数理解析研究所講究録
第1873巻 2014年 40-47

双対安定的捩れ理論の一般化

函館工業高等専門学校・一般科目理数系 竹花靖彦 (Yasuhiko Takehana)
General Education, Hakodate National College of Tecnology

0. 序

R は単位元を持つ結合的右完全環とする．Mod-R で右 R-加群全体を表し，特に断らない限り加群はユニタリーな右 R-加群を表す．右 R 加群 M に対し $0 \to K(M) \to P(M) \to M \to 0$ を M の射影被覆とする (即ち $P(M)$ は射影加群で $K(M)$ は $P(M)$ の小加群である)．Mod-R の恒等関手の部分関手を弱根基と言う．弱根基 σ に対し任意の加群 M とその部分加群 N について $M \supseteq \sigma(M)$ であり $\sigma(M/N) \supseteq (\sigma(M)+N)/N$ が成り立つ．弱根基 σ に対し $\sigma(M/N) = (\sigma(M)+N)/N$ が成り立つとき σ は全型保持であるという．任意の加群 M に対しいつでも $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ であるとき弱根基 σ は冪等であると言い，$\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ がいつでも成立するときは弱根基 σ は根基であるとい言う．全型保持弱根基は根基になることが良く知られている．弱根基 σ に対して $\mathcal{T}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R : \sigma(M) = M\}$ で定義しその元を σ-torsion 元と言い $\mathcal{F}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R : \sigma(M) = 0\}$ で定義してその元を σ-torsionfree 元と言う．Mod-R の部分クラス $\mathcal{T}, \mathcal{F}$ に対し次の (1),(2),(3) が成立するとき $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は Mod-R において捻れ理論であると言われる．(1) $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$. (2) $\mathrm{Hom}_R(M, \mathcal{F}) = 0$ であるならば $M \in \mathcal{T}$ である．(3) $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{T}, M) = 0$ であるならば $M \in \mathcal{F}$. である．$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が捻れ理論のとき付随する冪等根基 t が存在して $\mathcal{T} = \mathcal{T}_t, \mathcal{F} = \mathcal{F}_t$ と書ける．逆に冪等根基 t があれば $(\mathcal{T}_t, \mathcal{F}_t)$ は捻れ理論になる．捻れ理論 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に対し $\mathcal{T}$ が部分加群を取ることで閉じているなら遺伝的捻れ理論と言う．$\mathcal{F}$ が商加群で閉じているなら双対遺伝的捻れ理論と言う．また $\mathcal{T}$ が移入包絡で閉じているなら安定的捻れ理論と言う．$\mathcal{F}$ が射影被覆で閉じているなら双対安定的捻れ理論と言う．加群 M とその部分加群 N に対し $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ であるなら N を M の σ-部分加群と呼ぶ．$N \in \mathcal{F}_\sigma$ なら M/N を M の σ-商加群と呼ぶ．また $E_\sigma(M)/M := \sigma(E(M)/M)$ によって M の σ-移入包絡を $E_\sigma(M)$ で定義する．また M の σ-射影被覆を $P_\sigma(M) := P(M)/\sigma(K(M))$ で定義する．$\mathcal{T}$ が σ-部分加群で閉じているとき捻れ理論 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は σ-遺伝的捻れ理論と呼ぶ．$\mathcal{F}$ が σ-商加群で閉じているとき $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は σ-双対遺伝的捻れ理論と呼ぶ．$\mathcal{T}$ が σ-移入包絡で閉じているとき $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は σ-安定的捻れ理論と呼ぶ．$\mathcal{F}$ が σ-射影被覆で閉じているとき $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は σ-双対安定的捻れ理論と呼ぶ．これまで $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に付随する冪等根基 t とは別の冪等根基 σ を用いて [5][6][7] において σ-遺伝的捻れ理論, σ-双対遺伝的捻れ理論, σ-安定的捻れ理論について研究を行った．ここでは σ-双対安定的捻れ理論について述べる．また Eckman and Shopf の定理の双対の拡張と Wu, Jans and Miyashita の定理の一般化を述べる．

1. 双対安定的捻れ理論の拡張

σ は冪等根基とする．$\mathrm{Hom}_R(M,-)$ が $A \in \mathcal{F}_\sigma$ である短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ の完全性を保つとき加群 M は σ-射影的であると言う．射影加群 P に対し σ-torsion 部分加群 K での剰余加群 P/K は σ-射影的になることは良く知られている．加群 M に対し $P_\sigma(M)$ が σ-射影的で，$K_\sigma(M)$ が σ-torsionfree で $P_\sigma(M)$ の小部分加群であるとき $0 \to K_\sigma(M) \to P_\sigma(M) \to M \to 0$ を M の σ-射影被覆と言う．任意の加群 M に対し $P_\sigma(M) = P(M)/\sigma(K(M)), K_\sigma(M) = K(M)/\sigma(K(M))$ で与えられる．加群 M が加群 X の σ-双対本質的拡大とはある全射 $h : M \twoheadrightarrow X$ があって $\mathrm{ker}h$ が σ-torsioinfree で M の小部分加群であるときに言う．この全射はその性質から極小全射と呼ばれる．加群 M に対し $P_\sigma(M)$ は M の σ-双対本質的拡大になる．R. L. Bernhardt は **[3]** において $\mathcal{F}$ が射影被覆で閉じているとき捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は双対安定的捻れ理論と呼び，t が捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ に付随する冪等根基であるとき任意の射影加群 P に対し $t(P)$ がいつも P の直和因子になることと同値であることを見出した．$\mathcal{F}$ が σ-射影被覆で閉じているとき捻れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は σ-双対安定的捻れ理論と呼ぶ．

補題 1[6]. σ は冪等根基とする．加群 M とその部分加群 N について次の完全列を考える．ただし f と g は σ-射影被覆に付随する全射で j は標準的全射である．

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to K_\sigma(M) & \to & P_\sigma(M) & \xrightarrow{f} & M & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow_j & & \\
0 \to K_\sigma(M/N) & \to & P_\sigma(M/N) & \underset{g}{\to} & M/N & \to & 0,
\end{array}
$$

g は極小な全射になるから $P_\sigma(M)$ の σ-射影性により $jf = gh$ である $h : P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N)$ がある．このとき次の (1)(2) が成立する．

(1) $M \xrightarrow{j} M/N$ が σ-双対本質的拡大なら $h : P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N)$ は同型である．

(2) σ が全型保持で $h : P_\sigma(M) \to P_\sigma(M/N)$ が同型ならば M は M/N の σ-双対本質的拡大である．

弱根基 t が σ-双対安定的とは $\mathcal{F}_t$ が σ-射影被覆で閉じているときに言う．

定理 2. t は根基で σ は冪等根基とする．次の条件を考える．

(1) t は σ-双対安定的である．

(2) σ-射影加群 P に対し $P/t(P)$ もまた σ-射影加群である．

(3) 補題 1 において N の代わりに $t(M)$ を当てはめて次の可換図式を考える．このとき $t(P_\sigma(M))$ は $\mathrm{ker}f$ に含まれる．

$$
\begin{array}{ccc}
P_\sigma(M) & \xrightarrow{h} & M \to 0 \\
\downarrow_f & & \downarrow_j \\
P_\sigma(M/t(M)) & \underset{g}{\to} & M/t(M) \to 0
\end{array}
$$

(4) $\mathcal{F}_t$ は σ-双対本質的拡大で閉じている．

(5) 任意の σ-射影加群 P で $t(P) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものとする．このとき $t(P)$ は P の直和因子になる．

そのとき (1)⇐(5)⟺(2)⟺(1)⟺(3),(4)⟹(1) が成立する．$\mathcal{F}_t$ は σ-商加群で閉じているならば全ての条件は同値である．

証明. (1)→(2): P は σ-射影加群とする．$P/t(P) \in \mathcal{F}_t$ であるから仮定より $P_\sigma(P/t(P)) \in \mathcal{F}_t$ が従う．次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P & & \\ & & & f \swarrow & \downarrow h & & \\ 0 \to K_\sigma(P/t(P)) & \to & P_\sigma(P/t(P)) & \underset{g}{\to} & P/t(P) & \to 0, & \end{array}$$

h は標準的全射で，g は $P/t(P)$ の σ-射影被覆から得られた全射で f は $P_\sigma(P/t(P))$ の σ-射影性から誘導された準同型とする．

$f(t(P)) \subseteq t(P_\sigma(P/t(P))) = 0$ であるから f は $f' : P/t(P) \to P_\sigma(P/t(P))$ $(x+t(P) \longmapsto f(x))$ を誘導する．従って $x \in P$ に対し $h(x) = gf(x) = gf'h(x)$ が成立し g は分裂する．従って $P/t(P)$ は σ-射影加群 $P_\sigma(P/t(P))$ の直和因子である．よって $P/t(P)$ はまた σ-射影加群となる．

(2)→(5): P を σ-射影加群で $t(P) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものとする．仮定より $P/t(P)$ は σ-射影的である．よって完全列 $(0 \to t(P) \to P \to P/t(P) \to 0)$ は分裂するから $t(P)$ は P の直和因子である．

(5)→(1): M は $\mathcal{F}_t$ の元とする．完全列 $(0 \to K_\sigma(M) \to P_\sigma(M) \underset{f}{\to} M \to 0)$ を考える． $f(t(P_\sigma(M))) \subseteq t(M) = 0$ であるから $K_\sigma(M) = \ker f \supseteq t(P_\sigma(M))$ である．$K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $t(P_\sigma(M)) \in \mathcal{F}_\sigma$ となる．$P_\sigma(M)$ は σ 射影的であるから仮定より $t(P_\sigma(M))$ は $P_\sigma(M)$ の直和因子である．よって $P_\sigma(M)$ の部分加群 K があって $P_\sigma(M) = t(P_\sigma(M)) \oplus K$ となる．$K_\sigma(M) = \ker f \supseteq t(P_\sigma(M))$ であるから $P_\sigma(M) = K_\sigma(M) + K$ が言える． $K_\sigma(M)$ は $P_\sigma(M)$ の小加群であるから $P_\sigma(M) = K$ が従う．よって $t(P_\sigma(M)) = 0$ となる．

(1)→(3): 次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} P_\sigma(M) & \xrightarrow{h} & M \to 0 \\ f \downarrow & & \downarrow j \\ P_\sigma(M/t(M)) & \xrightarrow{g} & M/t(M) \to 0, \end{array}$$

j は標準的全射で h と g は σ-射影被覆に付随する全射であり f は $P_\sigma(M)$ の σ-射影性より得られる準同型である．

g は極小な全射になるから f は全射である．仮定より $P_\sigma(M/t(M)) \in \mathcal{F}_t$ であるから $f(t(P_\sigma(M))) \subseteq t(P_\sigma(M/t(M))) = 0$ が言える．よって $t(P_\sigma(M)) \subseteq \ker f$ である．

(3)→(1): $M \in \mathcal{F}_t$ とする．上の可換図式より f は恒等写像である．よって $t(P_\sigma(M)) \subseteq \ker f = 0$ が成立する．

(1)→(4): $N(\in \mathcal{F}_\sigma)$ は $M/N(\in \mathcal{F}_t)$ である M の小加群とすると仮定より $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{F}_t$ となる．補題1より $P_\sigma(M/N) \simeq P_\sigma(M)$ であるから $P_\sigma(M) \in \mathcal{F}_t$ が言える．完全列 $0 \to K_\sigma(M) \to P_\sigma(M) \to M \to 0$ を考える．仮定より $\mathcal{F}_t$ は σ-商加群で閉じているから $M(\in \mathcal{F}_t)$ が従う．

(4)→(1): $P_\sigma(M)$ は $M(\in \mathcal{F}_t)$ の σ-双対本質的拡大であるから，$\mathcal{F}_t$ は σ-射影被覆で閉じている．

(5)→(2): P は σ-射影加群とする．短完全列 $0 \to t(P)/\sigma(t(P)) \to P/\sigma(t(P)) \to P/t(P) \to 0$ を考える．$\sigma(t(P))(\in \mathcal{T}_\sigma)$ であるから $P/\sigma(t(P))$ は σ-射影的であることが確かめられる．t は根基であるから良く知られている事実から $t(P/\sigma(t(P))) = t(P)/\sigma(t(P))$ が成立する．よって $P/\sigma(t(P))$ は σ-射影的で $t(P/\sigma(t(P))) \in \mathcal{F}_\sigma$ となり，仮定より $t(P/\sigma(t(P)))$ は $P/\sigma(t(P))$ の直和因子になる．よって上の完全列は分裂し $P/t(P)$ は σ-射影加群 $P/\sigma(t(P))$ の直和因子であるから $P/t(P)$ は σ-射影的である．

注意．弱根基 t が全型保持であることと t が根基で $\mathcal{F}_t$ が商加群で閉じていることとは同値であることは良く知られている．従って t が全射保持で σ が冪等根基のとき定理2の条件は全て同値である．また R が完全環でないときでも条件 (2) と (5) は同値であるので弱根基 t が σ 双対安定的であることの定義として条件 (2) と (5) を採用すると良い．σ が恒等写像のとき次の系が得られる．

系 3. t は根基とする．次の条件は (4) を除いて同値である．t は全射保持なら全ての条件は同値である．

(1) t は双対安定的である．(すなわち $\mathcal{F}_t$ は射影被覆で閉じている．)

(2) 射影加群 P に対し $P/t(P)$ も射影加群になる．

(3)
$$\begin{array}{ccc} P(M) & \xrightarrow{h} & M \to 0 \\ \downarrow_f & & \downarrow_j \\ P(M/t(M)) & \underset{g}{\to} & M/t(M) \to 0, \end{array}$$

j は標準的全射で,h と g は射影被覆に付随する全射で，f は $P(M)$ の射影性から誘導される全射とする．そのとき $t(P(M)) \subseteq \ker f$ が成り立つ．

(4) $\mathcal{F}_t$ は双対本質的拡大で閉じている．(即ち N は M の小加群で $M/N \in \mathcal{F}_t \Rightarrow M \in \mathcal{F}_t$)

(5) 射影加群 P に対し $t(P)$ は P の直和因子である．

2. Eckman & Shopf の定理の双対

[7] において捻れ理論的に Eckman & Shopf の定理を拡張を述べた．ここではその双対を述べる．

補題 3. P が σ-射影的なら $P_\sigma(P)$ は P と同型である．

証明．P が σ-射影的なら完全列 $0 \to \ker f \to P_\sigma(P) \xrightarrow{f} P \to 0$ は分裂する．そのとき $\ker f$ は $P_\sigma(P)$ の小加群であるから $\ker f = 0$ が従う．

σ は冪等根基とする．そのとき P が σ-射影的なら $P \xrightarrow{f} M$ は M の σ-射影拡大であると言う．$\ker f$ が P の小加群で $\ker f \in F_\sigma$ ならば $P \xrightarrow{f} M$ は M の σ-双対本質的拡大であるという．さてここで Eckman&Shopf の定理の双対の捻れ理論的拡張を σ が全型保持であることを仮定せず冪等根基のみ仮定して述べる．

定理 4. $P \xrightarrow{f} M$ を与える．σ は冪等根基とする．そのとき次の条件は同値である．

(1) P は σ-射影的であり, $P \xrightarrow{f} M$ は M の σ-双対本質的拡大である．

(2) P は M の極小な σ-射影拡大である．(i.e. P は σ-射影的でもし I が σ-射影的で $P \xrightarrow{h} I, I \twoheadrightarrow M$ であるなら h は同型である．)

(3) P は M の極大な σ-双対本質的拡大である．(i.e. $P \xrightarrow{f} M$ は M の σ-双対本質的拡大であり, もし $I \xrightarrow{h} P$ と $I \xrightarrow{h} P \twoheadrightarrow M$ の合成が M の σ-双対本質的拡大ならば h は同型である．)

(4) P は $P_\sigma(M)$ に同型である．

証明. (1)→(2): P は σ-射影的で $P \xrightarrow{f} M$ は M の σ-双対本質的拡大とする．次の可換図式を考える．ただし g, h は全射である．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \ker h & \to & P & \xrightarrow{h} & I & \to & 0 \\ & & & & & \searrow_f & \downarrow_g & & \\ & & & & & & M & & \end{array}$$

$\mathcal{F}_\sigma \ni f^{-1}(0) = h^{-1}(g^{-1}(0)) \supseteq h^{-1}(0)$ であるから $\mathcal{F}_\sigma \ni h^{-1}(0) = \ker h$ が従い, $\ker f \supseteq \ker h$ も従う．$\ker f$ は P の小部分加群であるから $\ker h$ も P の小部分加群である．I は σ-射影的だからある加群 L があって P の部分加群になり $P = \ker h \oplus L$ で $L \cong I$ となる．$\ker h$ は P の小部分加群であるから $P = L$ であり従って $P \cong I$ となる．

(2)→(1): $P \xrightarrow{f} M$ は M の極小 σ-射影拡大とする．

次の図式を考える．補題3より j は同型である．

$$\begin{array}{ccc} P_\sigma(P) & \xrightarrow{j} & P \to 0 \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ P_\sigma(M) & \xrightarrow{h} & M \to 0, \end{array}$$

そこで j, h は σ-射影被覆に付随する全射である．

h は M への極小全射であり, fj は全射であるから g も全射である．$P \xrightarrow{f} M$ は M の極小 σ-射影拡大であり, $f = hgj^{-1}$ であるから gj^{-1} は同型である．よって g は同型である．$\ker f = f^{-1}(0) = j(g^{-1}(h^{-1}(0)))$ であり, $h^{-1}(0)$ は $P_\sigma(M)$ の小部分加群で σ-torsionfree である．$\ker f$ は P の小部分加群である．また g^{-1} と j は同型であるから $\ker f \in \mathcal{F}_\sigma$ となる．よって $P \xrightarrow{f} M$ は σ-双対本質的拡大である．

(1)→(3): $I \xrightarrow{g} P$ を全射とする．$P \xrightarrow{f} M$ と $I \xrightarrow{h} M$ はともに M の σ-双対本質的拡大で $fg = h$ を満たすものとする．次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ g \swarrow & \downarrow h & \\ P & \underset{f}{\to} M & \to 0. \end{array}$$

f は極小全射となるから g も全射である．h も f も極小全射であるから g も極小全射である． $\mathcal{F}_\sigma \ni h^{-1}(0) = g^{-1}(f^{-1}(0)) \supseteq g^{-1}(0)$ であるから $\mathcal{F}_\sigma \ni g^{-1}(0)$ が従う．P は σ-射影的であるから $0 \to \ker g \to I \xrightarrow{g} P \to 0$ は分裂する．よって I の部分加群 H が存在して $H \cong P$ で $I = \ker g \oplus H$ となる．$\ker g$ は I の小部分加群であるから $I = H \cong P$ となる．

(3)→(1): P が σ-射影的であることを言えば良い．$P \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ は M の σ-双対本質的拡大であるから補題 1 より $P_\sigma(P) \to P_\sigma(M)$ は同型である．次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} P_\sigma(P) & \to & P_\sigma(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \to & M \end{array}$$

$P_\sigma(P)(\simeq P_\sigma(M) \twoheadrightarrow M)$ は M の σ-双対本質的拡大で $P(\overset{f}{\twoheadrightarrow} M)$ は M の極大な σ-双対本質的拡大で, $P_\sigma(P) \twoheadrightarrow P$ であるから仮定より $P_\sigma(P) \cong P$ となる．それで P は σ-射影的になる．

(1)→(4): 補題 1 より $P_\sigma(P) \simeq P_\sigma(M)$ である．補題 3 より $P_\sigma(P) \simeq P$ が得られ $P \simeq P_\sigma(M)$ が成立する．

(4)→(1): σ-射影被覆の性質より明らかである．

σ を恒等写像とすると次が得られる．

系 **5.** $P \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ を全射とする． そのとき次は同値である．

(1) P は射影加群で $P \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ は M の双対本質的拡大である (i.e. $\ker f$ が P の小加群である．).

(2) P は M の極小射影拡大である (i.e. P は射影加群で I が射影加群で $P \overset{h}{\twoheadrightarrow} I, I \twoheadrightarrow M$ であるとき h は同型である．).

(3) P は M の極大双対本質的拡大である (i.e. $P \overset{f}{\twoheadrightarrow} M$ は M の双対本質的拡大で $I \overset{h}{\twoheadrightarrow} P$ が全射で $I \overset{h}{\twoheadrightarrow} P \twoheadrightarrow M$ が M の双対本質的拡大なら h は同型である).

(4) P は $P(M)$ と同型である．

3. WU, JANS AND MIYASHITA の定理と AZUMAYA の定理の捻れ理論的拡張

Johnson and Wong の定理の双対化を Wu, Jans, Miyashita が行い, Azumaya が加群的に一般化した．[7] においてその捻れ理論的拡張を述べたがここではその双対の Azumaya による加群的拡張の捻れ理論的拡張を述べる．σ を冪等根基とする．加群 M, N について M が σ-N-射影的とは $\mathrm{Hom}_R(M,\ \ )$ が短完全列 $0 \to K \to N \to N/K \to 0$ (ただし $K \in \mathcal{F}_\sigma$ とする．) の完全性を保つ時に言う．

加群 M について σ-射影被覆を次のように $P_\sigma(M) \overset{\pi_M^\sigma}{\twoheadrightarrow} M$ と書くことにする．

定理 **7.** σ を冪等根基とし M,N を加群とする．次の条件を考える．

(1) 任意の $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(M), P_\sigma(N))$ に対し $\gamma(K_\sigma(M)) \subseteq K_\sigma(N)$ が成立する．

(2) M は σ-N-射影的である．

そのとき (1)→(2) が成立する．σ が全型保持なら (2)→(1) も成立する．

証明．(1)→(2): $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N/K)$ で $K \in \mathcal{F}_\sigma$ とする．そのとき $h \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(M), N)$ が存在して $f\pi_M^\sigma = nh$ となる．ただし n は標準的な全射 $N \twoheadrightarrow N/K$ とする．そのとき $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(M), P_\sigma(N))$ があって $h = \pi_N^\sigma \gamma$ が成り立つ．よって次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccccc} & & P_\sigma(M) & \overset{\pi_M^\sigma}{\twoheadrightarrow} & M \\ & \gamma \swarrow & \downarrow h & & \downarrow f \\ P_\sigma(N) & \underset{\pi_N^\sigma}{\twoheadrightarrow} & N & \underset{n}{\rightarrow} & N/K \end{array}$$

仮定より γ は $\gamma' : P_\sigma(M)/K_\sigma(M) \to P_\sigma(N)/K_\sigma(N)$ を誘導し従って γ' は $\gamma'' : M \to N$ を導き $f = n\gamma''$ が言える．

(2)→(1): σ は全型保持で $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(P_\sigma(M), P_\sigma(N))$ とする．$\gamma(K_\sigma(M)) \subseteq K_\sigma(N)$ を示す．$T = \gamma(K_\sigma(M)) + K_\sigma(N)$ と置く．$T \supseteq \gamma(K_\sigma(M))$ であるから γ は次の γ' を導く．$\gamma' : M \simeq P_\sigma(M)/K_\sigma(M) \to P_\sigma(N)/\gamma(K_\sigma(M)) \to P_\sigma(N)/T \to N/\pi_N^\sigma(T)$ $(\pi_M^\sigma(x) \longleftrightarrow x + K_\sigma(M) \to \gamma(x) + \gamma(K_\sigma(M)) \to \gamma(x) + T \to \pi_N^\sigma(\gamma(x)) + \pi_N^\sigma(T))$. n_N を $N \twoheadrightarrow N/\pi_N^\sigma(T)$ の標準的全射とする．$\pi_N^\sigma(T) = \pi_N^\sigma(\gamma(K_\sigma(M)) + K_\sigma(N)) = \pi_N^\sigma(\gamma(K_\sigma(M))$ であり $K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であって $\mathcal{F}_\sigma$ は商加群を取ることで閉じているから $\pi_N^\sigma(T) \in \mathcal{F}_\sigma$ になる．M は σ-N-射影的であるから $\beta : M \to N$ があって $\gamma' = n_N\beta$ となる．従って次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & \beta \swarrow & \downarrow \gamma' & & \\ 0 \to \pi_N^\sigma(T) & \to & N & \underset{n_N}{\rightarrow} & N/\pi_N^\sigma(T) & \to & 0 \end{array}$$

$P_\sigma(M)$ の σ-射影性より $\alpha : P_\sigma(M) \to P_\sigma(N)$ があって $\pi_N^\sigma\alpha = \beta\pi_M^\sigma$ が成り立つ．よって次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to K_\sigma(M) & \to & P_\sigma(M) & \overset{\pi_M^\sigma}{\twoheadrightarrow} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\ 0 \to K_\sigma(N) & \to & P_\sigma(N) & \underset{\pi_N^\sigma}{\rightarrow} & N & \to & 0 \end{array}$$

上の可換図式より $\alpha(K_\sigma(M)) \subseteq K_\sigma(N)$ が得られる．$X := \{x \in P_\sigma(M) | \gamma(x) - \alpha(x) \in K_\sigma(N)\}$ と置く．$X + K_\sigma(M) = P_\sigma(M)$ を示す．$x \in P_\sigma(M)$ に対し次が従う．$\gamma'(\pi_M^\sigma(x)) = \pi_N^\sigma(\gamma(x)) + \pi_N^\sigma(T)$, $(n_N\beta)(\pi_M^\sigma(x)) = \beta(\pi_M^\sigma x) + \pi_N^\sigma(T)$, $\gamma' = n_N\beta$. 従って $\pi_N^\sigma(\gamma(x)) + \pi_N^\sigma(T) = \beta(\pi_M^\sigma x) + \pi_N^\sigma(T)$ が言えて $\pi_N^\sigma(\gamma(x)) - \beta(\pi_M^\sigma x) \in \pi_N^\sigma(T)$ が成り立つ．$\pi_N^\sigma\alpha = \beta\pi_M^\sigma$ であるから $\pi_N^\sigma(\gamma(x)) - \pi_N^\sigma(\alpha(x)) \in \pi_N^\sigma(T)$ が言えて $\gamma(x) - \alpha(x) \in T + (\pi_N^\sigma)^{-1}(0) =$

$T + K_\sigma(N) = \gamma(K_\sigma(M)) + K_\sigma(N)$ となる．かくして $m \in K_\sigma(M)$ があって $\gamma(x) - \alpha(x) - \gamma(m) \in K_\sigma(N)$ となり，$\gamma(x-m) - \alpha(x-m) \in \alpha(m)+K_\sigma(N) \subseteq \alpha(K_\sigma(M))+K_\sigma(N) = K_\sigma(N)$ が言える．よって $x-m \in X$ であり，$x \in K_\sigma(M) + X$ が言える．よって $P_\sigma(M) = K_\sigma(M) + X$ が導かれる．ところが $K_\sigma(M)$ は $P_\sigma(M)$ の小加群であるから $X = P_\sigma(M)$ が従う．よって $\{x \in P_\sigma(M) | \gamma(x) - \alpha(x) \in K_\sigma(N)\} = P_\sigma(M)$ が言える．よって $x \in K_\sigma(M) (\subseteq P_\sigma(M))$ ならばそのとき $\gamma(x) - \alpha(X) \in K_\sigma(N)$ が言えて $\gamma(x) \in \alpha(x) + K_\sigma(N) \subseteq \alpha(K_\sigma(M)) + K_\sigma(N) = K_\sigma(N)$ となり $\gamma(K_\sigma(M)) \subseteq K_\sigma(N)$ が得られる．

定理 7 において $\sigma = 1$ と置くと [2] における Azumaya の定理の一般化が得られる．定理 7 において $M = N$ で $\sigma = 1$ と置くと [8][4] における Wu, Jans, Miyashita の定理の一般化が得られる．

References

[1] E. P. Armendariz, **Quasi-injective modules and stale torsion classes**, P. J. M. (1969), 277-280.

[2] G. Azumaya, **M-projective and M-injective modules**, unpublished.

[3] R. L. Bernhardt, **On Splitting in Hereditary Torsion Theories,** P. J. M. (1971), 31-38.

[4] Y. Miyashita, **Quasi-projective modules, Perfect modules and a Theorem for modular lattice**, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 19, 1966, 86-110.

[5] Y. Takehana, **On generalization of QF-3′ modules and hereditary torsion theories**, Math. J. Okayama Univ. 54 (2012), 53-63.

[6] Y. Takehana, **On generalization of CQF-3′ modules and cohereditary torsion theories**, Math. J. Okayama Univ. 54 (2012), 65-76.

[7] Y. Takehana, **On a generalization of stable torsion theory**, Proc. of the 43rd Symposium on Ring theory and Representation Theory, 2011, 71-78.

[8] L. E. T. Wu and J. P. Jans, **On Quasi Projectives**, Illinois J. Math. Volume 11, Issue 3 (1967), 439-448.

GENERAL EDUCATION
HAKODATE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
14-1 TOKURA-CHO HAKODATE-SI HOKKAIDO, 042-8501 JAPAN
E-mail address: takehana@hakodate-ct.ac.jp