数理解析研究所講究録
第 1874 巻 2014 年 150-160

On some properties of Dirichlet series on a domain where it is divergent

Nagasaki University
Hideaki Ishikawa

1. Introduction

ディリクレ級数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{s}}$$

を考える。ここで $a(n)$ は複素数値をとる数列とし、変数 s は複素数の範囲で考え $s=\sigma+it$ と表すことにする。講演では、$F(s)$ が複素平面 $\mathbf{C}$ に有理型関数または整関数に解析接続でき、かつ、ある解析的性質をもつための必要十分条件を、係数和

$$A(x)=\sum_{n\leq x}a(n)$$

の観点から論じた。ディリクレ級数が収束軸よりも左側に解析接続できたとして、その領域において $F(s)$ はどのような挙動をしているのか。そして、そのような $F(s)$ の解析的性質は $A(x)$ の挙動にどのように反映しているのだろうか。逆に $A(x)$ の挙動が $F(s)$ の解析的性質にどのように反映しているのだろうか。このような問題意識は解析数論における主要テーマと思われる。このテーマをここ数年はずっと考えていて、最近いくつかの結果が得られたので紹介したい。

2. Euler-Maclaurin summation formula と $\zeta(s)$ の解析接続

最初に、$a(n)=1$ for all $n\in\mathbf{N}$ なるケースを考えてみる。このとき $F(s)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ である：

$$F(s)=\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}.$$

この級数は領域 $1<\sigma$ において絶対かつ広義一様収束している。では $\sigma\leq 1$ なる（級数としての非収束な）領域ではどのような状況になっているのか。実際は $\mathbf{C}$ まで解析接続でき、$s=1$ に一位の極をもち、$s=1$ 以外では正則な有理型関数となる。では、どのようにして解析接続がなされるのか考えてみたい。$\zeta(s)$ は様々な解析接続方法が知られているが、ここでは Euler-Maclaurin の和公式（以下 EM）を用いた解析接続に注目する。そして将来的にはその証明方法を一般の $F(s)$ に適用できるか試してみる。その際に普通の EM を一般の $F(s)$ には適用できないことがすぐにわかるので、EM 自体を見直す必要に迫られる。そして EM を一般化したものを構成する。そこで、最初に普通の EM とその証明、$\zeta(s)$ への適用を確認しておくことは重要と思われる。

Euler-Maclaurin summation formula

Let M, N_1, and N_2 be positive integers, and $f(x)$ be a C^M function on $[N_1, N_2]$. Then we have

$$\begin{aligned}\sum_{N_1<n\le N_2} f(n) &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx - \sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\left[f^{(m)}(x)\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!}\right]_{N_1}^{N_2}\\ &\quad -\frac{(-1)^M}{M!}\int_{N_1}^{N_2} f^{(M)}(x)B_M(x-[x])dx, \qquad (1)\end{aligned}$$

where $[x]$ is the largest integer not exceeding x, $[f(x)]_{N_1}^{N_2}$ means $f(N_2)-f(N_1)$, and $B_m(x)$ is the mth Bernoulli polynomial, for example, $B_0(x)=1$, $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$, $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$, $B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, ...

これが、よく知られたEMである。解析数論やゼータ関数関連の教科書であれば必ず載っている公式である。ただし、その証明は著者によって様々な流儀があるようである。ここでは以下のような変形から始めてみる：

$$\begin{aligned}\sum_{N_1<n\le N_2} f(n) &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)d\Big(\sum_{n\le x}1\Big)\\ &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)\frac{d}{dx}\Big(x-\frac{1}{2}\Big)dx - \int_{N_1}^{N_2} f(x)d\Big(x-[x]-\frac{1}{2}\Big)\\ &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx - \Big[f(x)B_1(x-[x])\Big]_{N_1}^{N_2} + \int_{N_1}^{N_2} f'(x)B_1(x-[x])dx. \qquad (2)\end{aligned}$$

この一つ目の等号は右辺のスチルチェス積分の定義を考えてみれば自明である。二つ目の等号は少し強引な変形にも見えるかもしれないが、この解釈がすごく重要である（あとで述べる）。三つ目の等号はスチルチェス積分の部分積分をしているだけなので何も難しくない。以上の変形が、証明の核心部分である。

これ以降はどの著者が書いても同じ説明になる。あとはただ最後の積分に対し部分積分を繰り返すだけだからである。

Remark 1. 式変形(2)の二つ目の等号について少し解説したい。右辺の一つ目の積分と二つ目の積分に各々1/2がある。人工的にそうしたのではなく、これが自然であり1/2という数字には意味がある。ここには、

$$\sum_{n\le x}1$$

の主要項と誤差項はなにかと考えた時に、対応する$F(s)$（今は$\zeta(s)$）の極に由来する量xと$F(0)$（今は$\zeta(0)=-1/2$）から主要項が構成されていて、誤差項は$-B_1(x-[x])$と考えるべきという原理が潜んでいるのである。しかしながら、今述べたことは$\sum_{N_1<n\le N_2} f(n)$を相手にして普通のEMを考えている限りは、あまり意識しなくてよい。ただ我々は将来的に$\sum_{N_1<n\le N_2} f(n)a(n)$に対するEMを必要とする。そのときに、今述べたことの意味を真剣に考えることになる。

Remark 2. 式変形 (2) の二つ目の等号について、補足を加えたい。実は自分自身、今回のテーマを真剣に考えるまでは、そのような変形をしていなかった。どのようにしていたかというと

$$\begin{aligned}\sum_{N_1<n\le N_2} f(n) &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)d\Big(\sum_{n\le x}1\Big)\\ &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)d[x]\\ &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx - \int_{N_1}^{N_2} f(x)d\Big(x-[x]\Big)\\ &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx - \int_{N_1}^{N_2} f(x)d\Big(x-[x]-\frac{1}{2}\Big)\\ &= \int_{N_1}^{N_2} f(x)dx - \Big[f(x)B_1(x-[x])\Big]_{N_1}^{N_2} + \int_{N_1}^{N_2} f'(x)B_1(x-[x])dx.\end{aligned}$$

のように計算していた。ただし、この変形では四つ目の等号はかなり不自然である (唐突に 1/2 を登場させている点に強引な印象が残る)。実際、この等式の成立のためには 1/2 でなくてもよく、任意の定数で成立する等式である。「我々は都合の良い 1/2 を選ぶことで以下の部分積分において周期的ベルヌーイ多項式たちがでるように細工をしたのである。そこは人間の都合であるが、具合のいい 1/2 を選んで結果として良い公式が得られるのだからそれでいいだろう」という程度の理解をしていた。

それでは、次に EM を利用して $\zeta(s)$ の解析接続を行う。

We put $f(x) = x^{-s}$, $N_1 = N$, then

$$\sum_{N<n\le N_2}\frac{1}{n^s} = \int_N^{N_2}\frac{1}{x^s}dx - \sum_{m=0}^{M-1}\left[(s)_m\frac{1}{x^{s+m}}\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!}\right]_N^{N_2} - \frac{(s)_M}{M!}\int_N^{N_2}\frac{1}{x^{s+M}}B_M(x-[x])dx,$$

where where $(s)_m$ is the function defined by $(s)_0 = 1$ and $(s)_m = s(s+1)\cdots(s+m-1)$, $m \in \mathbf{N}$. Because $1<\sigma$ and $B_m(x) = O(1)$, we can $N_2 \to \infty$. For $1<\sigma$, we have

$$\begin{aligned}\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} &= \int_N^{\infty}\frac{1}{x^s}dx + \sum_{m=0}^{M-1}(s)_m\frac{B_{m+1}}{(m+1)!N^{s+m}}\\ &\quad -\frac{(s)_M}{M!}\int_N^{\infty}\frac{B_M(x-[x])}{x^{s+M}}dx,\end{aligned}$$

where B_m is the m-th Bernoulli number. For $1<\sigma$, we have

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1}\frac{1}{N^{s-1}} + \sum_{m=0}^{M-1}(s)_m\frac{B_{m+1}}{(m+1)!N^{s+m}}\\ &\quad -\frac{(s)_M}{M!}\int_N^{\infty}\frac{B_M(x-[x])}{x^{s+M}}dx. \qquad (3)\end{aligned}$$

Here we note that

$$\int_{N_1}^{\infty} \frac{B_M(x-[x])}{x^{s+M}} dx \ll \int_{N_1}^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+M}} dx \ll 1$$

when $\sigma + M > 1$. The right hand side of (3) is meromorophic for the half plane $\sigma > -M+1$. The expression (3) gives the analytic continuation of $\zeta(s)$.

以上が、EM による $\zeta(s)$ の複素平面 $\mathbf{C}$ への解析接続の証明である。M をいくらでも大きく設定できるので、左にいくらでも解析接続ができるという内容である。この証明において周期的ベルヌーイ多項式たちの性質の何が効いているのか振り返ってみる。関係式

$$\frac{d}{dx}\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!} = \frac{B_m(x-[x])}{m!}$$

により、EM の段階でいくらでも部分積分が可能となる。正確には、上記した式は $m \geq 2$ であれば任意の x で成立し、$m=1$ のときは x が整数以外のときには成立している。また x についての評価式

$$B_m(x-[x]) = O(1)$$

が各 m で成立、という性質により一回部分積分を行うごとに (3) の積分の正則である領域が左に実部 1 のペースで広がっていく。以上の $B_m(x-[x])$ の性質が $\mathbf{C}$ まで解析接続が可能となる本質的要因である。

ちなみに、$B_1(x-[x])$ はフーリエ展開

$$B_1(x-[x]) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}, \quad x \notin \mathbf{Z}$$

できるので、この事実まで用いれば関数等式

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

の証明が可能となる。どのようにして示すかというと、EM を用いた $\zeta(s)$ の解析接続の証明のなかで、$N=1,\ M=1$ の状態を考え、ちょっとした議論をした後に $B_1(x-[x])$ のフーリエ展開を行う。そして少しの計算の後に関数等式の存在と $\mathbf{C}$ までの解析接続を一挙に示すという論法である。この $B_1(x-[x])$ の極めて奇麗な振動が関数等式の源泉といえる。

次に一般の $F(s)$ に対し、EM を適用しようとするとどうなるか考えてみる。$f(x) = a(x)/x^s$ とおくわけにいかない。いきなり困った。そこで、EM 自体を見直し $a(n)/n^s$ に対して有効になるような公式を作ることにする。ただ、その時には $\zeta(s)$ の解析接続における周期的ベルヌーイ多項式達に相当するものをどう構成すべきか。これらのことを次章で議論する。

3. 一般化 EULER-MACLAURIN SUMMATION FORMULA と $F(s)$ の解析接続

Definition 1. *Let $g_0(x):(0,\infty)\to\mathbf{C}$ be a function which is continuous on $(0,\infty)-\mathbf{N}$, bounded on every finite open interval $(0,c)$, and bounded by $O(x^{\alpha_0})$ as $x\to\infty$, where α_0 is a non-negative constant. Let C_m, $m\in\mathbf{N}$, be arbitral constants, and $g_m(x;C_m)$, $m\in\mathbf{N}$, be the functions defined by*

$$g_1(x;C_1)=\int_0^x g_0(v)dv+C_1,\quad x\in(0,\infty),$$

and

$$g_m(x;C_m)=\int_0^x g_{m-1}(v;C_{m-1})dv+C_m,\quad x\in(0,\infty),\quad m\geq 2.$$

By this definition, $g_1(x;C_1)$ is differentiable on $(0,\infty)-\mathbf{N}$ and $g_m(x;C_m)$, $m\geq 2$, are differentiable on $(0,\infty)$, which satisfy

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}g_1(x;C_1)=g_0(x), & x\in(0,\infty)-\mathbf{N},\\ \frac{d}{dx}g_{m+1}(x;C_{m+1})=g_m(x;C_m), & x\in(0,\infty),\quad m\geq 1.\end{cases}$$

Then the function $g_0(x)$ is called *good oscillation*, if there exists a non-negative sequence $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ such that $g_m(x;C_m)=O(x^{\alpha_m})$ as $x\to\infty$ and $m+1-\alpha_m\to\infty$ as $m\to\infty$. Next we define "*more good oscillation*". When α_m satisfy

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{\alpha_m}{m}<1,$$

we call $g_0(x)$ is "*more good oscillation*".

Remark 3. この *good oscillation* は話の便宜上勝手に作った造語です。ではこの条件を満たすときに、なぜ「良い振動」と名付けたのか少し説明したい。$\zeta(s)$ のときに、複素平面 $\mathbf{C}$ まで解析接続が可能となったのは $B_m(x-[x])$ たちの性質にその理由があった。(3) の積分は、部分積分を一回行うごとに分母のベキが 1 増える。一方、分子は $B_m(x-[x])=O(x^0)$ であったので、大きさ評価のベキが全く増えない。そのずれが、M を 1 増やすごとに正則な領域が左に 1 増える理由であった。もし $F(s)$ に対し同様の議論をした場合に毎回 1 づつ広がらなくても良いので、少しづつでもいいので、$\mathbf{C}$ まで解析接続可能となるための十分条件は何か？と考えてみる。そこで *good oscillation* の概念がまず思いつく。

Remark 4. 用語 *more good* というのは英語として変だろ、 *better* のことか？という突っ込みがあるでしょう（実際講演でもそのような指摘がありました）が、このまま行きます。

$$g_0(x)\textit{is "more good oscillation"}\implies\quad g_0(x)\textit{is "good oscillation"}$$

は明らかである。*more good oscillation* のほうが少しばかり強い条件である。雰囲気としては *good oscillation* よりもさらに良い振動をしているという状況を表す用語として作った造語です。将来的には *more more good oscillation* なる用語も十分ありえます。

明らかに $-B_1(x-[x])$ は *more good oscillation with*

$$\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}=\left\{-\frac{B_{m+1}(x-[x])}{(m+1)!}\right\}_{m=0}^{\infty}$$

and $\alpha_m = 0$ *for all* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, である。$\zeta(s)$ の解析接続のときにも述べたが、$-B_1(x-[x])$ の振動はとてつもなく奇麗である（関数等式まで導くのだから）。名前をつけるなら *best oscillation* という感じ。

そして、その奇麗な振動は $m \geq 2$ の $B_m(x-[x])$ にも次々と伝搬し、周期的ベルヌーイ多項式達の強烈な性質を生み出している。本原稿において注目しているのは、こちらの観点である。最初に与えた関数 $g_0(x)$ の性質は、その不定積分達の関数列に影響を及ぼす。その状況と $F(s)$ の解析的性質はどのように対応しているのかを見極めたいというのが本研究の目標である。

Let N_1 and N_2 be positive integers, $f(x)$ a C^M function defined on the closed interval $[N_1, N_2]$, and $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ a complex sequence. Let $g_0(x) : (0,\infty) \to \mathbf{C}$ be a function defined by

$$g_0(x) = \sum_{n \leq x} a(n) - \Big(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J\Big),$$

where $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, and J_h, J are constants. For this $g_0(x)$, let $g_m(x; C_m)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, be the functions defined in Definition 1. Then we have, by integration by parts in the sense of Stieltjes, that

$$\begin{aligned}
\sum_{N_1 < n \leq N_2} f(n)a(n) &= \int_{N_1}^{N_2} f(x) d\Big(\sum_{n \leq x} a(n)\Big) \\
&= \int_{N_1}^{N_2} f(x) \frac{d}{dx}\Big(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J\Big) dx + \int_{N_1}^{N_2} f(x) d(g_0(x; C_0)) \\
&= \int_{N_1}^{N_2} f(x) \frac{d}{dx}\Big(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J\Big) dx \\
&\quad + \Big[f(x) g_0(x; C_0)\Big]_{N_1}^{N_2} - \int_{N_1}^{N_2} f'(x) g_0(x; C_0) dx.
\end{aligned}$$

Moreover, repeating integration by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{N_1 < n \leq N_2} f(n)a(n) &= \int_{N_1}^{N_2} f(x) \frac{d}{dx}\Big(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J\Big) dx \\
&\quad + \sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \Big[f^{(m)}(x) g_m(x; C_m)\Big]_{N_1}^{N_2} \\
&\quad + (-1)^M \int_{N_1}^{N_2} f^{(M)}(x) g_{M-1}(x; C_{M-1}) dx. \qquad (4)
\end{aligned}$$

この最後の式は、一般化された EM（以後 GEM とする）といえる。この章で行った議論で $a(n) = 1$ for all $n \in \mathbf{N}$、$l = 1$、$J_0 = 1$、$J = -\frac{1}{2}$ と選んだ場合、

$$g_0(x) = \sum_{n \leq x} 1 - \Big(x - \frac{1}{2}\Big) = [x] - x + \frac{1}{2} = -B_1(x - [x])$$

となり、(4) は、ちょうど前章で見た EM にあたる。次に、この GEM を用いて $F(s)$ の解析接続を考えてみる。

We put $f(x)=x^{-s}$, $N_1=N$ in (4), and choose the sequence $\{g_m(x;C_m)\}_{m=0}^{\infty}$ as that of good oscillation, here we abbreviate $\{g_m(x;C_m)\}_{m=0}^{\infty}=\{g_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$. Then

$$\sum_{N<n\le N_2}\frac{a(n)}{n^s}=\int_N^{N_2}\frac{1}{x^s}\frac{d}{dx}\Big(x\sum_{h=0}^{l-1}J_h(\log x)^h+J\Big)dx$$
$$+\sum_{m=0}^{M-1}\Big[(s)_m\frac{g_m(x)}{x^{s+m}}\Big]_N^{N_2}+(s)_M\int_N^{N_2}\frac{g_{M-1}(x)}{x^{s+M}}dx.$$

For s with $\sigma>\max_{0\le m\le M-1}\{1,\alpha_m\}$ we can take N_2 to ∞, and obtain

$$F(s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{a(n)}{n^s}=\int_N^{\infty}\frac{1}{x^s}\frac{d}{dx}\Big(x\sum_{h=0}^{l-1}J_h(\log x)^h+J\Big)dx$$
$$-\sum_{m=0}^{M-1}(s)_m\frac{g_m(N)}{N^{s+m}}+(s)_M\int_N^{\infty}\frac{g_{M-1}(x)}{x^{s+M}}dx.$$

この右辺の一項目の積分を計算し、左辺の二項目を右辺に移項すると $\sigma>\max_{0\le m\le M-1}\{1,\alpha_m\}$ において、

$$F(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{a(n)}{n^s}+\sum_{h=0}^{l-1}W_h h!\sum_{j=0}^{h}\frac{(-1)^{j+1}}{(h-j)!}\frac{N^{1-s}(\log N)^{h-j}}{(1-s)^{j+1}}$$
$$-\sum_{m=0}^{M-1}(s)_m\frac{g_m(N)}{N^{s+m}}+(s)_M\int_N^{\infty}\frac{g_{M-1}(x)}{x^{s+M}}dx \tag{5}$$

を得る。ここで W_h は

$$W_h=\begin{cases}J_h+(h+1)J_{h+1}, & \text{if } 0\le h\le l-2,\\ J_h, & \text{if } h=l-1.\end{cases}$$

と定義する。この右辺の最後の積分は左半平面 $\sigma>1-(M-\alpha_{M-1})$ において正則である。もし、$g_0(x)$ が good oscillation であれば、$M-\alpha_{M-1}\to\infty$ as $M\to\infty$ なので $M\to\infty$ とすれば、$F(s)$ は $\mathbf{C}$ に有理型に解析接続される 。その極は $s=1$ にのみ存在する。

ディリクレ級数 $F(s)$ の解析接続の問題を考える場合 good oscillation という条件に注目するのはそれほど的外れではないだろう。

4. 前回発表した結果の復習

神谷氏との共同研究の結果を２００８年の数理研で紹介したが、再度ここに載せる：

Theorem 1. *Let $a(n)$, $n\in\mathbf{N}$, be complex numbers. Assume the following condition* (X) :

(X) *There exist constants* $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, J_h, *and* J *such that the function* $g_0(x)$ *defined by* $g_0(x) = \sum_{n \le x} a(n) - \left(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J\right)$ *is* **good oscillation**, *where the empty sum* $\sum_{h=0}^{l-1}$ *in the case* $l = 0$ *is defined to be* 0.

Then the following assertion (Y) *holds:*

(Y) *There exists a constant* $\sigma_a \ge 1$ *such that the Dirichlet series* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ *is absolutely convergent for* $\sigma > \sigma_a$. *Moreover,* $F(s)$ *can be continued analytically over the whole* s*-plane beyond the line* $\sigma = \sigma_a$, *and its only singularity is a pole of the order* l *at* $s = 1$.

Remark 5. *The analytic continuation of* $\zeta(s)$ *by EM is one of example of Theorem 1.*

A converse assertion holds under additional assumption.

Theorem 2. *Assume* (Y) *in Theorem 1 and the following condition* (A):

(A) *For any non-negative integer* m, *there exists a non-negative constant* c_m *such that* $F\left(-m - \frac{1}{2} + it\right) = O\left((1+|t|)^{c_m}\right)$ *and the sequence* $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$, $\lim_{m \to \infty} \frac{c_m}{m^2} = 0$ *holds.*

Then the assertion (X) *in Theorem 1 holds.*

Remark 6. *Essentially we have the same results under the situation that* $F(s)$ *has finite poles. But we are devoted to the case that* $F(s)$ *has a pole only at* $s = 1$, *because we want to concentrate the relation between the properties of* $F(s)$ *and the oscillation of* $g_0(x)$.

Remark 7. *The functional equation of* $\zeta(s)$ *and the Phragmén-Lindelöf convexity principle give the well-known estimate* $\zeta(\sigma + it) = O((1+|t|)^{\frac{1}{2}-\sigma})$, *where the implied constant is uniform for* s *in the vertical strip* $-M \le \sigma \le \delta < 0$, *and hence* c_m *can be chosen as* $m+1$ *and* $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m}{m^{1+\varepsilon}} = 0$ *holds for every arbitrary small* $\varepsilon > 0$. *The property* $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m}{m^{1+\varepsilon}} = 0$ *holds for Dirichlet L-functions, because those functions have functional equation of Heck type.*

この時点での状況を整理すると

Theorem 1

$$\text{(X)} \quad g_0 \text{ is } \textbf{good oscillation} \quad \Longrightarrow \quad \text{(Y)} \quad F(s) \text{ is meromorphic on } \mathbf{C}$$

Theorem 2

$$\text{(X)} \quad g_0 \text{ is } \textbf{good oscillation} \quad \Longleftarrow \quad \begin{cases} \text{(Y)} & F(s) \text{ is meromorophic on } \mathbf{C} \\ \text{(A)} & \text{Some estimation for } |F(s)|. \end{cases}$$

である。

Remark 8. 本当は $F(s)$ の解析性と $A(x)$ の誤差項の挙動との関係を同値命題で述べたい。しかし、上記した二つの結果はうまくいっていない。「同値命題としてどのような問題設定をすべきだろうか?」と上記した二つの結果を証明した直後に色々考えた。そして次のような考えに至った。$F(s)$ のある領域での解析接続が得られたとき、$|F(s)|$ の評価も同時に獲得していることが大半である。なぜなら、$F(s)$ の解析接続をするには目的の領域において何らかの表示式を得ているからである。特に先に紹介した *GEM* による $F(s)$ の表示を議論の土台におく場合、解析接続ができたと同時に $|F(s)|$ の上からの評価（かなり雑な評価かもしれないが）得ている。このことより、今後の問題設定の仕方としては、

$$(\ldots)\ g_0\ \text{の振動状況} \iff \begin{cases} (\mathrm{Y}) & F(s) \text{ is meromorophic on } \mathbf{C} \\ (\ldots) & \text{Some estimation for } |F(s)|, \end{cases}$$

のような同値命題を設定していくのが自然のように思えた。つまり、*Theorem 2* のような設定をし、同値であることの証明をすることを当面の目標とした。

5. 最近得られた結果

この章では最近得られた結果を紹介する。

Theorem 3. *Let* $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *be a complex sequence. Assume the following assumption* (X*) :

(X*) *There exist constants* $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, J_h, *and* J *such that the function* $g_0(x)$ *defined by*

$$g_0(x) = \sum_{n \le x} a(n) - \left(x \sum_{h=0}^{l-1} J_h (\log x)^h + J\right)$$

is of **more good oscillation**, *where the empty sum* $\sum_{h=0}^{l-1}$ *in the case* $l = 0$ *is defined to be* 0.

Then the following assertion (Y) + (A*) *is equivalent to* (X*) :

(Y) *There exists a constant* σ_a *with* $\sigma_a \ge 1$ *such that the Dirichlet series* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ *is absolutely convergent for* $\sigma > \sigma_a$. *Moreover,* $F(s)$ *can be continued analytically over the whole s-plane beyond the line* $\sigma = \sigma_a$, *and its only singularity is a pole of the order* l *at* $s = 1$.

(A*) $F(\sigma + it) = O\left((1 + |t|)^{-K_1\sigma + K_2}\right)$ *holds for* $\sigma \le \sigma_a + \varepsilon$, *where* K_1 *and* K_2 *are positive constants and* $-K_1\sigma + K_2 \ge 0$ *on the domain.*

つまり、以下のような状況である：

$$(\mathrm{X}^*)\ g_0(x) \text{ is } \textbf{more good oscillation} \iff \begin{cases} (\mathrm{Y})\ F(s) \text{ is meromorophic on } \mathbf{C} \\ (\mathrm{A}^*)\ \text{Some estimation for } |F(s)|. \end{cases}$$

6. $g_m(N)$ はどんなディリクレ級数の特殊値となりうるか

次に、GEM を用いた $F(s)$ の解析接続をするための表示式 (5) を眺めていると、そこに現れている $g_m(N)$ とは何か?という疑問がわいてくる。$g_m(x)$ が周期的ベルヌーイ多項式の一般化であり、$g_m(N)$ はベルヌーイ数の一般化とみなすこともできる。$g_m(N)$ とは額面通り読めば「誤差関数 $g_m(x)$ の変数 x が整数値 N のときの値」であるわけだが、それがどんな意味ある量と解釈できるのか。EM を利用した $\zeta(s)$ の解析接続を見ていると、その有限和部分に現れる $g_m(N)$ はベルヌーイ数になる。さらにちょっとした議論で $\zeta(s)$ の非負整数値での値とある関係式で結ばれていることもいえる。では、一般の $F(s)$ の時はどうなるのだろうか。ここで

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n+k)}{n^s},$$

なるディリクレ級数を定義する、k は非負整数とする。この時、次の結果が成り立つ:

Theorem 4. *Assume the assumption* (X) *with restriction* $l = 0, 1$. *Then the following assertion* (Y*) *holds* :

(Y*) $F_k(s)$, *for nonnegative integer* k, *can be continued analytically over the whole s-plane, and its only singularity is a pole of the order* $l = 0, 1$ *at* $s = 1$. *Moreover a relation*

$$\frac{1}{m!} F_k(-m) = (-1)^{m+1} g_m(k)$$

holds for any $k \in \mathrm{N}$ *and nonnegative integer* m.

当初は $g_m(N)$ は $F(s)$ の非負の整数値での値と関連するのかと思っていたが、そうではなかった。ちなみに $l \geq 2$ については、現在計算中である。上の関係式の具体例を以下にいくつか見ていく。

Example 1. The case $a(n) = 1$ for $n \in \mathbf{N}$.

Then $$g_m(x) = -\frac{B_{m+1}(x - [x])}{(m+1)!}.$$

Hence $$\frac{1}{m!}\zeta_k(-m) = (-1)^m \frac{B_{m+1}(k - [k])}{(m+1)!} \qquad \text{by Th 4.}$$

Hence $$\zeta(-m) = (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}, \qquad \text{which is well known result.}$$

Example 2. The case $a(n) = \chi(n)$, which is Dirichlet character mod q.

Then $$g_m(x) = -q^m \sum_{a=1}^{q} \chi(a) \frac{B_{m+1}(\frac{x-a}{q} - [\frac{x-a}{q}])}{(m+1)!}.$$

Hence $\frac{1}{m!}L_k(-m,\chi) = (-1)^m q^m \sum_{a=1}^{q} \chi(a) \frac{B_{m+1}(\frac{k-a}{q} - [\frac{k-a}{q}])}{(m+1)!}$ by Th 4.

Here we choose $k = q$, then we have

$$L(-m,\chi) = -q^m \sum_{a=1}^{q} \chi(a) \frac{B_{m+1}(\frac{a}{q})}{m+1}$$

with help of $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, which is well known result.

7. 最後に

大学院生の頃は、$a(n)$ の個々の挙動を完全に明らかにする事が究極の目標であると思っていた。そして $a(n)$ の平均挙動を考える事に対しては問題の難しさから逃げている様な後ろめたさを感じることがあった。しかし細々とではあるが研究を続けていく過程で自分の考え方は変わってきた。与えられた $a(n)$ の個々の複雑な変化 $a(1), a(2), a(3), \ldots a(n), \ldots$ によって $F(s)$ の解析的性質が決定されていることは間違いないのだが、果たしてそれを人間が完全に解明できるのだろうか。与えられた $a(n)$ は n を変化させたときは決して人間がその次の動きを予測出来ないようになっているのではないか。しかしながら平均的挙動程度の水準では規則が確実に存在し、人間が解明を許されている。そんな状況を神が仕組んでいるのではないだろうかなどと最近は考える。これは決して、研究者として真理の探求を諦めたのではなく、そのような仕組みこそが明らかにすべき真の究極の姿であるのではないかという前向きな意見である。「なぜ、個々の動きを捉えようとしないのですか？」「平均を考えることの意味は何なんですか？」「平均だと簡単だから、ただ計算しているだけじゃないんですか？」という質問に対し、若いときは明確に答えることができなかった。最近は、平均を調べる意義を（これまで証明したささやかな結果などを根拠に）少しは他人に語れるようになってきた気がする。

この原稿を読んでいるのはおそらく限られた数人の方だと思って、（一応公式の報告集ではあるが）好き勝ってな事を書かせてもらいました。

References

[1] H. Ishikawa and Y. Kamiya, *Spectral sets of certain functions associated with Dirichlet series*, J. Math. Anal. Appl. **347** (2008), 204–223.

[2] H. Ishikawa and Y. Kamiya, *On a relation between sums of arithmetical functions and Dirichlet series*, Publications del'institut Mathématique. Nouvelle série, tom **92(106)** (2012), 97–108.