数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 132-139

Cohomology of the Extraspecial p-Group and Representations of the Double Burnside Algebra

埼玉大学教育学部　飛田　明彦
Akihiko Hida
Faculty of Education, Saitama University

1 Introduction

本報告は茨城大学の柳田伸顯氏との共同研究に基づくものです. p を素数とし, P を有限 p-群とします. 係数体はすべて有限体 $\mathbb{F}_p$ として考えます. P の両側 Burnside 多元環 $A_p(P,P)$ は, 有限群に関わる様々な対象と関わっています.

1. (モデュラー表現) P の外部自己同型群の群環 $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(P)$ は $A_p(P,P)$ の剰余環であり, $\mathrm{Out}(P)$ の表現は $A_p(P,P)$ の表現とみなすことができる.

2. (ホモトピー論) P の分類空間の安定ホモトピー圏での射を記述している.

3. (有限群の p-局所構造) P 上のフュージョンシステムは $A_p(P,P)$ における特別な冪等元に対応している.

この 2. からもわかるように, $A_p(P,P)$ は P の mod-p コホモロジー環 $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ に自然に作用しており, $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ は右 $A(P,P)$-加群となっています. 本研究の目的は, p を奇素数として, 位数 p^3 の extraspecial p-群 E に対して, $H^*(E,\mathbb{F}_p)$ の右 $A_p(E,E)$-加群としての既約組成因子を決定することです. 主に 1. の表現論的立場からの方法を用います. 一方, 上記 2. の見地からは, これは E の分類空間 BE の stable splitting を考えたとき, 各因子のコホモロジーを求めることに相当しており, それが [15] でのもともとの動機の一部です. また, 上記 3. の視点からは, 有限群の p-フュージョンに関する情報がコホモロジーのどの次数の部分に現れているのか, ということを探究していると見ることもできます.

特に extraspecial p-群 E を考察する理由は, 奇素数 p に対する非可換群を考えたい, ということですが, また何より, E のコホモロジー環が非常に豊かな構造を持った興味深い対象である, という点もあります.

以下 2 章では, 両側 Burnside 環とそのコホモロジーへの作用, 両側集合関手の理論について述べます. 3 章では, 代数的位相幾何学, 分類空間のホモトピー論からの背景について触れます. 最後に 4 章では E のコホモロジーについての主結果を述べます.

2 両側集合と両側 Burnside 環

G,H を有限群, X を有限集合とする. X に G が左から, H が右から作用し, 任意の $g\in G$, $h\in H$, $x\in X$ について,

$$(gx)h = g(xh)$$

が成り立つとき, X を (G,H)-集合と呼ぶ. また, 任意の $x \in X$ と $h \in H$, $h \neq 1$ について, $xh \neq x$ であるとき, X は, 右 H-自由であるという. 有限群 G, H に対して, H-自由な有限 (G,H)-集合の圏の Grothendieck 群を $A(G,H)$ で表す. これは可移な H-自由 (G,H)-集合の同型類により生成される加法群である. (G,H)-集合 X に対してその同型類を $[X]$ で表す. p を素数とし,

$$A_p(G,H) = \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A(G,H)$$

とおく. これは可移な H-自由 (G,H)-集合の同型類を基底とする $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間である.

G の部分群 K と準同型写像 $\varphi : K \longrightarrow H$ に対して, $G \times_{(K,\varphi)} H = G \times H/\sim$ (ただし, $g \in G$, $k \in K$, $h \in H$ に対して $(gk,h) \sim (g, \varphi(k)h)$) とおく. 可移 H-自由 (G,H)-集合は, 適当な (K,φ) に対して $G \times_{(K,\varphi)} H$ と同型となる.

有限群 G, H, K に対して, $\mathbb{F}_p$-双線形写像

$$A_p(H,K) \times A_p(G,H) \longrightarrow A_p(G,K)$$

$$([X],[Y]) \mapsto [Y \times_H X]$$

が定義され, 特に $A_p(G,G)$ は有限次元 $\mathbb{F}_p$-多元環となる. 既約 $A_p(G,G)$-加群については [2], [12] 等で研究されており, G の部分群 Q と既約 $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(Q)$-加群 V の組 (Q,V) である条件をみたすものによって分類される. (Q,V) に対応する既約 $A_p(G,G)$-加群をここでは $S(G,Q,V)$ と表記することにする. Q をこの既約加群の極小部分群と呼ぶ.

有限群を対象とし, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G,H) = A_p(G,H)$ となる圏 $\mathcal{C}$ を両側集合圏と呼ぶ. 反変関手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{F}_p\text{-Mod}$ を両側集合関手 [3], または inflation 関手 [14] と呼ぶ. F が両側集合関手ならば有限群 P に対して $F(P)$ は右 $A_p(P,P)$-加群である. また $Q \leq P$ に対して,

$$F(Q) \cdot A_p(P,Q) = \sum_{\psi \in A_p(P,Q)} \psi(F(Q)) \subset F(P)$$

とおくとこれは $F(P)$ の $A_p(P,P)$-部分加群である.

$F(P)$ の $A_p(P,P)$-加群としての組成因子はすべて $S(P,Q,V)$, $Q \leq P$, V は既約 $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(Q)$-加群, という形をしているが, $S(P,Q,V)$ と同型な組成因子は, 次の補題のように, ある意味で部分群 Q から誘導されていることがわかる.

補題 2.1 ([4], [8, Lemma 3.1]). 既約 $A_p(P,P)$-加群 $S(P,Q,V)$ が $F(P)$ の組成因子として現れるならば, $S(P,Q,V)$ は $F(Q) \cdot A_k(P,Q)$ の組成因子として現れる.

次に, コホモロジーを両側集合関手の観点から見ることにする. $H^n(P,\mathbb{F}_p) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{F}_pP}(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p)$ を $\mathbb{F}_p$-係数のコホモロジー群,

$$H^*(P,\mathbb{F}_p) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(P,\mathbb{F}_p)$$

をコホモロジー環とする. 次の 2 つの基本的な作用を考える.

(1) 群の準同型写像 $\varphi : H \longrightarrow P$ に対して,

$$\varphi^* : H^*(P,\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(H,\mathbb{F}_p).$$

(2) 部分群 $H \leq P$ に対して, trace (あるいは transfer) 写像,

$$\mathrm{Tr}_H^P : H^*(H,\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(P,\mathbb{F}_p).$$

$\mathbb{F}_p$-ベクトル空間 $A_p(P,Q)$ は, 右自由な可移 (P,Q)-両側集合の同型類で生成されている. 右自由な可移 (P,Q)-両側集合,

$$X = P \times_{(K,\varphi)} Q,\ K \le P,\ \varphi : K \longrightarrow Q$$

に対して, $[X] \in A_p(P,Q)$ の作用を, φ^* と Tr_K^P の合成として,

$$\mathrm{Tr}_K^P \varphi^* : H^*(Q,\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\varphi^*} H^*(K,\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_K^P} H^*(P,\mathbb{F}_p)$$

と定義することにより, $H^*(-,\mathbb{F}_p)$ は両側集合関手となり, $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ は右 $A_p(P,P)$-加群となる. $H^n(P,\mathbb{F}_p)$ の右 $A_p(P,P)$-加群としての既約組成因子とその重複度を調べることがここでの目的である.

一般的に $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ の構造は非常に複雑であるため, 簡明であると思われる剰余環について考察する. $\sqrt{0}$ を $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ の冪零元からなるイデアルとする. $\sqrt{0}$ は $H^*(P,\mathbb{F}_p)$ の $A_p(P,P)$-部分加群である. 以下では, 剰余環 $H^*(P,\mathbb{F}_p)/\sqrt{0}$, の部分環

$$(\mathbb{F}_p \otimes H^*(P,\mathbb{Z}))/\sqrt{0}$$

について考察する. これも $A_p(P,P)$-加群である. 以下,

$$H^*(P) = (\mathbb{F}_p \otimes H^*(P,\mathbb{Z}))/\sqrt{0}$$

とおく. $H^*(-,\mathbb{F}_p)/\sqrt{0}$ と $H^*(-)$ はともに両側集合関手である.

S を既約右 $A_p(P,P)$-加群とする. e を $A_p(P,P)$ の冪等元で $Se = S$ であり, さらに $S' \not\cong S$ である既約加群に対しては $S'e = 0$, となっているものとする. $H^n(P,\mathbb{F}_p)$ は有限次元右 $A_p(E,E)$-加群であり, $H^n(P,\mathbb{F}_p)$ での S の組成因子としての重複度は

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(P,\mathbb{F}_p)e / \dim_{\mathbb{F}_p} S$$

で与えられる. すべての $n \ge 0$ を同時に扱うためには, 次数付き $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間

$$H^*(P,\mathbb{F}_p)e$$

を記述できればよいこととなる. 4 章における主定理は, extraspecial p-群 E に対して, 次数付き $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間 $H^*(E)e$ を記述するものである.

3 代数的位相幾何学からの背景

ここでは, 背景にある分類空間のホモトピー論について触れる. なお記述には省略や不正確な部分があることをお詫びする. 詳しくは, 例えば [1] を参照していただきたい. p 群 P に対して, BP_+ を完備化された分類空間とする. 安定ホモトピー圏での自己準同型環 $\mathrm{End}(BP_+)$ は $A(P,P)$ の完備化とほぼ同型となる. BP_+ の安定ホモトピー圏での分解 (stable splitting)

$$BP_+ = \bigvee_i X_i$$

は $A(P,P)$ の完備化における 1 の直交冪等元分解に対応し, さらにそれは $A_p(P,P)$ における 1 の直交冪等元への分解

$$1 = \sum e_i \in A_p(P,P)$$

に対応している．stable splitting における直既約因子 X_i は $A_p(P,P)$ の原始冪等元 e_i に対応し，さらにそれは既約 $A_p(P,P)$-加群と対応している．さらに，stable splitting における X_i と同値な因子の重複度は，既約加群の次元と等しい．

また X_i のコホモロジーは

$$H^*(X_i, \mathbb{F}_p) \simeq H^*(P, \mathbb{F}_p)e_i$$

と考えられる．このコホモロジーについて，まずは近似的に冪零元イデアルによる剰余を考えたいが，これは $H^*(P, \mathbb{F}_p)$ の部分環ではない．そこで X_i のコホモロジーの冪零元イデアルによる剰余に相当するものとして，

$$(H^*(P, \mathbb{F}_p)/\sqrt{0})e_i$$

あるいは

$$H^*(P)e_i$$

を考えることができる．以下の 4 章の主定理は，extraspecial p-群 E の場合にこのコホモロジーを求めたものである．なお，4 章の定理における冪等元 e は必ずしも原始冪等元ではなく，一般的にはここでの e_i いくつかの和となっている．

4 Extraspecial p-群の cohomology への作用

p を奇素数とし，

$$E = p^{1+2} = \langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = 1, [a,c] = [b,c] = 1,\ [a,b] = c \rangle$$

を位数が p^3, exponent p の extraspecial p-群とする．E のコホモロジー環の構造は知られており ([11], [9], [10]), 特に $H^*(E)$ は，生成元

$$y_1, y_2, C, v$$

と関係式

$$y_1^p y_2 - y_1 y_2^p = 0,\ Cy_i = y_i^p,\ C^2 = y_1^{2p-2} + y_2^{2p-2} - y_1^{p-1} y_2^{p-2}$$

で定義される可換環である．生成元の次数は

$$\deg y_i = 2,\ \deg C = 2(p-1),\ \deg v = 2p$$

である．さらに，

$$V = v^{p-1},\ D_1 = C^p + V,\ D_2 = CV$$

とおく．そして $H^*(E)$ の 2 つの部分環を

$$\mathbb{CA} = \mathbb{F}_p[C, V]$$

$$\mathbb{DA} = \mathbb{F}_p[D_1, D_2] \subset \mathbb{CA}$$

と定義する．$\mathbb{CA} = H^*(E)^{\mathrm{Out}(E)}$ ($\mathrm{Out}(E)$-不変部分環) であり，E の任意の極大基本可換 p-部分群 A に対して，制限写像は同型

$$\mathrm{res}^E_A : \mathbb{DA} \xrightarrow{\sim} H^*(A)^{\mathrm{Out}(A)}$$

となる.

ここで, $\mathrm{Out}(E) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の $H^*(E)$ への作用は, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ について

$$g^*C = C,\ g^*y_1 = \alpha y_1 + \beta y_2,\ g^*y_2 = \gamma y_1 + \delta y_2,\ g^*v = (\det(g))v$$

で与えられている.

S^i を $\mathbb{F}_p[y_1, y_2]$ の $2i$ 次の斉次部分とする. $0 \le i \le p-1$ に対しては, S^i は

$$y_1^i, y_1^{i-1}y_2, \ldots, y_2^i$$

を基底とする $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間であり, $p(p-1)$ 個の既約 $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(E)$-加群

$$S^i v^q \simeq S^i \otimes (\det)^q \quad (0 \le i \le p-1, 0 \le q \le p-2)$$

は (同型を除いて) すべての既約 $\mathbb{F}_p\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-加群を与える.

同様に $H^{2i}(A) = S(A)^i$ とおくと,

$$S(A)^i \otimes (\det)^q \quad (0 \le i \le p-1, 0 \le q \le p-2)$$

は既約 $\mathrm{Out}(A) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-加群の同型類の代表である.

命題 4.1 ([5]). 既約 $A_p(E,E)$-加群は次のように分類される.
(1) $S(E, C_p, U_i)$ $(0 \le i \le p-2)$,

$$\dim S(E, C_p, U_i) = \begin{cases} p+1 & (i=0) \\ i+1 & (1 \le i \le p-2). \end{cases}$$

ここで C_p は位数 p の巡回群であり, U_i $(0 \le i \le p-2)$ は既約 $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(C_p)$-加群の同型類の代表である.
(2) $S(E, A, S(A)^{p-1} \otimes \det^q)$ $(0 \le q \le p-2)$,

$$\dim S(E, A, S(A)^{p-1} \otimes \det^q) = p+1.$$

ただし, $A(\simeq C_p \times C_p)$ は E の極大基本可換 p-部分群である.
(3) $S(E, E, S^i \otimes \det^i)$ $(0 \le i \le p-1,\ 0 \le q \le p-2)$.
(4) $S(E, 1, \mathbb{F}_p)$, つまり, 自明な極小部分群を持つ 1 次元の既約加群.

さて, $0 \le i \le p-2$ に対して, T^i を

$$y_1^{p-1}y_2^i,\ y_1^{p-2}y_2^{i+1}, \ldots, y_1^i y_2^{p-1}$$

を基底とする $\mathbb{F}_p$-ベクトル空間とする. $H^*(E)$ では $y_1^p y_2 - y_1 y_2^p = 0$ であるから, $S^{(p-1)+i}$ は

$$y_1^{(p-1)+i},\ y_1^{(p-1)+i-1}y_2,\ \ldots,\ y_1^p y_2^{i-1},\ y_2^{(p-1)+i}$$

と T^i により生成されている. よって $1 \le i \le p-2$ に対しては $S^{(p-1)+i} = CS^i + T^i$ である.

既約 $A_p(E,E)$-加群 S に対して, $Se = S$ であり, S と非同型な既約加群 S' に対しては $S'e = 0$ であるような $A_p(E,E)$ の冪等元 e をとる. 以下では, $H^*(E)e$ と自然に同型となっている $H^*(E)$ の $\mathbb{F}_p$-部分ベクトル空間を決定する.

まず, 極小部分群が C_p である既約加群については次のようになる. $C_p \le E$ を位数が p の巡回群とし U_i $(0 \le i \le p-2)$ を既約 $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(C_p)$-加群とする.

定理 4.2 ([8, Theorem 10.2]). e を $S(E, C_p, U_i)$ に対応する冪等元とする. このとき,

$$H^*(E)e \simeq \begin{cases} \mathbb{F}_p[C](\mathbb{F}_p C + S^{p-1}) & (i=0) \\ \mathbb{F}_p[C]S^i & (1 \le i \le p-2). \end{cases}$$

また, 位数が p^2 の極大基本可換 p-部分群 A を極小部分群として持つ既約加群については次が成立する.

定理 4.3 ([8, Theorem 10.3]). e を $S(E, A, S^{p-1} \otimes \det^q)$ に対応する冪等元とすると

$$H^*(E)e \simeq \begin{cases} \mathbb{DA}(\oplus_{0 \le j \le p-1} D_2 C^j (\mathbb{F}_p C + S^{p-1})) & (q=0) \\ \mathbb{DA}(\oplus_{0 \le j \le p-1} v^q C^j (C S^q + T^q)) & (1 \le q \le p-2). \end{cases}$$

最後に, 極小部分群が E である既約 $A_p(E,E)$-加群について, つまり $\mathbb{F}_p\mathrm{Out}(E)$-加群について述べる. まず, $\det^q$ と $S^{p-1} \otimes \det^q$ については次のようになる.

定理 4.4 ([8, Theorem 10.4]). e を既約加群 $S(E,E,S)$ に対応する冪等元とする.
(1) $S = S^0 = \mathbb{F}_p$ のとき,

$$H^*(E)e \simeq \mathbb{DA}^+.$$

ただし, $\mathbb{DA}^+$ は $\mathbb{DA}$ の正次数部分である.
(2) $S = \det^q$ $(1 \le q \le p-2)$ のとき,

$$H^*(E)e \simeq \mathbb{CA} \cdot v^q.$$

(3) $S = S^{p-1}$ のとき

$$H^*(E)e \simeq \mathbb{DA}(VS^{p-1}).$$

(4) $S = S^{p-1} \otimes \det^q$ $(1 \le q \le p-2)$ のとき,

$$H^*(E)e \simeq \mathbb{CA}(v^q S^{p-1}).$$

また, 残りの既約加群については次のようになっている.

定理 4.5 ([8, Theorem 10.5]). $1 \le i \le p-2$, $0 \le q \le p-2$ として,

$$S = S^i v^q, \quad T = T^{p-i-1} v^s$$

とおく. ただし $s \equiv i + q \pmod{p-1}$, $0 \le s \le p-2$ である. e を $S(E,E,S^i \otimes \det^q)$ に対応する $A_p(E,E)$ の冪等元とすると, $H^*(E)e$ は次の $\mathbb{F}_p$-部分ベクトル空間と同型である.

$$\begin{array}{lcll} \mathbb{CA}\cdot VS & \oplus & \mathbb{DA}\cdot VT & (q \equiv 2i \equiv 0) \\ \mathbb{CA}\cdot VS & \oplus & \mathbb{CA}\cdot T & (q \equiv 0,\ 2i \not\equiv 0) \\ \mathbb{DA}\cdot S & \oplus & \mathbb{DA}\cdot VT & (i = q,\ 3i \equiv 0) \\ \mathbb{DA}\cdot S & \oplus & \mathbb{CA}\cdot T & (i = q,\ 3i \not\equiv 0) \\ \mathbb{CA}\cdot S & \oplus & \mathbb{DA}\cdot VT & (q \ne 0,\ i \ne q,\ q+2i \equiv 0) \\ \mathbb{CA}\cdot S & \oplus & \mathbb{CA}\cdot T & (q \ne 0,\ i \ne q,\ q+2i \not\equiv 0). \end{array}$$

ただし $\equiv$ は $\mathrm{mod}(p-1)$ で合同を意味する.

定理 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 において各次数付きベクトル空間の最小次数をみることで, 次の系が得られる. (2) は [7, Proposition 5.3] での $p=3$ の結果を任意の素数に一般化したものとなっている.

系 4.6. (1) 任意の既約 $A_p(E,E)$-加群は,

$$H^n(E),\ n \le 2(p+2)(p-1)$$

の既約組成因子として現れる.
(2) 極小部分群が E である任意の既約 $A_p(E,E)$-加群は

$$H^n(E),\ n \le 2(p+1)(p-1)$$

の既約組成因子として現れる.

補足. 小さい素数 $p = 3, 5, 7$ の場合, これらの定理のうちの多くは [15] において, E を Sylow p-部分群に持つ有限群, あるいは E 上のフュージョンシステムに関する結果 [13] を利用して得られている. 例えば $p = 3$ の場合, E を極小部分群に持つ自明な既約加群に関する定理 4.4 (1) については, 散在型単純群 J_4 のコホモロジーに関する結果 [6]

$$H^*(J_4) \simeq \mathrm{res}_E^{J_4}(H^*(J_4)) = \mathbb{DA}$$

を利用して得られている. $E \in \mathrm{Syl}_p(G)$ であるとき, G を (E,E)-両側集合とみることにより $A_p(E,E)$ の要素とみることができ, これより

$$H^*(E)e = \mathrm{res}_E^G(H^+(G)) \simeq H^+(G)$$

となる冪等元 e が得られる. よって $p = 3$ (あるいは $5, 7$) の場合には単なる同型ではなく, 等式

$$H^*(E)e = \mathbb{DA}^+$$

の成り立つ冪等元が存在していることがわかる.
　他方, 一般の p に対しては, これに対応するような性質を持つ有限群やフュージョンシステムは存在しないのであるが, やはり

$$H^*(E)e = \mathbb{DA}^+$$

となる特殊な冪等元を構成することができる. 特に, $H^*(E)e$ は (次数 0 部分を付け加えて) 環構造を持つことがわかる. しかし, このような冪等元, あるいは対応する両側集合が, E を Sylow p-部分群に持つ有限群や E 上のフュージョンシステムの様な, 意味のある構造と関係するものであるかどうかは, 現在のところ不明である.

謝辞. 講演の機会を与えていただきました竹ヶ原さん並びに関係の方々に感謝いたします.

References

[1] D. J. Benson, Stably splitting BG, Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1996), 189-198.

[2] D. J. Benson and M. Feshbach, Stable splittings of classifying spaces of finite groups, Topology 31 (1992), 157-176.

[3] S. Bouc, Biset functor for finite groups, Lecture Notes in Mathematics 1990, Springer (2010).

[4] S. Bouc, R. Stancu and J. Thévenaz, Simple biset functors and double Burnside ring, arXiv: 1203.0195.

[5] J. Dietz and S. Priddy, The stable homotopy type of rank two p-groups, *Homotopy theory and its applications*, Contemp. Math. 188, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995), 93-103.

[6] D. J. Green, On the cohomology of the sporadic simple group J_4, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 113 (1993), 253-266.

[7] 飛田明彦, 有限群の両側 Burnside 環の表現論, 数理解析研究所講究録 1784 (2012), 57-63.

[8] A. Hida and N. Yagita, Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial p-group, arXiv:1210.0639.

[9] I. J. Leary, The integral cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991), 25-32.

[10] I. J. Leary, The mod-p cohomology rings of some p-groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 112 (1992), 63-75.

[11] G. Lewis, The integral cohomology rings of groups of order p^3, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 501-529.

[12] J. Martino and S. Priddy, The complete stable splitting for the classifying space of a finite group, Topology 31 (1992), 143-156.

[13] A. Ruiz and A. Viruel, The classification of p-local finite groups over the extraspecial group of order p^3 and exponent p, Math. Z. 248 (2004), 45-65.

[14] P. Webb, Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and decomposition of classifying spaces, J. Pure Appl. Algebra 88 (1993), 265-304.

[15] N. Yagita, Stable splitting and cohomology of p-local finite groups over the extraspecial p-group of order p^3 and exponent p, Geometry and Topology Monographs 11 (2007), 399-434.