数理解析研究所講究録
第 1873 巻 2014 年 122-125

一般導分に付随した関手[1]

岡山県立大学・情報工学部　小松 弘明 (Hiroaki Komatsu)
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University

導分の概念を一般化した一般導分をさらに一般化して，両側加群の間の一般導分を [5] で提案した．そして，分離環拡大との関連を調べた．本稿では分離環拡大を両側加群の一般導分によって特徴付ける．また，多元環の微分加群を両側加群の関手に拡張し，その性質を調べる．

本稿で扱う環はすべて単位元を有し，環上の加群はすべて単位元が恒等的に作用するものとする．常に R は可換環を表し，K, L は R 多元環を表す．A は K 環で B は L 環を表す．即ち，R 多元環の準同型写像 $K \to A$ と $L \to B$ で単位元を単位元に移すものが与えられたとするのである．また，左 A 加群の圏を ${}_A\mathbf{M}$ で表し，(A, B) 両側加群で左右からの R の作用が等しいもの全体のなす圏を ${}_A\mathbf{M}_B$ で表す．M, $N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して，M から N への (A, B) 準同型写像の全体を ${}_A\mathrm{Hom}_B(M, N)$ で表す．

1. 両側加群の一般導分

$M \in {}_A\mathbf{M}_A$ とする．(K, K) 準同型写像 $f : A \to M$ で

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) \qquad (x,\ y \in A)$$

を満たすものを K 導分という．導分は微分演算子とも呼ばれ，古くから研究されてきた．20 世紀の終盤になって，導分の一般化が Brešar [2], Leger・Luks [6], Nakajima [8] によって提案された．それらは単位元を有する多元環に対してはすべて同じ概念である ([5, Theorem 6])．(K, K) 準同型写像 $f : A \to M$ で

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) - xf(1)y \qquad (x,\ y \in A)$$

を満たすものが，K 一般導分である．この関係式は

$$f(xyz) = f(xy)z + xf(yz) - xf(y)z \qquad (x,\ y,\ z \in A)$$

と同値である．筆者はこの第二の関係式に着目することによって，両側加群の間の一般導分の概念を提案した．

定義 1.1 ([5]). M, $N \in {}_A\mathbf{M}_B$ とする．(K, L) 準同型写像 $f : M \to N$ で

$$f(amb) = f(am)b + af(mb) - af(m)b \qquad (a \in A,\ m \in M,\ b \in B)$$

を満たすものを (K, L) 一般導分という．M から N への (K, L) 一般導分の全体がなす集合を ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(M, N)$ で表す．

[1] 本論文は投稿予定の論文の予報である．

再び $M \in {}_A\mathbf{M}_A$ とする．M の元 m が定める内部導分とは，R 導分

$$A \ni x \mapsto xm - mx \in M$$

のことである．この概念も一般化されており，M の元 m, n によって定まる R 一般導分

$$A \ni x \mapsto xm + nx \in M$$

は一般内部導分と呼ばれている．本稿では，両側加群の間の一般内部導分を提案する．

定義 1.2. 各 M, $N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して，

$${}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}(M,N) = {}_A\mathrm{Hom}_L(M,N) + {}_K\mathrm{Hom}_B(M,N)$$

とおく．${}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}(M,N)$ の元を (K,L) 一般内部導分という．

[5] でも一般内部導分を扱ったのだが，そこでは一般内部導分という呼称を用いていない．明らかに，${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{L/B}$ は関手 ${}_K\mathrm{Hom}_L(-,-) : {}_A\mathbf{M}_B \to {}_R\mathbf{M}$ の部分関手となり，${}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}$ は ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}$ の部分関手となる．

例 1.3. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x,\ y,\ z,\ w \in R \right\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x,\ y, z \in R \right\}$ のとき，写像 $f : A \ni \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in A$ は ${}_{A/R}\mathrm{GDer}_{B/R}(A,A)$ に属するが，${}_{A/R}\mathrm{GInn}_{B/R}(A,A)$ には属さない．

2. 普遍一般導分

両側加群の一般導分について普遍的なものが [5] において示されている．ここでは，それとは異なった構成方法を紹介する．

各 $M \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して，(K,L) 準同型写像

$$E_M : A \otimes_K M \otimes_L B \to A \otimes_K M \otimes_L B$$

を $E_M(a \otimes m \otimes b) = a \otimes m \otimes b - 1 \otimes am \otimes b - a \otimes mb \otimes 1 + 1 \otimes amb \otimes 1$ によって定め，その余核を

$$\pi_M : A \otimes_K M \otimes_L B \to \mathcal{U}(M)$$

とする．E_M の像は $A \otimes_K M \otimes_L B$ の (A,B) 部分加群であるから，関手

$$\mathcal{U} : {}_A\mathbf{M}_B \to {}_A\mathbf{M}_B$$

を得る．また，π_M は (A,B) 準同型写像である．(K,L) 準同型写像

$$\eta_M : M \ni m \mapsto 1 \otimes m \otimes 1 \in A \otimes_K M \otimes_L B$$

を用いて

$$\upsilon_M = \pi_M \eta_M : M \to \mathcal{U}(M)$$

とおく．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2.1. 各 $M,\ N \in {}_A\mathrm{M}_B$ に対して，R 線形写像

$$ {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(M),\ N) \ni \varphi \mapsto \varphi v_M \in {}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(M,N) $$

は自然同型である．

ところで，[5, Corollary 14] では，ある $\mathcal{J} \in {}_A\mathrm{M}_B$ を用いて，$M,\ N \in {}_A\mathrm{M}_B$ に関する自然同型

$$ {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{J} \otimes_{A\otimes_R B^{op}} M,\ N) \simeq {}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(M,N) $$

が得られているから，自然同型

$$ \mathcal{U}(M) \simeq \mathcal{U}(A \otimes_R B) \otimes_{A\otimes_R B^{op}} M $$

が導かれ，

$$ \begin{aligned} {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(M),\ N) &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_B\big(\mathcal{U}(A\otimes_R B)_{A\otimes_R B^{op}} M,\ N\big) \\ &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_B\big(M,\ {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(A\otimes_R B),\ N)\big) \\ &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_B\big(M,\ {}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(A\otimes_R B,\ N)\big) \end{aligned} $$

が成り立つ．よって，次の結果を得る．

定理 2.2. 関手 $\mathcal{U}$ は関手 ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(A\otimes_R B,\ -) : {}_A\mathrm{M}_B \to {}_A\mathrm{M}_B$ の左随伴関手である．

3. 分離環拡大の一般導分による特徴付け

Auslander・Goldman [1] によって導入された分離多元環の概念は，Hirata・Sugano [4]，Miyashita [7] によって環拡大にまで拡張された．写像 $A\otimes_K A \ni x\otimes y \mapsto xy \in A$ が (A,A) 準同型写像として分裂するとき，K 環 A は分離的であるという．R 多元環が分離的であるためにはすべての R 導分が内部導分であることが必要十分である．この事実は環拡大でも成り立つことが Elliger [3, Satz 4.2] で示された．筆者は両側加群の一般導分について関連する結果を得た ([5, Theorems 16, 17, 18])．次の定理はそれらを一般化するものである．

定理 3.1. K 環 A について，次の条件は同値である．
(1) A は分離 K 環である．
(2) 任意の R 多元環 L，任意の L 環 B に対して ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L} = {}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}$ である．
(3) 任意の $M \in {}_A\mathrm{M}_A$ に対して ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{A/K}(M,M) = {}_{A/K}\mathrm{GInn}_{A/K}(M,M)$ である．

4. 分離関手

分離環拡大と結び付きがある分離関手について考察する．関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が分離関手であるとは，$X,Y \in \mathcal{C}$ に関する自然変換

$$ \Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),\ F(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) $$

が存在して，すべての $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ に対して $\Phi_{X,Y}(F(f)) = f$ が成り立つことである ([9]). K 環 A が分離的であることと制限関手 ${}_A\mathbf{M} \to {}_K\mathbf{M}$ が分離的であることとは同値である ([9, Proposition 1.3]).

次の結果を得る.

定理 4.1. A が分離 K 環で B が分離 L 環ならば，関手 ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(A \otimes_R B,\ -)$ および関手 $\mathcal{U}$ は共に分離関手である.

References

[1] M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 367–409.

[2] M. Brešar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, **33** (1991), 89–93.

[3] S. Elliger, Über Automorphismen und Derivationen von Ringen, *J. Reine Angew. Math.*, **277** (1975), 155–177.

[4] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 360–373.

[5] H. Komatsu, Generalized derivations of bimodules, *Intern. J. Pure Appl. Math.*, **77** (2012), 579–593.

[6] G. F. Leger and E. M. Luks, Generalized derivations of Lie algebras, *J. Algebra*, **228** (2000), 165–203.

[7] Y. Miyashita, Finite outer Galois theory of non-commutative rings, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, **19** (1966), 114–134.

[8] A. Nakajima, On categorical properties of generalized derivations, *Scientiae Math.*, **2** (1999), 345–352.

[9] C. Năstăsescu, M. van den Bergh, and F. van Oystaeyen, Separable functors applied to graded rings, *J. Algebra*, **123** (1989), 397–413.