数理解析研究所講究録
第 1874 巻 2014 年 190-197

Parity result on the partial Mordell-Tornheim double zeta function

岡本卓也
立命館大学 理工学部

Mordell-Tornheim 型と部分 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数.

Matsumoto [2] は Tornheim [7] や Mordell [3] によって導入された 2 重ゼータ関数を多重化した Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数

$$\zeta_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})=\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}m_1^{-s_1}m_2^{-s_2}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+m_2+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}},$$

を与え，Mellin-Barnes 積分を用いて，その解析的性質を考察しました．また，この関数の正の整数点での値は興味深い対象であり，様々な数学者により研究されています．

Tsumura [9] は正の整数 $p_1,\ldots,p_{r+1}$ に対して，$p_1+\cdots+p_{r+1}\not\equiv r \mod 2$ ならば，$\zeta_{MT,r}(p_1,\ldots,p_r;p_{r+1})$ が $\zeta_{MT,k}(q_1,\ldots,q_k;q_{k+1})$ の積の有理線形結合で表されることを示しました．ただし，$q_1,\ldots,q_{k+1}$ は正の整数で $k<r$ とします．これは Tornheim [7] の結果の拡張であり，$\zeta_{MT,r}$ の *Parity result* と呼ばれています．また，Huard, Williams and Zhang [1] や Onodera [5] は独立に，この結果の明示公式を与えています．

また，Subbarao and Sitaramachandrarao [6] は交代 Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数

$$S_2^j(s_1,s_2,s_3)=\sum_{m_1,m_2=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m_{j-1}+m_j}}{m_1^{s_1}m_2^{s_2}(m_1+m_2)^{s_3}}\quad(j=1,2)\tag{1}$$

のある特定の正の整数点での値を考察し，そのときは *Parity result* が成り立つことをみています．さらに，Tsumura [8] は，

$$\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(s_1,s_2,s_3)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}(2m_1+b_1)^{-s_1}(2m_2+b_2)^{-s_2}(2m_1+2m_2+b_1+b_2)^{-s_3}\tag{2}$$

を導入し (ただし，$b_1,b_2\in\{1,2\}$)，(2) の *Parity result* の明示公式を与えることによ

り，(1) の *Parity result* の明示公式を与えました．また，Nakamura [4] や Zhou, Cai and Bradley [10] も独立に (1) の *Parity result* の明示公式を与えています．

このような *Parity result* はリーマンゼータ関数の古典的に知られている

$$\zeta(2n)=\frac{|B_{2n}|(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n)!}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

という性質の拡張と捉えることができ，この性質を持つ多重ゼータ関数はよい型の多重ゼータ関数と見なすことができます．つまり，どのような型の多重ゼータ関数がこの *Parity result* という性質を持つかを考察することは大切となります．

今回は，(2) の多重化である部分 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}_{b_1,\ldots,b_r}(s_1,\ldots,s_{r+1})\\&\quad=\sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty}(2m_1+b_1)^{-s_1}\cdots(2m_r+b_r)^{-s_r}\\&\qquad\qquad\times(2m_1+\cdots+2m_r+b_1+\cdots+b_r)^{-s_{r+1}}\end{aligned}\tag{3}$$

について考察し得られた結果を紹介したいと思います (ただし，$b_1,\ldots,b_r\in\{1,2\}$).

2 重，3 重の (3) の *Parity result* の明示公式.

Onodera [5] が $\zeta_{MT,r}$ の *Parity result* を証明するために用いた方法を応用することで，2 重, 3 重の場合の (3) の *Parity result* の明示公式を与えることができました．2 重の場合は，上でも述べたようにこれまでに知られていますが，これまでとは別の方法で与えることによって，次のような簡潔な明示公式を与えることができました:

Theorem 1. (2 重の *Parity result* の明示公式) $p_1+p_2+p_3\in 2\mathbb{N}+1$ を満たす正の整数 p_1,p_2,p_3 と $b_1,b_2\in\{1,2\}$ に対して，

$$\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3)=(-1)^{p_1}\mathfrak{J}_{(b_1,b_3;b_2)}(p_1,p_3;p_2)+(-1)^{p_2}\mathfrak{J}_{(b_2,b_3;b_1)}(p_2,p_3;p_1)$$

が成り立つ．ただし，$b_3\in\{1,2\}$，$b_3\equiv b_1+b_2 \mod 2$ であり，正の整数 q_1,q_2,q_3 と $a_1,a_2,a_3\in\{1,2\}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_{(a_1,a_2;a_3)}(q_1,q_2;q_3)=\sum_k\Biggl\{&\binom{q_1+q_2-1-2k}{q_1-1}(\delta_{a_2,1}+(-1)^{a_2}2^{-2k})\\&+\binom{q_1+q_2-1-2k}{q_2-1}(\delta_{a_1,1}+(-1)^{a_1}2^{-2k})\Biggr\}\\&\times(\delta_{a_3,1}+(-1)^{a_3}2^{-q_1-q_2-q_3+2k})\zeta(2k)\zeta(q_1+q_2+q_3-2k)\end{aligned}$$

とおく．また，和は $k\in[0,\max\{q_1,q_2\}/2]$ のすべての整数をわたり，$\delta_{a,1}$ は *Kronecker's delta* とする．

Theorem 1 は Onodera の結果の一般化になっていることに注意します ([5, Theorem 3, Example 3.1]). 実際に, $b_1 = b_2 = 2$ のときが Onodera の結果と一致します. また, いくつか Theorem 1 の具体例を挙げておきます:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{1,2}(1,1,1) &= \frac{7}{16}\zeta(3),\\
\mathfrak{T}_{1,2}(3,1,1) &= \frac{31}{64}\zeta(5) - \frac{2}{32}\zeta(2)\zeta(3),\\
\mathfrak{T}_{1,2}(1,3,1) &= \frac{31}{64}\zeta(5) - \frac{7}{32}\zeta(2)\zeta(3),\\
\mathfrak{T}_{1,2}(2,2,1) &= -\frac{31}{64}\zeta(5) + \frac{5}{16}\zeta(2)\zeta(3).
\end{aligned}$$

また, 3 重の場合に対しても次のような簡潔な明示公式を与えることができました:

Theorem 2. (3 重の *Parity result* の明示公式) $p_1+p_2+p_3+p_4 \in 2\mathbb{N}$ を満たす正の整数 p_1, p_2, p_3, p_4 と $b_1, b_2, b_3 \in \{1,2\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_{b_1,b_2,b_3}(p_1,p_2,p_3,p_4) &= (-1)^{p_1}\mathfrak{K}_{(b_1,b_4;b_2,b_3)}(p_1,p_4;p_2,p_3)\\
&\quad + (-1)^{p_2}\mathfrak{K}_{(b_2,b_4;b_3,b_1)}(p_2,p_4;p_3,p_1) + (-1)^{p_3}\mathfrak{K}_{(b_3,b_4;b_1,b_2)}(p_3,p_4;p_1,p_2)\\
&\quad + (-1)^{\frac{p_1+p_2+p_3-p_4}{2}+1}\frac{(2\pi)^{p_1+p_2+p_3+p_4}}{4p_1!p_2!p_3!p_4!}\int_0^1 B_{p_1}^{b_1}(x)B_{p_2}^{b_2}(x)B_{p_3}^{b_3}(x)B_{p_4}^{b_4}(x)dx
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $b_4 \in \{1,2\}$, $b_4 \equiv b_1+b_2+b_3 \mod 2$ で正の整数 q_1, q_2, q_3, q_4 と $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1,2\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{K}_{(a_1,a_2;a_3,a_4)}(q_1,q_2;q_3,q_4)\\
&= \sum_k \left\{ \binom{q_1+q_2-1-2k}{q_1-1}(\delta_{a_2,1} + (-1)^{a_2}2^{-2k}) \right.\\
&\qquad \left. + \binom{q_1+q_2-1-2k}{q_2-1}(\delta_{a_1,1} + (-1)^{a_1}2^{-2k}) \right\}\\
&\qquad\qquad \times \zeta(2k)\mathfrak{T}_{a_3,a_4}(q_3,q_4,q_1+q_2-2k)
\end{aligned}$$

とおく. また, 和は $k \in [0, \max\{q_1,q_2\}/2]$ のすべての整数をわたるとする. さらに, ベルヌーイ多項式を用いて

$$\begin{cases} B_r^1(x) &= B_r(x) - 2^{-r}B_r(2x-[2x]),\\ B_r^2(x) &= 2^{-r}B_r(2x-[2x]) \end{cases}$$

とおく.

この Theorem 2 も Onodera の結果の一般化になっています ([5, Theorem 3, Example

3.1]). また，いくつかの具体例も挙げておきます:

$$\mathfrak{T}_{1,1,1}(1,1,1,1)=\frac{45}{32}\zeta(4),$$
$$\mathfrak{T}_{1,1,2}(1,1,1,1)=\mathfrak{T}_{1,2}(1,1,2)+\mathfrak{T}_{1,1}(1,1,2)+\frac{15}{64}\zeta(4),$$
$$\mathfrak{T}_{1,2,2}(1,1,1,1)=\mathfrak{T}_{1,2}(1,1,2)+\frac{15}{64}\zeta(4).$$

これらの定理の証明は上でも述べたように Onodera [5] の方法に基づいています．[5] では，多重ゼータ値のベルヌーイ多項式とクラウゼン関数の積の積分表示を用いています．Theorem 1, 2 の証明には Theorem 2 の中で与えた部分ベルヌーイ多項式 $B_r^1(x), B_r^2(x)$ と部分補正クラウゼン関数

$$\begin{cases}\mathfrak{Cl}_r^1(x) &= \mathfrak{Cl}_r(x)-2^{-r}\mathfrak{Cl}_r(2x-[2x]),\\ \mathfrak{Cl}_r^2(x) &= 2^{-r}\mathfrak{Cl}_r(2x-[2x])\end{cases}$$

の積の積分表示を用います．ただし，クラウゼン関数 $Cl_r(x)$ を用いて，$r=1$ のときは $x\in(0,1)$，$r\geq 2$ のときは $x\in[0,1]$ に対して，

$$\mathfrak{Cl}_r(x)=\begin{cases}(-1)^{\frac{r+1}{2}}\dfrac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}Cl_r(2\pi x) & \text{if } r\in 2\mathbb{N}-1\ ,\\ (-1)^{\frac{r}{2}}\dfrac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}Cl_r(2\pi x) & \text{if } r\in 2\mathbb{N}\end{cases}$$

とおくことにします．

2 重，3 重の (3) の積分表示.

実際に，部分ベルヌーイ多項式と部分補正クラウゼン関数を用いることで，2 重，3 重の (3) の正の整数点での値は次のように表すことができます:

Theorem 3. p_1,p_2,p_3,p_4 を正の整数とする．$p_1+p_2+p_3\in 2\mathbb{N}+1$ のとき,

$$\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3)=(-1)^{\frac{p_1+p_2+p_3+1}{2}+p_3}\frac{(2\pi)^{p_1+p_2+p_3-1}}{2p_1!p_2!p_3!}$$
$$\times\int_0^1 B_{p_3}^{b_3}(x)\{p_1\mathfrak{Cl}_{p_1}^{b_1}(x)B_{p_2}^{b_2}(x)+p_2\mathfrak{Cl}_{p_2}^{b_2}(x)B_{p_1}^{b_1}(x)\}dx$$

が成り立つ．ただし，$b_1,b_2,b_3\in\{1,2\}$，$b_1+b_2\equiv b_3 \mod 2$ とする．

さらに，$p_1+p_2+p_3+p_4\in 2\mathbb{N}$ のとき,

$$\mathfrak{T}_{b_1,b_2,b_3}(p_1,p_2,p_3,p_4)=(-1)^{\frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{2}+p_4+1}\frac{(2\pi)^{p_1+p_2+p_3+p_4-2}}{2p_1!p_2!p_3!p_4!}$$
$$\times\int_0^1 B_{p_4}^{b_4}(x)\{B_{p_1}^{b_1}(x)p_2\mathfrak{Cl}_{p_2}^{b_2}(x)p_3\mathfrak{Cl}_{p_3}^{b_3}(x)+B_{p_2}^{b_2}(x)p_3\mathfrak{Cl}_{p_3}^{b_3}(x)p_1\mathfrak{Cl}_{p_1}^{b_1}(x)$$
$$+B_{p_3}^{b_3}(x)p_1\mathfrak{Cl}_{p_1}^{b_1}(x)p_2\mathfrak{Cl}_{p_2}^{b_2}(x)-\pi^2B_{p_1}^{b_1}(x)B_{p_2}^{b_2}(x)B_{p_3}^{b_3}(x)\}dx$$

が成り立つ．ただし，$b_1,b_2,b_3,b_4\in\{1,2\}$，$b_1+b_2+b_3\equiv b_4 \mod 2$ とする．

この Theorem 3 は $p_1+p_2+p_3\in 2\mathbb{N}+1$ と $p_1+p_2+p_3+p_4\in 2\mathbb{N}$ のときのみしか与えていないが，実際には $p_1+p_2+p_3\in 2\mathbb{N}$ と $p_1+p_2+p_3+p_4\in 2\mathbb{N}+1$ のときも，同様の積分表示は持っています．Theorem 3 は証明の概略のみ与えたいと思います．

Theorem 3 の証明の概略.

まず，ϵ を小さい正の数とします．このとき，

$$\begin{aligned}&\int_{\epsilon}^{1/2-\epsilon}\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(2m_1+b_1)x}}{(2m_1+b_1)^{p_1}}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(2m_2+b_2)x}}{(2m_2+b_2)^{p_2}}\sum_{m_3=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(2m_3+b_3)x}}{(2m_3+b_3)^{p_3}}dx\\
&\to\frac{1}{2}\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=0\\2m_3+b_3\neq 2m_1+2m_2+b_1+b_2}}^{\infty}\frac{(-1)^{(b_1+b_2-b_3)}-1}{(2m_1+b_1)^{p_1}(2m_2+b_2)^{p_2}(2m_3+b_3)^{p_3}}\\
&\qquad\times(2m_1+2m_2-2m_3+b_1+b_2-b_3)^{-1}\\
&\qquad(\epsilon\to 0)\qquad(4)\end{aligned}$$

が成り立ちます．ここでは，収束に関して，細かな議論を必要としますが，それについては省略します．また，同様にすると

$$\begin{aligned}&\int_{1/2+\epsilon}^{1-\epsilon}\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(2m_1+b_1)x}}{(2m_1+b_1)^{p_1}}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(2m_2+b_2)x}}{(2m_2+b_2)^{p_2}}\sum_{m_3=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(2m_3+b_3)x}}{(2m_3+b_3)^{p_3}}dx\\
&\to\frac{1}{2}\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3=0\\2m_3+b_3\neq 2m_1+2m_2+b_1+b_2}}^{\infty}\frac{1-(-1)^{(b_1+b_2-b_3)}}{(2m_1+b_1)^{p_1}(2m_2+b_2)^{p_2}(2m_3+b_3)^{p_3}}\\
&\qquad\times(2m_1+2m_2-2m_3+b_1+b_2-b_3)^{-1}\\
&\qquad(\epsilon\to 0)\qquad(5)\end{aligned}$$

も成り立ちます．

ここで，(4) と (5) により，

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{1}\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(2m_1+b_1)x}}{(2m_1+b_1)^{p_1}}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(2m_2+b_2)x}}{(2m_2+b_2)^{p_2}}\sum_{m_3=0}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(2m_3+b_3)x}}{(2m_3+b_3)^{p_3}}dx\\
&=\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3),\end{aligned}$$

を得ることができます．

そして，$r=1$ のとき，$x\in(0,1/2)$ または $x\in(1/2,1)$，$r\geq 2$ のときは $x\in[0,1]$ で

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\exp(2\pi i(2m+1)x)}{(2m+1)^r}\\&=Li_r(e^{2\pi ix})-2^{-r}Li_r(e^{4\pi ix})=-\frac{(2\pi i)^{r-1}}{r!}\left(r\mathfrak{Cl}_r^1(x)+\pi iB_r^1(x)\right),\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\exp(2\pi i(2m+2)x)}{(2m+2)^r}\\&=2^{-r}Li_r(e^{4\pi ix})=-\frac{(2\pi i)^{r-1}}{r!}\left(r\mathfrak{Cl}_r^2(x)+\pi iB_r^2(x)\right)\end{aligned}\tag{7}$$

が成り立つことに注意し，この (6) と (7) を上の式の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3)&=(-1)^{p_3}\frac{(2\pi i)^{p_1+p_2+p_3-3}}{p_1!p_2!p_3!}\\&\times\int_0^1\prod_{j=1}^{2}\left(p_j\mathfrak{Cl}_{p_j}^{b_j}(x)+\pi iB_{p_j}^{b_j}(x)\right)\left(p_3\mathfrak{Cl}_{p_3}^{b_3}(x)-\pi iB_{p_3}^{b_3}(x)\right)dx\end{aligned}\tag{8}$$

を得ることができます．そして，さらに，

$$\int_0^1\prod_{j=1}^{3}\left(p_j\mathfrak{Cl}_{p_j}^{b_j}(x)+\pi iB_{p_j}^{b_j}(x)\right)dx=0$$

であることを (この定理の証明の前半と同様に示すことができます)，(8) に用いると

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3)=&(-1)^{p_3+1}\frac{(2\pi i)^{p_1+p_2+p_3-2}}{p_1!p_2!p_3!}\\&\times\int_0^1B_{p_3}^{b_3}(x)\prod_{j=1}^{2}\left(p_j\mathfrak{Cl}_{p_j}^{b_j}(x)+\pi iB_{p_j}^{b_j}(x)\right)dx\end{aligned}\tag{9}$$

を得ることができます．ここで，(9) の両辺の実部を比べると定理の前半を示すことができ，同様に，後半も示すことができます．□

Theorem 1, 2 の証明の概略.

Theorem 3 と部分ベルヌーイ多項式の関係式

Lemma 1. a,b を正の整数とする．このとき，$\alpha,\beta\in\{1,2\}$，$x\in[0,1)$ に対して，

$$B_a^{\alpha}(x)B_b^{\beta}(x)=\sum_{l}C_l(a,b;\alpha,\beta)B_{a+b-2l}^{\gamma}(x)+\int_0^1B_a^{\alpha}(x)B_b^{\beta}(x)dx\tag{10}$$

が成り立つ．ただし，和は $[0,(a+b)/2)$ の全ての整数をわたり，$\gamma\in\{1,2\}$ かつ $\gamma\equiv\alpha+\beta$

mod 2 で，$B^1_m = B^1_m(0)$, $B^2_m = B^2_m(0)$ とし，

$$C_l(a,b;\alpha,\beta) = \frac{a!b!}{(2l)!(a+b-2l)!}\left(\binom{a+b-1-2l}{a-1}B^{\beta}_{2l} + \binom{a+b-1-2l}{b-1}B^{\alpha}_{2l}\right)$$

とおく．

を用いると，Theorem 1, 2 の示すことができます．実際に，Theorem 1 の証明の概略を与えたいと思います．

Theorem 3 により，$p_1+p_2+p_3 \in 2\mathbb{N}+1$ を満たす正の整数 p_1, p_2, p_3 に対して，

$$\mathfrak{T}_{b_1,b_2}(p_1,p_2,p_3) = (-1)^{\frac{p_1+p_2+p_3+1}{2}+p_3}\frac{(2\pi)^{p_1+p_2+p_3-1}}{2p_1!p_2!p_3!}$$
$$\times\int_0^1 B^{b_3}_{p_3}(x)\{p_1\mathfrak{Cl}^{b_1}_{p_1}(x)B^{b_2}_{p_2}(x) + p_2\mathfrak{Cl}^{b_2}_{p_2}(x)B^{b_1}_{p_1}(x)\}dx \tag{11}$$

が成り立ちます．ここで，$b_1, b_2, b_3 \in \{1,2\}$, $b_1+b_2 \equiv b_3 \mod 2$. このとき，$(s,t) = (1,2), (2,1)$ に対して，

$$\int_0^1 B^{b_3}_{p_3}(x)p_s\mathfrak{Cl}^{b_s}_{p_s}(x)B^{b_t}_{p_t}(x)dx \tag{12}$$

を計算する必要があります．ここで，Lemma 1 を (12) に用いると，

$$\begin{aligned}&\int_0^1 B^{b_3}_{p_3}(x)p_s\mathfrak{Cl}^{b_s}_{p_s}(x)B^{b_t}_{p_t}(x)dx\\ &= \sum_l C_l(p_t,p_3;b_t,b_3)\int_0^1 B^{b_s}_{p_t+p_3-2l}(x)p_s\mathfrak{Cl}^{b_s}_{p_s}(x)dx\\ &\qquad + \int_0^1 p_s\mathfrak{Cl}^{b_s}_{p_s}(x)dx\int_0^1 B^{b_t}_{p_t}(y)B^{b_3}_{p_3}(y)dy\end{aligned} \tag{13}$$

となります．ただし，和は $[0,(p_t+p_3)/2)$ のすべての整数をわたります．

今，Theorem 3 の証明と同様にすることで，$p_1+p_2 \in 2\mathbb{N}+1$ を満たす正の整数 p_1, p_2 に対して，

$$\mathfrak{T}_b(p_1,p_2) = (-1)^{\frac{p_1+p_2-1}{2}+p_2}\frac{(2\pi)^{p_1+p_2-1}}{p_1!p_2!}\int_0^1 B^b_{p_2}(x)p_1\mathfrak{Cl}^b_{p_1}(x)dx$$

が成り立つことに注意すると ($b \in \{1,2\}$)，(13) の右辺の第一項の積分は

$$\begin{aligned}&\int_0^1 B^{b_s}_{p_t+p_3-2l}(x)p_s\mathfrak{Cl}^{b_s}_{p_s}(x)dx\\ &= (-1)^{\frac{p_1+p_2+p_3-1}{2}+p_t+p_3+l}\frac{(p_t+p_s-2l)!p_s!}{(2\pi)^{p_1+p_2+p_3-2l-1}}\mathfrak{T}_{b_s}(p_s,p_t+p_3-2l)\end{aligned} \tag{14}$$

となります．さらに，

$$\int_0^1 p_s\mathfrak{Cl}^{b_s}_{p_s}(x)dx = 0$$

であることに注意すると，Theorem 1 を示すことができます．□

この証明と同様にすることで Theorem 2 も示すことができます.

参考文献

[1] J. G. Huard, K. S. Williams and N.-Y. Zhang, *On Tornheim's double series*, Acta Arith. **75** (1996), 105-117.

[2] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in: M. A. Bennett et al.(Eds), Number Theory for the Mellennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417-440.

[3] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 368-371.

[4] T. Nakamura, Double Lerch value relations and functional relations for Witten zeta functions. Tokyo J. Math. **31** (2008), no. 2, 551–574.

[5] K. Onodera, *Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 1463-1485.

[6] M. V. Subbarao and R. Sitaramachandrarao, *On some infinite series of L. J. Mordell and their analogues*, Pacific J. Math., **119** (1985), 245-255.

[7] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math., **72** (1950), 303-314.

[8] H. Tsumura, *On alternating analogues of Tornheim's double series*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 3633-3641.

[9] H. Tsumura, *On Mordell Tornheim zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2387-2393.

[10] X. Zhou, T. Cai and D. M. Bradley, Signed q-analogs of Tornheim's double series.(English summary) Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 8, 2689–2698.

Present Address:
Takuya Okamoto
College of Science and Engineering
Ritsumeikan University
1-1-1 Nojihigashi, Kusatsu, Shiga 525-8577
Japan
E-mail: takuyaok@fc.ritsumei.ac.jp