 第 4 号 (2012), 2-11