数理解析研究所講究録
第1870巻2013年154-172

非可換ホール=リトルウッド対称関数について

三橋秀生 (宇都宮大学・教育)
森田英章 (室蘭工業大学・工)

1 概要

ホール=リトルウッド対称関数 (H-L 関数) [8, III] の非可換化について論じる. この点については, すでにそれぞれの観点からいくつか研究が行われているが [1], [3] etc, 本稿では別の視点から論を進める. H-L 関数の非可換化とは, 非可換対称関数環 [6] において, H-L 関数と類似の立場にある関数を構成することである. H-L 関数

$$P_{\lambda}(x;q)$$

は自然数の分割 λ によって添字付けられた対称関数である. 記法からも分かる通り, 助変数 q を一つもち, $q=0$ のときシュアー (Schur) 関数, $q=1$ では単項対称関数となる. ここで

類似の立場にある関数

の意味するところは, 例えば, 非可換対称関数環においてシュアー関数の役割を果たす関数と, 単項対称関数の役割を果たす関数があった場合に, それらを補間するような助変数付きの非可換対称関数のことである. 実際, テヴリン (L. Tevlin)[11] は, この点に問題を特化して, H-L 関数の非可換化を構成している. 本稿では, その他にも非可換化の指針とすべき性質に触れる. 例えば,

ヘッケ環

を用いて構成できる点 [2] や,

ロドリゲス (Rodrigues) の公式

で記述される点 [4] などである. 実際, イヴェール (F. Hivert)[3] は前者の観点から非可換化を構成し, ベルジェロン (N. Bergeron) とザブロッキ (M. Zabrocki)[1] は後者の観点から非可換化を施している. 本節後段で改めて論じるが, これらは同時にシュアー関数と完全対称関数を補間するものになっている. 冒頭ではシュアー関数と単項対称関数を補間すると述べたが, ここではシュアー関数と完全対称関数を補間するとしている. 実は, ここであげた両者の結果 [1, 3] は, テヴリン [11] とは異なり, $P_{\lambda}=P_{\lambda}(x;q)$ のホール=リトルウッド内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HL}}$ [8, p. 225] に関する双対をとった上で, ある変数変換を施したものを取り扱っている. その変数変換を

という. 係数を適切に拡張すれば, 対称関数 $f(x)$ はベキ和対称関数 p_i $(i \geq 1)$ を変数とする多項式でかける. そこで $f(x)$ を p_i の多項式に表した上で, 変数の p_i を $p_i/(1-q^i)$ に置き換える. これをプレシズム代入とよび, その結果 $f(x)$ から生じる対称関数を

$$f\left(\frac{x}{1-q}\right)$$

で表す.

H-L 関数 $P_\lambda(x;q)$ の双対を $Q_\mu(x;q)$ で表す. μ は分割である : $\langle P_\lambda(x;q), Q_\mu(x;q)\rangle_{\mathrm{HL}} = \delta_{\lambda\mu}$. ただし, δ はクロネッカーのデルタを表す. 双対 $Q_\mu(x;q)$ にプレシズム代入を施して得られる対称関数を

$$Q'_\mu(x;q)$$

で表す. この対称関数は次の仕方で対称群のスプリンガー加群と密接な関連をもつ. n 次対称群 S_n のスプリンガー加群

$$R_\mu$$

は, n の分割 $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_l)$ に対して定まる次数付き S_n-加群である. 次数を考慮しなければ, これはヤング部分群 $S_\mu = S_{\mu_1}\times\cdots\times S_{\mu_l}$ の自明表現から誘導される S_n 表現と同値である. 斉次空間分解を $\bigoplus_{d=0}^{n(\mu)} R_\mu^d$ とする. このとき, R_μ^0 は S_n の自明表現 $\mathbf{C}$ を与え, 最高次の空間 $R_\mu^{n(\mu)}$ は μ で添字付けられる S_n の既約加群

$$L_\mu$$

となる. ただし, $n(\mu)=\sum_{i\geq 1}(i-1)\mu_i$ である. 対称関数 $Q'_\mu(x;q)$ は q を変数とする多項式の形をしている. その最高次は $n(\mu)$ である. そこで q の次数に関する変換 $q^{n(\mu)}Q_\mu(x;q^{-1})$ を施し, そうして得られる対称関数を

$$\tilde{Q}'_\mu(x;q)$$

で表す. この対称関数は R_μ の次数付きフロベニウス指標 $\sum_{d\geq 0} q^d \mathrm{ch} R_\mu^d$ を与えることが知られている. ただし, ch は通常のフロベニウス特性式 [8, I, 7] を表す. 従って, $Q'_\mu(x;0)=s_\lambda$, $Q'_\mu(x;1)=h_\mu$ が従う. イヴェールやベルジェロン=ザブロッキの非可換 H-L 関数は, $Q'_\mu(x;q)$ の非可換化に相等している.

イヴェールやベルジェロン=ザブロッキの非可換 H-L 関数も, 非可換リボン・シュアー関数の一次結合で表される. 本稿では, スプリンガー加群 R_μ の表現論的・組合せ論的性質に関する情報を取り込みつつ, 非可換リボン・シュアー関数の適切な一次結合を構成し,

それを H-L 関数の非可換化と捉える. 具体的には, R_μ の次数付きフロベニウス特性式 $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ を, リボン・シュアー関数の一次結合に展開する. その展開式において, リボン・シュアー関数を非可換リボン・シュアー関数に置き換えたものを, 本稿における H-L 関数の非可換化としたい. ここでの構成法は, 若干乱暴にも思える手筋かもしれないが, 実はこれで悪くないものが作れる. このようにして作られる非可換対称関数は, 助変数 q に 1 のベキ根を代入すると,

分解公式

とよばれる性質を満たす. 可換の場合であれば, H-L 関数 $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ の分解公式は, スプリンガー加群 R_μ のある部分加群族に対する

次元の一致

を, 誘導表現を用いて解釈する際に, 最も根本的な役割を果たすものである [10]. 若干のあるいは本質的な相違をはらみつつも, イヴェールやベルジェロン=ザブロッキの非可換化も分解公式を満たすが, この点の詳細については後段に委ねる.

2 非可換対称関数環

加算無限個の記号 $\{\Lambda_i | i \geq 1\}$ で生成される次数付き自由結合的 $\mathbf{Z}$-代数 $\mathbf{Z}[\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots]$ を考える. 次数は $\deg(\Lambda_k) = k$ $(k \geq 1)$ で与える. これを非可換対称関数環とよび, その元を非可換対称関数とよぶ. ここで, 各生成元 Λ_k は k 次の非可換基本対称式とよばれる. 以下, 非可換対称関数環を

$$\mathbf{Sym}$$

で表すことにする. 可算無限個の可換な変数 $x_1, x_2, \ldots$ に対し, 可換な対称関数環

$$Sym$$

は, 基本対称関数 $e_k = \sum_{1<i_1<i_2\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ $(k \geq 1)$ で生成される: $Sym = \mathbf{Z}[e_1, e_2 \ldots]$. 見ての通り, $\mathbf{Sym}$ の定義はその非可換化を与えている.

いま, 基本対称関数 e_k $(k \geq 1)$ の生成関数 $\sum_{k\geq 0} e_k t^k$ $(e_0 = 1)$ を $E(t)$ で表せば, よく知られているように, 完全対称関数 $h_k = \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ $(k \geq 1)$ の生成関数 $H(t) = \sum_{k\geq 0} h_k t^k$ $(h_0 = 1)$ との関係は

$$H(t) = E(-t)^{-1}$$

となっている．非可換対称関数 $S_k \in \mathbf{Sym}$ $(k \geq 1)$ は，これをモチーフとして定義される．非可換基本対称式の生成関数 $\lambda(t) = \sum_{k\geq 0} \Lambda_k t^k$ $(\Lambda_0 = 1)$ を考える．ここで t は各 Λ_k と可換な不定元である．可換の場合と同様に，形式的ベキ級数

$$\sigma(t) = \lambda(-t)^{-1}$$

における t^k の係数 S_k を k 次の非可換完全対称関数とよぶ．一般に，可算無限個の記号の集合 $\{\xi_k | k \geq 1\}$（非可換半群の元と思う）と，これらおのおのと互いに可換な不定元 t が与えられたとき，ベキ級数 $\xi(t) = \sum_{k\geq 0} \xi_k t^k$ $(\xi_0 = 1)$ は可逆であることを注意しておく．実際，各 $k \geq 0$ に対して

$$\eta(t) = \sum_{k\geq 0} \eta_k t^k, \quad \eta_k = \sum_{I \in \mathrm{Comp(k)}} (-1)^{l(I)} \xi_I$$

とおくとこれが $\xi(t)$ の逆元となる．ここで Comp(k) は総和が k となる正整数列全体を表す．Comp(k) を k の組成分解という．組成分解 I に対して $l(I)$ はその長さを表す．また，$I = (i_1, i_2, \ldots, i_l)$ に対して，$\xi_I = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_l}$ とおいている．従って，k 次の非可換完全対称関数 S_k は非可換基本対称関数を用いて

$$S_k = \sum_{I \in \mathrm{Comp(k)}} (-1)^{l(I)+k} \Lambda_I$$

と表されることになる．$\mathbf{Sym}$ における次数の定め方より，S_k は斉 k 次であることがわかる．また，$\sigma(t)\lambda(-t) = \lambda(-t)\sigma(t) = 1$ より，Newton 型の公式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S_k \Lambda_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \Lambda_k S_{n-k} = 0$$

が従う．可換の場合と同様にして，代数準同形

$$\omega : \mathbf{Sym} \longrightarrow \mathbf{Sym} : \Lambda_k \longmapsto S_k \quad (k \geq 1)$$

を考えると，この公式の対称性から $\omega(S_k) = \Lambda_k$ が従う．よって，$\omega^2 = 1$ より ω は $\mathbf{Sym}$ の自己同形となり，$\{S_k | k \geq 1\}$ が $\mathbf{Sym}$ の生成系を与えることがわかる：

$$\mathbf{Sym} = \mathbf{Z}[S_1, S_2, \ldots].$$

非可換対称関数環 $\mathbf{Sym}$ は，$\{\Lambda_k\}$ や $\{S_k\}$ を生成系に持つことがわかった．従って，その基底は Λ_k らを変数とする単項式や，S_k らを変数とする単項式によって与えられるが，非可換であるがゆえに，基底の記述は可換の場合と異なり自然数の組成分解を用いて行わ

れる. 自然数の組成分解とは, 簡潔に述べれば, 自然数の分割から大小関係による縛りを取り除いたものである. 既出ではあるが, ここでもう一度細かい記号も含め整理しておく. 自然数 n に対して, n の組成分解とは, 正整数の列 $I = (i_1, \ldots, i_l)$ であって, その総和 $|I| = i_1 + \cdots + i_l$ が n となるもののことである. このとき, $I \vDash n$ と記す. n の組成分解全体のなす集合を

$$\mathrm{Comp}(n)$$

で表し, $\mathrm{Comp} = \cup_n \mathrm{Comp}(n)$ とおく. また, I が含む成分の個数を I の長さとよび, $l(I)$ で表す. ここで, 組成分解 I に対して非増大列であることを課したものが, 自然数 n の分割とよばれるものである. 従って, n の分割は n の組成分解である. ここでは, I が n の分割であることを, $I \vdash n$ で表す. 自然数 n の組成分解 $I = (i_1, \ldots, i_l)$ に対して, $\Lambda^I = \Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_l}$, $S^I = S_{i_1} \cdots S_{i_l}$ とおくと,

$$\mathbf{Sym} = \bigoplus_{I \in \mathrm{Comp}} \mathbf{Z}\Lambda^I = \bigoplus_{I \in \mathrm{Comp}} \mathbf{Z}S^I$$

となり, $\mathbf{Sym}$ の基底は組成分解を用いて記述される. また, $\mathbf{Sym}$ の斉次空間分解

$$\mathbf{Sym} = \bigoplus_n \mathbf{Sym}_n$$

において, 各斉次空間 $\mathbf{Sym}_n$ の次元は, n の組成分解の個数と一致する：

$$\dim \mathbf{Sym}_n = \sharp \mathrm{Comp}(n).$$

以上, $\mathbf{Sym}$ に対して二組の基底を与えたが, もうひと組, 有用な基底を与えておく. この基底は, 目下, 非可換の場合のシュアー関数に相等するものと目されているものである. 自然数の組成分解 $I = (i_1, \ldots, i_l)$ に対して,

$$R_I = \sum_{J \preccurlyeq I} (-1)^{l(I)-l(J)} S^J$$

とおく. これを非可換リボン・シュアー関数とよぶ. 和の範囲を定めている $J \preccurlyeq I$ という記号は, 組成分解 I が J の細分であることを意味する. すなわち, $J = (j_1, \ldots, j_k) \vDash n$ に対して, $I_i \vDash j_i$ が各 $i = 1, \ldots, k$ に対して定まり,

$$I = I_1 \bullet \cdots \bullet I_k$$

となることである. ここで, $A = (a_1, \ldots, a_r), B = (b_1, \ldots, b_s) \in \mathrm{Comp}$ に対して, $A \bullet B = (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)$ と定める. これを $A, B \in \mathrm{Comp}$ の連結積 (concatenation product)

という．例えば, $I = (2,1,3,1) \models 7$ に対して, $J \preccurlyeq I$ を満たす J は $(2,1,3,1)$, $(2,1,4)$, $(2,4,1)$, $(3,3,1)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(6,1)$, (7) の八個である．また, 定義や例からも明らかなように, $I \models n$ に対して $J \preccurlyeq I$ ならば $J \models n$ である．定義から $\{R_I | I \in \mathrm{Comp}\}$ は **Sym** の基底をなす:

$$\mathbf{Sym} = \bigoplus_{I \in \mathrm{Comp}} \mathbf{Z} R_I.$$

非可換リボン・シュアー基底 $\{R_I\}$ に関する **Sym** の構造定数は, 次のように簡単に計算することができる．連結積 $I \bullet J$ の他にもう一つ, 組成分解の間の演算を定義しておく．$I = (i_1, \dots, i_{l-1}, i_l)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ に対して

$$I | J$$

を $(i_1, i_{l-1}, i_l + j_1, j_2, \dots, j_k)$ で定める．例えば, $(1,2,1,)|(2,1,3) = (1,2,3,1,3)$ となる．このとき次が成立する：

$$R_I R_J = R_{I \bullet J} + R_{I|J}.$$

たとえば, $R_{(1,2)} R_{(1,1)} = R_{(1,2,1,1)} + R_{(1,3,1)}$ となる．

次の全射代数準同形写像を可換化とよぶことにする：

$$\gamma : \mathbf{Sym} \longrightarrow Sym : \Lambda_k \longmapsto e_k \quad (k \geq 1).$$

このとき, $\gamma(S_k) = h_k$ が任意の $k \geq 1$ に対して成り立つ．また, $\gamma(R_I)$ はリボン・シュアー関数 r_I とよばれるものとなる．リボン・シュアー関数は特別な歪 (skew) シュアー関数として定義される．さきほど, 非可換リボン・シュアー関数が, 非可換の場合のシュアー関数と目されていると述べたが, 実際はこの リボン・シュアー関数の非可換化である．無論, リボン・シュアー関数全体を考えると, Sym の生成系になってはいても, 基底にはならない．リボン・シュアー関数については, 後ほど再び扱う機会があるので, 定義も含め必要な事項は, そこで扱うことにしたい．

3 非可換ホール＝リトルウッド関数（その１）

現在までに, 非可換 H-L 対称関数として, いくつか提案されているが, ここではその中で代表的なものを紹介していく．

3.1 イヴェール

最初に H-L 関数の非可換化を文献として提出したのは イヴェール [3] である．ここでは [3] に従い, そこで提案されている H-L 関数の非可換化の構成を概観していく．ここで

の構成法の肝要な点は, 岩堀-ヘッケ環の作用を用いる点である. 可換な H-L 関数は, 岩堀-ヘッケ環

$$H_n(q)$$

の作用を用いて記述できる [2]. イヴェールによる非可換 H-L 関数の定義は, これを **Sym** において模倣したものである.

分割 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ の長さが n を越えないとする. 岩堀-ヘッケ環 $H_n(q)$ は, よく知られているように, 生成元 $T_1, \cdots, T_{n-1}$ と関係式

$$T_i^2 = (q-1)T_i + q, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}, \quad T_iT_j = T_jT_i \ (|i-j| > 1)$$

で定義される代数である. 可換変数 $x_1, \ldots, x_{n-1}$ に対して, 添字 i と $i+1$ の隣接互換 $(i, i+1)$ の作用を σ_i で表すと, $T_i = (q-1)\pi_i + \sigma_i$ により, $H_n(q)$ は n 変数多項式環に作用する. ただし, ここで π_i は次で定義される作用素である：

$$\pi_i(f) = \frac{x_i f - x_{i+1}\sigma_i(f)}{x_i - x_{i+1}}.$$

置換 $\sigma \in S_n$ の最短表示 $\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_l}$ に対して $T_\sigma := T_{i_1} \cdots T_{i_l}$ とおき, $S^{(n)} := \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma$ とおく. このとき, 次が示される [2]：

$$Q_\mu(x_1, \ldots, x_n; q) = \frac{(1-q)^{l(\mu)}}{[m_0]_q!} S^{(n)}(x^\mu).$$

ただし, $m_0 = n - l(\mu)$, $[k]_q = 1 - q^k/1 - q$, $[k]_q! = [k]_q[k-1]_q \cdots [1]_q$, $x^\mu = x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$ である. ここで $Q_\mu(x_1, \ldots, x_n; q) = Q_\mu(x_1, \ldots, x_n, 0; q)$ が成立しており, これによって変数の個数を可算無限個まで増大させたものが $Q_\mu(x; q)$ に一致する.

ヘッケ環を用いた構成法の非可換類似が構成できれば, その結果生じる多項式を非可換 H-L 関数とすべし, というのがイヴェールの方針である. ただし, ここで構成されるものは, 厳密な意味では非可換 H-L 関数ではなく, 準対称 H-L 関数というものとなる. この構成法では, 非可換 H-L 関数はその双対を通じてひとまずは間接的に定義されることになるが, 非可換対称関数としての明示的な公式も与えられていることを注意しておく [3, Thm. 6.13]. 長さが n を越えない組成分解 $K = (k_1, \ldots, k_n)$ に対し, 可換変数 $x_1, \ldots, x_n$ の単項式

$$x^K = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

をとる. このとき, 隣接互換 $(i, i+1) \in S_n$ の x^K に対する作用を, 以下で定める：

$$(i, i+1)x^K = \begin{cases} x_1^{k_1} \cdots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_{i+1}} x_{i+1}^{k_i} x_{i+1}^{k_{i+2}} \cdots x_n^{k_n}, & \text{if } k_i = 0 \text{ or } k_{i+1} = 0, \\ x^K, & k_i \neq 0 \text{ かつ } k_{i+1} \neq 0. \end{cases}$$

これは対称群 S_n の表現を与える．この n 変数多項式環に対する S_n の作用を準対称作用とよぶ．今後，隣接互換 $(i,i+1)$ の準対称作用の場合は

$$\tau_i$$

で表すことにする．さらに，τ_i を用いて，n 変数多項式 $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ に対し，先の π_i の準対称類似 ϖ_i, $\bar{\varpi}_i$ を次で定義する：

$$\varpi_i f = \frac{x_i f - x_{i+1}\tau_i f}{x_i - x_{i+1}}, \quad \bar{\varpi}_i = \varpi_i - 1.$$

このようにおくと，次の対応

$$T_i \longmapsto (1-q)\bar{\varpi}_i + q\tau_i =: T_i^{qs}$$

が，ヘッケ環 $H_n(q)$ の表現を与えることが示せる [3, Thm 5.1]．上述のヘッケ環の作用を用いた $Q_\mu(x_1,\ldots,x_n;q)$ の構成を念頭に，多項式 $G_K(x_1,\ldots,x_n;q)$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} &G_K(x_1,\ldots,x_n;q) = \tfrac{1}{[l(K)]_q![n-l(K)]_q!}\mathbf{S}^{(n)}(x^K), \\ &\mathbf{S}^{(n)} = \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} T_\sigma^{qs}. \end{aligned}$$

ただし，T_σ^{qs} は σ の隣接互換による最短表示 $\sigma = \sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_l}$ に対して，$T_\sigma^{qs} = T_{i_1}^{qs}\cdots T_{i_l}^{qs}$ とおいたものである． このように $G_K(x_1,\ldots,x_n;q)$ を定めると，$G_K(x_1,\ldots,x_n;q) = G_K(x_1,\ldots,x_n,0;q)$ が成立している．これにより変数を可算無限個まで増やした関数

$$G_K(x;q)$$

を考えることができる．これを準対称ホール=リトルウッド関数とよぶ．

さて，以上で構成した準対称 H-L 関数は，非可換対称関数ではない．従って，ここで目指している非可換 H-L 関数では当然ない．実は，準対称 H-L 関数は，準対称関数なるものになる [3, Cor. 6.3]．ただし，準対称 H-L 関数を捉える際には，以下の議論において係数環 $\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}[q]$ に拡張する必要があることに注意しておく．準対称関数とは，可算無限可換変数 $x_1,x_2,\ldots$ をもつ多項式であり，任意の $K=(k_1,\ldots,k_r)\in \mathrm{Comp}$ に対して，単項式 $x_{i_1}^{k_1}\cdots x_r^{k_r}$ の係数が，任意の $1\le i_1 < 1 < i_2 < \cdots < i_r$ に対して一定値であるもののことをいう．これら全体のなす集合

$$QSym$$

は環をなし，これを準対称関数環とよぶ．準対称関数環は Comp で添字付けられる基底をもつ，次数付き $\mathbf{Z}$-代数である．例えば，$K=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathrm{Comp}$ に対して

$$M_K = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r} x_{i_1}^{k_1}\cdots x_{i_r}^{k_r}$$

とおくと, $\{M_K | K \in \mathrm{Comp}\}$ は $Qsym$ の基底を与える. 特に, $\{M_K | K \vDash n\}$ は $Qsym$ の斉 n 次空間 $Qsym_n$ の基底をなす. そして準対称 H-L 関数全体は

$$QSym_q = QSym \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[q]$$

の基底をなす [3, Thm. 6.6]. 詳細は省くが, 非可換対称関数環 **Sym** および準対称関数環 $QSym$ は, ともに次数付き Hopf 代数の構造をもち, 次の対応により互いに双対となる：

$$\mathbf{Sym} \longrightarrow QSym \ : \ S^I \longmapsto M_I$$

あるいは, 正定値対 $\langle S^I, M_J \rangle = \delta_{IJ}$ を定めるとしてもよい. ここで δ_{IJ} は Kronecker のデルタである. **Sym**, $QSym$ 双方ともに係数環を有理関数体 $\mathbf{Q}(q)$ に拡張した上で, この対に関して準対称 H-L 関数の双対基底をとる. この双対基底の各元が非可換 H-L 関数である. すなわち, 組成分解 I に対する非可換 H-L 関数

$$H_I(q)$$

とは, $\langle H_I(q), G_J(x;q) \rangle = \delta_{IJ}\ (I, J \in \mathrm{Comp})$ を満たす非可換対称関数として定義される [H, Def. 6.12].

以上のように, イヴェールの方針は, H-L 関数がヘッケ環を用いて構成される関数であることを軸に, 構成された新たな対象のホール＝リトルウッド性を主張するものである. その他にも H-L 性を示す諸々の事実があげられている. まず, 肝心な可換の場合との関連であるが, $H_I(q)$ の明示公式 [3, Thm. 6.13] から, $q = 1$ の場合には, 分割 μ に対して次が成立している：

$$\gamma(H_\mu(1)) = Q'_\mu(x;1).$$

また, 次の事実は [H] に直接記されてはいないが, 次節で述べるベルジェロン＝ザブロッキの結果を合わせると, I が分割でありかつ hook $\mu = (h, 1, \ldots, 1)$ に対応している場合には, 一般の q する結果が従う：

$$\gamma(H_{(1,\ldots,1,h)}(q)) = Q'_{(h,1,\ldots,1)}(x;q).$$

本稿において H-L 性の主眼の一つとみなす分解公式も成立している. 利便性のため, 組成分解に関する用語を二つ定めておく. $I = (i_1, \ldots, i_l)$ に対して, 先頭から始まる連続した分節 $(i_1, \ldots, i_m)$ $(m \leq l)$ を, 長さ m の, あるいはサイズ $i_1 + \cdots, +i_m$ の

頭 (head)

とよぶ. また, 後尾から始まる連続した分節 $(i_{l-(m-1)},\dots,i_l)$ を, 長さ m の, あるいはサイズ $i_{l-(m-1)}+\cdots+i_l$ の

尾 (tail)

とよぶ. 組成分解 $I=(i_1,\dots,i_l)\in \mathrm{Comp}$, および長さ $l(I)$ を越えない正整数 r を考える. I_1 を I の長さ r の頭とし, 残り尾を I_2 とおく. このとき, $H_I(q)$ の q に 1 の r 乗根 ζ を代入すると, 次の分解公式が成立する [3, Cor. 6.19]：

$$H_I(\zeta)=H_{I_1}(\zeta)H_{I_2}(\zeta).$$

手続きが込みいているので詳細は省くが, $H_I(q)$ の明示的な公式 [3, Thm. 6.13] があり, それに従って計算すると, $H_{(2,1,3)}(q)=R_{(2,1,3)}+q^2R_{(2,4)}+qR_{(3,3)}+q^3R_{(6)}$, $H_{(2,1)}(q)=R_{(2,1)}+qR_{(3)}$, $H_{(3)}(q)=R_{(3)}$ となる. このことと $R_IR_J=R_{I\bullet J}+R_{I|J}$ から $H_{(2,1,3)}(-1)=H_{(2,1)}(-1)H_{(3)}(-1)$ は用意に確かめることができる. 留意すべき点は, イヴェールの分解公式は, 組成分解 $I\in\mathrm{Comp}$ の長さに関するものである. 本稿で目指すものとは, この点が異なる.

3.2 ベルジェロン＝ザブロッキ

ベルジェロン＝ザブロッキによる非可換化は, ロドリゲス型の公式に端を発した, ザブロッキのある発見から始まる. 各自然数 m に対して $S_m=\sum_{k\geq 0}(-1)^k h_{m+k}e_k^{\perp}$ とおき, これをベルンシュタイン作用素とよぶ. ただし, $e_k^{\perp}$ は e_k に関するかけ算作用素の随伴である. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ に対し,

$$s_\lambda=S_{\lambda_1}\cdots S_{\lambda_l}1$$

が成立することが知られている [8, p. 96]. このように, 各自然数 m に対して対称関数に対する作用素 ϕ_m を系統的に構成し, 1 に ϕ_m を漸次作用させて意中の対象を作る公式を, ここではロドリゲス型の公式とよぶことにする. ロドリゲス型の公式は, いま紹介したシュアー関数のほかにも, H-L 関数に対するもの [4] や, マクドナルド多項式に対するもの [5], [7] が知られている. ザブロッキは, これら一連の構成法が, ベルンシュタイン作用素 S の q-捩

$$\widetilde{S}^q$$

とよばれる統一的な手法のもとに統御されることを見いだした. のちに, このことはベルジェロンと共に彼自身により, ホップ代数を用いて整理された. それを非可換対称関数環に適用し, 非可換 H-L 関数を定義するに至る [1].

次数付きホップ代数 H を考える. 線形変換 $V \in \mathrm{End}(H)$ に対して

$$\overline{V} = \mu \circ (1_H \otimes (V \circ S)) \circ \Delta$$

とおく. ただし, μ, S, Δ はそれぞれ H の積, 対合, 余積を表す. さらに, 斉次元 $f \in H$ に対して, $R^q(f) = q^{\deg(f)} f$ で定まる H の線形変換 R^q を用いて,

$$\widetilde{V}^q = \overline{\overline{V}\,\overline{R^q}}$$

とおく. 非可換対称関数環 **Sym** は $\Delta(S_k) = \sum_{i=0}^{k} S_i \otimes S_{k-i}$ と $\widetilde{\omega}(S_k) = (-1)^k \Lambda_k$ により, 余積 Δ と対合 $\widetilde{\omega}$ が定まり, 次数付きホップ代数となる. 正整数 α に対し **Sym** の線形変換

$$A_\alpha$$

を $A_\alpha(R_I) = R_{I \bullet (\alpha)}$ で定める. ただし, $I \bullet (\alpha)$ は組成分解 I と (α) の連結積である. ベルジェロン=ザブロッキの非可換 H-L 関数は, A_α の q-捩を用いて次のように定義される：$I = (i_1, \ldots, i_l \in \mathrm{Comp}$ に対し

$$H_I^q = \widetilde{A}_{i_l}^q \cdots \widetilde{A}_{i_1}^q\, 1.$$

この定義において q-捩の性質を考慮すると $H_I^0 = R_I$ や $H_I^1 = S^I$ がわかる.

ここでもイヴェールの場合と同様に, 明示公式が知られている. 組成分解 $I \vDash n$ から $[n-1] = \{1, \ldots, n-1\}$ の部分集合 $D(I)$ が次で定まる：

$$D(I) = \{i_1, i_1 + i_2, \ldots, i_1 + i_2 + \cdots + i_{l-1}\} \subset [n-1].$$

この対応は n の組成分解全体 $\mathrm{Comp}(n)$ と $[n-1]$ の部分集合全体 $2^{[n-1]}$ の間の全単射を定める. 逆写像は $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_{k-1} d_k\} \subset [n-1]$ $(d_1 < d_2 < \cdots < d_k)$ に対して, $I(D) = (d_1, d_2 - d_1, \ldots, d_k - d_{k-1}, n - d_k) \vDash n$ で与えられる. 組成分解 $J \vDash n$ に対して, 補組成

$$J^c$$

を $D(J^c) = D(J)^c$ で定義する. ただし, $D(J)^c$ は $D(J)$ の $[n-1]$ における補集合を表す. 任意の $I, J \vDash n$ に対して $c(I, J) = \sum_{i \in D(I) \cap D(J)} i$ とおく. すると, H_I^q の明示公式は次のようにかける：

$$H_I^q = \sum_{J \preccurlyeq I} q^{c(I, J^c)} R_J.$$

例を計算してみよう. $I = (2, 1, 3)$ に対して $J \preccurlyeq I$ なる J は $(2, 1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, (6) の四個である. それぞれの $D(J)$ は $\{2, 3\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\emptyset$. 従って, $D(J^c)$ はそれぞれ $\{1, 4, 5\}$,

$\{1,3,4,5\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$. $D(I)=\{2,3\}$ だから $H^q_{(2,1,3)}=R_{(2,1,3)}+q^3R_{(2,4)}+q^2R_{(3,3)}+q^5R_{(6)}$. 同様に計算すると, $H^q_{(2,2)}=R_{(2,2)}+q^2R_{(4)}$.

この明示公式から次のことがわかる：分割 μ に対し

$$\gamma(H^1_\mu)=Q'_\mu(x;1).$$

このことは $H^1_\mu=S^\mu$ からも従う. 分割 μ が鉤 (hook) のときは, イヴェールの非可換 H-L 関数と一致している: $H^q_{\overleftarrow{\mu}}=H_{\overleftarrow{\mu}}(q)$. ただし, 鉤 $\mu=(h,1^r)$ に対して, $\overleftarrow{\mu}=(1^r,h)$ とおく. また μ が鉤のとき, 可換化に関して次が成立する：

$$\gamma(H^q_{\overleftarrow{\mu}})=Q'_\mu(x;q).$$

ベルジェロン＝ザブロッキの場合も, 分解公式が成立している. こちらの方が, 本稿の観点からみれば, イヴェールのものと比較するとより好ましいものになっている. 組成分解 $I=(i_1,\ldots,i_l)\models n$ と, I のサイズ n を越えない自然数 r, および 1 の r 乗根 ζ を考える. サイズが r の頭 I_1 が存在すれば, 残りの尾を I_2 とすると,

$$H^\zeta_I=H^\zeta_{I_1}H^\zeta_{I_2}$$

が成立する. 例えば, $I=(2,1,3)$ のとき, $H^q_{(2)}=R_{(2)}$, $H^q_{(1,3)}=R_{(1,3)}+qR_{(4)}$ より, $H^{-1}_{(2,1,3)}=H^{-1}_{(2)}H^{-1}_{(1,3)}$ を確かめることができる. この場合は イヴェールのものを同じ分解の仕方をするが, 例えば $I=(2,2)$ の場合では事情は異なる. イヴェールの非可換 H-L 関数 $H_{(2,2)}(-1)$ は分解しないが, ベルジェロン＝ザブロッキのそれ $H^{-1}_{(2,2)}$ は分解する: $H^{-1}_{(2,2)}=H^{-1}_{(2)}H^{-1}_{(2)}$.

4 リボン・シュアー関数

ここでは可換リボン・シュアー関数の基本事項をまとめておく事にする。ホール＝リトルウッド関数との関係で, これまで暗に用いていたことなどもここに含まれる. リボン・シュアー関数は特別な歪シュアー関数である. 分割 λ,μ,ν に対して, $\langle s_{\lambda/\mu},s_\nu\rangle=\langle s_\lambda,s_\mu s_\nu\rangle$ により, 歪シュアー関数

$$s_{\lambda/\mu}$$

は定義される. 歪シュアー関数 $s_{\lambda/\mu}$ は歪ヤング図形 $Y_{\lambda/\mu}$ のみに依存する [8, I, (5.7)]. 分割 λ と μ が, ある特別な関係にあるとき, $s_{\lambda/\mu}$ はリボン・シュアー関数とよばれる. ヤング図形は

英国流

で考える事にする．一般に，二つの分割 λ, μ のヤング図形 Y_λ, Y_μ が，$Y_\mu \subset Y_\lambda$ なる関係にあるとき，Y_μ の Y_λ における補集合を歪ヤング図形とよび $Y_{\lambda/\mu}$ で表す．$\lambda = (5,4,2)$, $\mu = (2,1)$ のとき，

$$Y_{\lambda/\mu} = \begin{array}{ccccc} & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

である．歪ヤング図形 $Y_{\lambda/\mu}$ が 2×2 区画を含まないとき，すなわち

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

を部分図形としてふくまないとき，$Y_{\lambda/\mu}$ をリボン (ribbon) という．

従って，直上の例 $Y_{(5,4,2)/(2,1)}$ はリボンではない．例えば，$\lambda = (5,4,2)$, $\mu = (3,1)$ とすれば，

$$Y_{\lambda/\mu} = \begin{array}{ccccc} & & & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

となりリボンとなる．リボンはときにリムフック (rim-hook) とか湾岸道路などともよばれる．

歪ヤング図形 $Y_{\lambda/\mu}$ がリボンとなるとき，歪シュアー関数 $s_{\lambda/\mu}$ をリボン・シュアー関数とよぶ．リボンが与えられた場合，一行目から順に含まれる $\bullet$ の数を列挙すれば，組成分解が得られる．いま英国流の記法を採用しているので，行や列の数え方は，行列のそれと同じであることに注意してもらいたい．これにより，リボンと組成分解は $1:1$ に対応している．この対応により，リボンと組成分解を同一視する．リボン $Y_{\lambda/\mu}$ に対応する組成分解が I のとき，リボン・シュアー関数 $s_{\lambda/\mu}$ を

$$r_I$$

で表す．よく知られているように，シュアー関数全体は対称関数環 Sym の基底をなす．歪シュアー関数 $s_{\lambda/\mu}$ をシュアー関数の一次結合で表したとき，s_ν の係数は ν 以外には歪ヤング図形 $Y_{\lambda/\mu}$ にしか依存しない．従って，展開式は $r_I = \sum_\nu c_\nu^I s_\nu$ と記せる．この展開係数 c_ν^I はリトルウッド＝リチャードソン係数とよばれ，歪ヤング図形 $Y_{\lambda/\mu}$ の，あるいはリボン I 上の半標準盤 (semi-standard tableau) T で語 (reading word) $w(T)$ が

ヤマノウチ語

となるものの個数に一致する．詳細は [8, I, 9] を参照していただきたい．語がヤマノウチであることから，$w(T)$ に含まれる成分 i の個数 ν_i を，i が 1 から順次列挙していけば，得られた数列 $\nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots)$ は分割になる．この分割 ν を T の重み (weight) とよぶ．リボン I 上の半標準盤で語が重み ν のヤマノウチ語となるもの全体を

$$\mathrm{Tab}^0(I,\nu)$$

で表す．従って，$c^I_\nu=\sharp\mathrm{Tab}^0(I,\nu)$ である．

いま，λ, μ をサイズが等しい分割とし，ヤング図形 Y_λ 上定まるの重み μ の半標準盤全体を $\mathrm{Tab}(\lambda,\mu)$ で表すことにする．次の全単射が存在する：

$$\Phi:\bigsqcup_{I\preccurlyeq\mu}\mathrm{Tab}^0(I,\lambda)\longrightarrow\mathrm{Tab}(\lambda,\mu).$$

例えば $\lambda=(3,2,1),\mu=(2,2,1,1),J=(2,3,1)$ として，$\mathrm{Tab}^0(I,\lambda)$ から

$$U=\begin{matrix} & & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & \\ 3 & & & \end{matrix}$$

をとる．語は $w(U)=112213$ となる．一方，μ に応じてもう一つの語 $w_\mu=(i^{\mu_i})_{i\geq 1}$ を用意する．今の場合，$w_\mu=112234$ となる．w_μ を第一行，$w(U)$ を第二行に並べた行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

を作り，これを上行にある数字を下行の対応する数字で指定されるヤング図形の行に順次書き込む操作を表しているとよみ，そうして作られる半標準盤が $\Phi(U)$ である．実際に操作を実行すると，この場合は次のようになる：

$$\Phi(U)=\begin{matrix} 1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & \\ 4 & & \end{matrix}$$

集合 $\mathrm{Tab}(\lambda,\mu)$ の元の個数は，コストカ数とよばれ $K_{\lambda\mu}=K_{\lambda\mu}(1)$ で表される．従って，上の全単射は等式 $K_{\lambda\mu}=\sum_{I\preccurlyeq\mu}c^I_\lambda$ を意味している．両辺に s_λ を乗じ，λ に関する総和をとれば

$$Q'_\mu(x;1)=\sum_{I\preccurlyeq\mu}r_I,$$

すなわち $h_\mu = \sum_{I \preccurlyeq \mu} r_I$ となり, 百年くらい前から知られている等式となる [9]. イヴェール, ベルジェロン=ザブロッキ双方ともに $q=1$ においては $\sum_{J \preccurlyeq I} R_J$ となり, I が分割の場合にはともに $Q'_\mu(x;1)$ に一致する. このことは, 彼らの関数の H-L 性を主張する論拠の一つであった.

5 非可換ホール=リトルウッド関数 (その2)

ホール=リトルウッド関数 $Q'_\mu(x;q)$ もしくは $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ は, スプリンガー加群 R_μ と密接な関係をもつ. 具体的には $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ が, R_μ の次数付きフロベニウス特性式となっている. このことに基づき, より直接的に H-L 関数 $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ の非可換化を与えることが, この最終節の目的である.

非可換リボン・シュアー関数の定義式 $R_I = \sum_{J \preccurlyeq I} (-1)^{l(I)-l(J)} S^J$ を逆に解くと,

$$S^I = \sum_{J \preccurlyeq I} R_J$$

を得る. 非可換完全対称関数 S^I を, I が分割 μ の場合に可換化をとれば, 可換完全対称関数 h_μ となるが, h_μ はスプリンガー加群のフロベニウス特性式であった. 一方, H-L 関数 $\tilde{Q}_\mu(x;q)$ は R_μ の次数付きフロベニウス特性式である. そこで等式 $S^I = \sum_{J \preccurlyeq I} R_J$ をスプリンガー加群の指標の非可換化と捉えれば, R_μ の次数加群としての既約分解を通じて次数の情報を加味することにより, H-L 関数 $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ の非可換化とよぶべきものが得られよう. さらに, この非可換対称関数が q の特殊値において合理的な挙動を示したり, あるいは次元の一致の観点からみて好ましい分解公式を満たせば, それは H-L 関数のスプリンガー加群の表現論・組合せ論を背景とした非可換化とよぶにふさわしい対象であるとするのが, 本稿での立場である.

では, まず R_μ の既約分解の様子を次数込みで記述しておく. これは, R_μ の次数付きフロベニウス特性式 $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ をシュアー関数で展開すれば得られる:

$$\tilde{Q}'_\mu(x;q) = \sum_{\lambda \vdash n} \tilde{K}_{\lambda\mu}(q) s_\lambda.$$

ここで $\tilde{K}_{\lambda\mu}(q)$ はコストカ多項式を表す. コストカ多項式は q を変数とする非負整数係数多項式である. そして, $\tilde{K}_{\lambda\mu}$ の q^d の係数を見れば, スプリンガー加群の斉 d 次空間 R^d_μ における, 分割 λ に付随する対称群 S_n の既約表現の重複度がわかる. この等式をもとにして, $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ の非可換化を構成したい. 想定している基本的な手筋は, $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ をリボン・シュアー関数 r_I で展開し, その展開式において r_I を R_I に置き換える, というものである. ただし, 以下でみるように, この手筋は μ が鉤の場合しか完全な形で機能しない. この

限られた状況で得られる情報のみを用いて, 一般の分割 μ を含む場合に議論を展開する. このように述べると若干乱暴な気がしないでもないが, 結論からいうとこれで悪くないものが作れる.

組成分解 I に対して, $\mathrm{maj}(I) = \sum_{i \in D(I)} i$ とおく. これを I のメジャー指数 (major index) とよぶ. また,

$$\mathrm{jam}(I) := \mathrm{maj}\left(\overleftarrow{I}\right)$$

とおき, これを逆メジャー指数 (reversed major index) とよぶ. 例えば, $I = (1,2,1,1)$ に対しては $\mathrm{jam}\left(\overleftarrow{I}\right) = 1 + (1+1) + (1+1+2) = 7$ である. 以下では μ が

鉤

の場合を考える. 組成分解 I は $I \preccurlyeq \mu$ を満たし, λ は分割とする. このとき全単射 $\Phi : \bigsqcup_{I \preccurlyeq \mu} \mathrm{Tab}^0(I,\lambda) \to \mathrm{Tab}(\lambda,\mu)$ のもと, $U \in \mathrm{Tab}^0(I,\lambda)$ に対して次が成立する:

$$\mathrm{coch}\Phi(U) = \mathrm{jam}(I).$$

例えば, $\mu = (2,1,1)$, $\lambda = (3,1)$ の場合を考えると, 条件 $I \preccurlyeq \mu$ を満たす組成分解上の半標準盤で重みが λ, かつ語がヤマノウチのものは $U_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \end{array}$ および $U_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & & \end{array}$ の二つのみである. 型はそれぞれ $I_1 = (2,2)$ と $I_2 = (3,1)$ であり, 逆メジャー指数はそれぞれ 2 と 1. 一方, U_1, U_2 それぞれの Φ による像を構成すると, $\Phi(U_1) = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & & \end{array}$ および $\Phi(U_2) = \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 3 & & \end{array}$ となる. それぞれのコチャージを求めると 2, 1 となり, 上の式が成立している. μ が鉤でない場合には, この等式は成立しない. 例えば, $\mu = (2,2)$ のとき $\lambda = (3,1)$ とすれば, $I \preccurlyeq$ を満たす組成分解 I を型とする件の半標準盤は $\begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \end{array}$ のみで, その型 $I = (2,2)$ の逆メジャー指数は 2. 一方, この半標準盤の Φ による像は $\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & & \end{array}$ となる. そのコチャージは 1 となり, I の逆メジャー指数に一致しない.

いま得た式を用いると, ラスクー=シュッツェンベルジェ (L-S) の定理から

$$\tilde{K}_{\lambda\mu}(q) = \sum_{I \preccurlyeq \mu} c_\lambda^I q^{\mathrm{jam}(I)}$$

が導出できる. L-S の定理に関しては [8, III, (6.5)] を参照していただきたい. これを $\tilde{Q}_\mu(x;q) = \sum_\lambda \tilde{K}_{\lambda\mu}(q) s_\lambda$ に代入すると, H-L 関数 $\tilde{Q}'_\mu(x;q)$ のリボン・シュアー関数による展開式を得る: μ が鉤のとき

$$\tilde{Q}'_\mu(x;q) = \sum_{I \preccurlyeq \mu} q^{\mathrm{jam}(I)} r_I.$$

この等式をひとまずの根拠として, 本節冒頭部で述べた基本方針にのっとり, 次の定義を採用する：任意の組成分解 I に対して

$$K_I(q) := \sum_{J \preccurlyeq I} q^{\mathrm{jam}(J)} R_J.$$

例をあげると, $I = (2,1,3)$ の場合には, $J = (2,1,3), (2,4), (3,3), (6)$ に関する和をとることになるが, それぞれの逆メジャー指数は順に 7, 4, 3, 0 であるから, $K_{(2,1,3)}(q) = R_{(6)} + q^3 R_{(3,3)} + q^4 R_{(2,4)} + q^7 R_{(2,1,3)}$ となる. 先述の $H_I(q)$ や H_I^q と比較すると, 計算が容易であることがわかると思う. また, $K_{(2,1,3)}(q)$ は $H_{(2,1,3)}(q)$ や $H^q_{(2,1,3)}$ と異なることも確認できる. また, 定義から明らかに, $q=1$ の場合は一般の分割 μ に対して, $K_I(q)$ の可換化は H-L 関数 $\tilde{Q}_\mu(x;q)$ に一致する：

$$\gamma(K_\mu(1)) = \tilde{Q}_\mu(x;1).$$

一般の q に対しては, μ が鉤の場合に

$$\gamma(K_\mu(q)) = \tilde{Q}_\mu(x;q)$$

が, これも定義よりすぐ従う. さらに懸案の分解公式であるが, ベルジェロン＝ザブロッキのもと同様に, 組成分解のサイズに関して分解する. ただし, H_I^q が頭から分解したのに対して, $K_I(q)$ は尾から分解する. 組成分解 $I \vDash n$ と, n を越えない正整数 r, および 1 の r 乗根 ζ を用意する. I がサイズ r の尾 I_2 をもつとき, 残りの頭を I_1 とおくと, 次が成立する：

$$K_I(\zeta) = K_{I_1}(\zeta) K_{I_2}(\zeta).$$

これは次の簡単にわかる等式を用いて, 定義から直接示すことができる：$I, J \in \mathrm{Comp}$ および正整数 r に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{jam}(I \bullet J) &\equiv \mathrm{jam}(I) + \mathrm{jam}(J) \mod r, \\ \mathrm{jam}(I|J) &\equiv \mathrm{jam}(I) + \mathrm{jam}(J) \mod r. \end{aligned}$$

また分解公式を繰り返せば, より細かく分解できることはよいであろう. 例えば, $K_{(2,1,3,1,2)}(-1)$ は $K_{(2,1)}(-1)K_{(3,1)}(-1)K_{(2)}(-1)$ にまで分解される. この点に関しては, $H_I(q)$ も H_I^q も同様である.

ご覧のように, $K_I(q)$ と H_I^q は, 本質的に同じ分解公式をもつ. 実は, これらは密接に関連しているので, 最後にそのことに触れて終える. 組成分解 $I, J \vDash n$ が関係 $J \preccurlyeq I$ にあるとき, J の I に対する余メジャー指数 (comajor index)

$$\mathrm{comaj}_I(J)$$

を $\mathrm{comaj}_I(J) = \mathrm{maj}(I) - \mathrm{maj}(J)$ で定義する. 二つの組成分解 I, J に対して, 条件 $J \preccurlyeq I$ と条件 $D(J) \subseteq D(I)$ は同値である. I のメジャー指数が $D(I)$ の元の総和であることから $\mathrm{comaj}_I(J)$ は非負整数となる. 簡単な組合せ論的議論により, 上述の関係にある二つの組成分解 I, J に対して,

$$\mathrm{comaj}_I(J) = c(I, J^c)$$

が成立していることがわかる. 従って, ベルジェロン=ザブロッキの非可換 H-L 関数 H_I^q は, 次のように表すことができる：

$$H_I(q) = \sum_{J \preccurlyeq I} q^{\mathrm{comaj}_I(J)} R_J.$$

ここで, $\tilde{K}_I(q) := q^{\mathrm{maj}(I)} K_I(q^{-1})$ とおくと

$$H_I^q = \tilde{K}_{\overline{I}}(q)$$

が得られる. そして, H_I^q の分解公式は, 逆メジャー指数 jam に関する合同式を, メジャー指数 maj に読み替えることにより, 容易に示すことができる.

References

[1] N. Bergeron and F. Zabrocki, q and q,t-analogues of non-commutative symmetric functions, *Discrete Math.*, **298** (2005), 79-103.

[2] G. Duchamp, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, T. Scharf and J. -Y. Thibon, Euler-Poincaré characteristic and polynomial representations of Iwahori Hecke algebras, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **31** (1995), 179-201.

[3] F. Hivert, Hecke Algebras, differential operators, and quasi-symmetric functions, *Adv. Math.*, **155** (2000), 181-238.

[4] N. Jing, Vertx operators and Hall-Littlewood symmetric functions, *Adv. Math.* **87** (1991), 226-248.

[5] A. Kirillov and M. Noumi, q-difference raising operators for Macdonald polynomials and the integrality of transition coefficients, *Algebraic methods and q-special functions* (Montréal, QC, 1996), CRM Proc. Lecture Notes **22**, 227-243.

[6] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh and J. -Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions, *Adv. Math.* **112** (1995), 218-348.

[7] L. Lapointe and L. Vinet, Rodrigues formulas for Macdonald polynomials, *Adv. Math.* **130** (1997), 261-279.

[8] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.

[9] P. A. MacMahon, *Combinatorial Analysis*, Cambridge University Press, 1915, 1916; Dover, 2004.

[10] H. Morita, Green polynomials at roots of unity and Springer modules for the symmetric group, *Adv. Math.* **210** (2007), 277-292.

[11] L. Tevlin, Noncommutative monomial symmetric functions, *Proc. FPSAC '07.*, Tianjin, China.