

## 局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ有理 3 次元球面について

福井大学・教育地域科学部 西村 保三

Yasuzo NISHIMURA

Faculty of Education and Regional Studies,

University of Fukui

Lü-Yu は、3次元  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面  $M$  が、局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、 $M$  がある  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面  $N$  の 8 個のコピーの連結和  $N \sharp N \sharp \cdots \sharp N$  に同変同相であること、特に  $M$  が既約であれば  $S^3$  に限ることを示した。本稿では、彼らの議論を拡張して、有理 3 次元球面で局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つものを考察する。

### 1 標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

本稿では  $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$  は位数 2 の可換群を表し、 $(\mathbb{Z}_2)^n$  はその  $n$  個の直積を表す。 $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上の  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = ((-1)^{s_1}x_1, \dots, (-1)^{s_n}x_n)$$

を標準的表現と呼ぶ。この作用の軌道空間  $\mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}_2)^n$  は、第 1 象限  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$  である。

**定義 1.1** 閉  $n$  次元多様体  $M$  上の効果的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用が局所標準的とは、作用が局所的に標準的表現と同型であるときをいう。

**例 1.2** 1.  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  上の  $\mathbb{Z}_2$ -作用を、 $x$  軸に関する対称変換  $(x, y) \mapsto (x, -y)$  とする。これを  $n$  個直積することで、トーラス  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$  上の局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用が得られる。この作用の軌道空間は、 $n$  次元立方体  $I^n$  である。

2. 実射影空間  $\mathbb{R}P^n$  上の標準的な  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot [x_0, x_1, \dots, x_n] = [x_0, (-1)^{s_1}x_1, \dots, (-1)^{s_n}x_n]$$

は局所標準的である。この作用の軌道空間は  $n$  次元単体  $\Delta^n$  である。

3.  $n$  次元球面  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  上の標準的な  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用

$$(s_1, \dots, s_n) \cdot (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, (-1)^{s_1}x_1, \dots, (-1)^{s_n}x_n)$$

は局所標準的である。この作用の軌道空間は、例えば  $n = 2$  なら 2 角形、 $n = 3$  なら 3 枚の 2 角形面を境界を持つ「フットボール形 (以下 **B**)」である (図 1)。

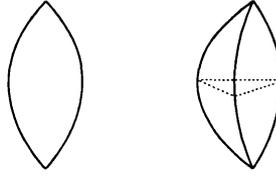


図 1: 2 角形とフットボール形 **B**

$n$  次元角付き多様体とは、各点が第 1 象限  $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$  の開部分集合と同相な近傍を持つハウスドルフ空間である。角付き多様体  $Q$  の各点  $x$  について、 $x$  の局所座標を  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$  とするとき、 $x$  の余次元  $\text{codim}(x)$  は  $x_i = 0$  となる  $i$  の個数として定義される。 $Q$  の余次元  $k$  の点からなる連結部分集合の閉包を、余次元  $k$  の面といい、特に余次元 1 の面を ファセット という。また、余次元 2 の任意の点  $x$  について、 $x$  を含むファセットがちょうど 2 個であるとき、 $Q$  はナイス と呼ばれる。

一般に、局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用の軌道空間について、次の事実が知られている ([1] 参照)。

**補題 1.3**  $M$  を局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用を持つ  $n$  次元閉多様体とすると、その軌道空間  $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^n$  は、コンパクトでナイスな  $n$  次元角付き多様体である。

任意の単純凸多面体は、コンパクトでナイスな角付き多様体である。一方、図 1 の 2 角形や、フットボール形 **B** は、単純凸多面体でない角付き多様体の例である。

**定義 1.4** 局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用のある  $n$  次元閉多様体  $M$  で、軌道空間  $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^n$  が単純凸多面体であるものを、small cover と呼ぶ。

以下、 $M$  は局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用のある  $n$  次元閉多様体とし、軌道写像を  $\pi: M \rightarrow Q$  とする。さらに、この作用には固定点があるとし、 $\partial Q \neq \emptyset$  を仮定しておく。このとき、角付き多様体  $Q$  の各ファセット  $F$  に対して、 $F$  の内点の引き戻し  $x \in \pi^{-1}(\text{int} F)$  の固定部分群の生成元を対応させる写像  $\lambda: \mathcal{F}(Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$  を、 $M$  の表現写像 という。ここで、 $\mathcal{F}(Q)$  は  $Q$  のファセットの集合である。表現写像は以下の条件を満たし、特に  $Q$  の面彩色となっている。

$$(*) F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \{\lambda(F_1), \dots, \lambda(F_n)\} \text{ は線形独立}$$

一般に、コンパクトでナイスな角付き多様体  $Q$  について、 $(*)$  を満たす写像  $\lambda: \mathcal{F}(Q) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$  を  $Q$  の  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色と呼ぶ。

**例 1.5**  $n = 3$  の場合に、例 1.2 に挙げた  $S^3$ ,  $\mathbb{R}P^3$ ,  $T^3$  の表現写像を図 2 に示す。図で、多面体はシュレーゲル図式で表されており、 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  は  $(\mathbb{Z}_2)^3$  の基底を表す。

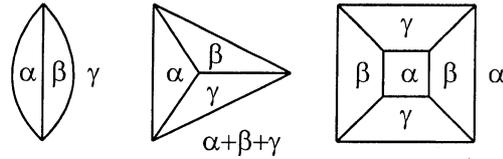


図 2:  $S^3$ ,  $\mathbb{R}P^3$ ,  $T^3$  の表現写像

2つの局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -作用を持つ  $n$ 次元多様体  $M_1, M_2$  は, ある  $\theta \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$  が存在して,  $\theta$ -同変同相写像  $f: M_1 \rightarrow M_2$  すなわち  $f\pi_2 = \pi_1$ ,  $f(g \cdot x) = \theta(g) \cdot f(x)$  を満たすときに同値と定義し, 単に同変同相と呼ぶことにする。またコンパクトでナイスな角付き多様体  $Q$  上の, 2つの  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色  $\lambda_1, \lambda_2$  は, ある基底変換  $\theta \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_2)^n$  で移り合う, すなわち  $\lambda_2 = \theta\lambda_1$  が成り立つとき,  $DJ$ -同値という。

**定理 1.6 (Davis-Januszkiewicz [2])** 単純凸多面体  $Q$  上の small cover の同値類は,  $Q$  の  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色の  $DJ$ -同値類と一対一に対応する。逆対応は,  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色多面体  $(Q, \lambda)$  に対して, small cover を以下で構成する。

$$M(Q, \lambda) := (Q \times (\mathbb{Z}_2)^n) / \sim, \quad (x, g) \sim (y, h) \Leftrightarrow x = y, g = h \pmod{\lambda(F)} \quad (x \in \text{int}(F))$$

**注意 1.7**  $Q$  が単純凸多面体でないときは,  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色  $\lambda$  だけでは,  $M$  を再構成できるとは限らない。その場合は,  $Q$  上の主  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -束  $\xi: E \rightarrow Q$  の同型類を加えた情報  $(\lambda, \xi)$  で,  $M$  は分類できることが知られている ([3] 参照)。

定理 1.6 より, small cover の位相的性質は, 全て  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -彩色多面体の言葉で記述できる。特に, small cover が向き付け可能になるための彩色の条件を, 以下で考察する  $n = 3$  の場合についてのみ掲げておく ([6] 参照)。

**命題 1.8** 3次元 small cover  $M$  が向き付け可能である必要十分条件は, 表現写像の像が, ある基底  $\alpha, \beta, \gamma \in (\mathbb{Z}_2)^3$  に対して,  $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$  に含まれることである。

命題 1.8 について,  $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$  のどの3つも1次独立であるから, これは通常の意味の4色による面彩色と同じであることに注意する。

## 2 局所標準的 $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ有理3次元球面

Lü-Yu [5, Theorem 1.1] は, 3次元  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面で, 局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つものを次のように特徴づけた。

**定理 2.1 (Lü-Yu)**  $M$  を 3次元  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面とする。 $M$  が局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、ある  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面  $N$  が存在して、 $M$  が 8個の  $N$  のコピーの連結和  $N\sharp N\sharp \cdots \sharp N$  と同相になることである。特に、 $M$  が既約であれば、 $M = S^3$  である。

この定理は、 $\mathbb{Z}_2$ -作用のある既約なホモトピー 3次元球面は  $S^3$  に限るか? という未解決問題に関係している。本稿では、上の定理を拡張して、有理 3次元球面で局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つものを考察する。

**問題 2.2**  $M$  を向き付け可能な有理 3次元球面で、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) = k \geq 1$  とする。 $M$  はいつ局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つか?

この問題は、 $k = 1$  の場合についてのみ、[5, Theorem 1.2] で決定されている。

**定理 2.3 (Lü-Yu)**  $M$  を向き付け可能な有理 3次元球面で  $H_1(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$  を満たすものとする。 $M$  が局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、 $M$  が  $\mathbb{R}P^3$  と、ある  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面  $N$  の 8個のコピーとの連結和  $\mathbb{R}P^3\sharp N\sharp N\sharp \cdots \sharp N$  と同相になることである。特に、 $M$  が既約であれば、 $M = \mathbb{R}P^3$  である。

本論文では、この定理を次のように拡張する。

**定理 2.4**  $M$  を向き付け可能な有理 3次元球面で、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) = k < 8$  とする。 $M$  が局所標準的  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -作用を持つ必要十分条件は、 $M$  がある small cover  $L$  ( $k = 0$  のときは  $L = S^3$ ) と、ある  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面  $N$  の 8個のコピーの連結和  $L\sharp N\sharp N\sharp \cdots \sharp N$  と同相になることである。ここで small cover  $L$  も、有理 3次元球面であり、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(L; \mathbb{Z}_2) = k$  を満たす。

**証明** 条件を満たす  $M$  について、 $H^*(M/(\mathbb{Z}_2)^3; \mathbb{Q}) \cong H^*(M; \mathbb{Q})^{(\mathbb{Z}_2)^3} = 0$  より、軌道空間  $Q = M/(\mathbb{Z}_2)^3$  は有理 3次元球体。従って、 $\partial Q$  は  $S^2$  と同相である。 $\partial Q$  の面構造は、3-連結正則平面的グラフ（もし 3-連結でなければ、後述する定理 2.7 を small cover でない場合にも拡張した議論によって  $M$  は有理球面になりえないことがわかる）なので、シュタイニッツの定理から、 $\partial Q$  は、ある単純凸多面体かフットボール形  $\mathbf{B}$  の境界と組合せ同型である。この多面体（単純凸多面体またはフットボール  $\mathbf{B}$ ）を  $P$  と表し、 $Q$  と同じ  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -彩色で定義される  $P$  上の small cover ( $P = \mathbf{B}$  のときは  $S^3$ ) を  $L$  と表すことにする。

以下は、[5] の議論を踏襲する。 $Q$  の境界から、1つのファセットだけを残して、面構造を全て取り去った角付き多様体を  $Q'$  とする。このとき逆に  $Q$  は、 $Q'$  と多面体  $P$  を、1つのファセットの内点で連結和した角付き多様体と同相である。すなわち、 $(M, Q, \lambda) = (M', Q', \lambda')\sharp_{B,B}(L, P, \lambda)$  と表せる ( $\sharp_{B,B}$  は、自由軌道に沿った同変連結和)。このとき、 $M'$  は固定点を持たず、その軌道は全て自由である。従って  $M'$  は 8 の約数の個数からなる連結成分を持ち、 $M$  は  $M'$  と 8

個の  $S^2 \times I$  チューブで連結されている。しかし,  $H_1(M; \mathbb{Q}) = 0$  であるから,  $M$  にはループがあつてはならないので,  $M' = Q' \times (\mathbb{Z}_2)^3$  であり,  $M$  は  $L$  と  $Q'$  の 8 個のコピーとの連結和  $L \# Q' \# \dots \# Q'$  に同相になる場合しかありえない。  $k < 8$  のとき,  $Q'$  は  $\mathbb{Z}_2$ -ホモロジー球面,  $H_1(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_1(L; \mathbb{Z}_2)$  である。また  $L = S^3$  となるのは,  $k = 0$  の場合に限る。□

定理 2.4 より,  $k < 8$  のとき, 問題 2.2 は small cover で有理球面になるものの特徴づければよいことになる。  $k = \text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2)$  が小さいときを調べた結果を以下に示す。

**命題 2.5**  $M$  は small cover でかつ有理 3 次元球面になるものとし,  $k = \text{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_1(M; \mathbb{Z}_2) \leq 4$  とする。このとき,  $M$  は  $k$  個の  $\mathbb{R}P^3$  の連結和に同変同相である。ただし,  $k = 4$  のときは, 4 個の  $\mathbb{R}P^3$  の連結和で同変同相でないものが 3 種類ある。それぞれの small cover に対応する  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -彩色多面体は図 3 と図 4 で表される。

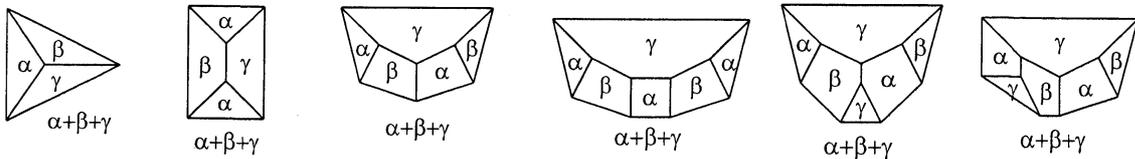


図 3:  $k$  個の  $\mathbb{R}P^3$  の連結和 ( $k = 1, 2, 3$ )

図 4: 4 個の  $\mathbb{R}P^3$  の連結和 (3 種)

**注意 2.6** 命題 2.5 は  $k \geq 5$  では成り立たない (図 5)。

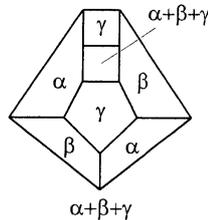


図 5:  $\mathbb{R}P^3$  の連結和でない有理球面 small cover の例

$(P, \lambda)$  を  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  の 4 色で面彩色された単純凸多面体とする。2 色の組  $S \subset \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  に対して,  $C_S := \bigcup \{F \in \mathcal{F}(P) \mid \lambda(F) \in S\} \subset \partial P$  (もしくは,  $C_S$  は  $\partial P$  の双対単体的グラフ  $K_P$  の部分グラフとして考える) を  $(P, \lambda)$  の Kempe 鎖 ( $S$ -鎖) という。例えば  $S = \{\alpha, \beta\}$  のとき,  $C_S$  を  $\{\alpha, \beta\}$ -鎖といい, その補集合  $\partial P \setminus C_S = C_{S^c}$  は  $\{\gamma, \delta\}$ -鎖である。

small cover が有理 3 次元球面になる特徴づけは, 次の定理で与えられる。

定理 2.7 4色で面彩色された3次元単純凸多面体  $(P, \lambda)$  に対応する向き付け可能 small cover  $M(P, \lambda)$  が, 有理3次元球面になる必要十分条件は,  $(P, \lambda)$  の全ての Kempe 鎖が連結であることである。または全ての Kempe 鎖が木になることとも言い換えられる。

最近 Suciu-Trevisan [8] において, 一般の small cover の有理係数ホモロジー群が次のように計算された。定理 2.7 は, 彼らの結果に  $n = 3$  で向き付け可能な場合に適用することでただちに証明できる (この場合, 例えば  $S = \{\alpha, \beta\}$  とすると, 定理 2.8 の  $P_S$  は  $S$  の補集合の Kempe 鎖すなわち  $\{\gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ -鎖  $C_{S^c}$  に一致することに注意せよ)。

定理 2.8 (Suciu-Trevisan)  $n$ 次元単純凸多面体  $P$  上の small cover  $M$  に対して, その  $i$ -th 有理ベッチ数  $\beta_i(M)$  は次式で与えられる。

$$\beta_i(M) = \sum_{S \subset \{1, 2, \dots, n\}} \text{rank}_{\mathbb{Q}} \tilde{H}_{i-1}(P_S; \mathbb{Q})$$

ここで,  $P_S := \bigcup \{F \in \mathcal{F}(P) \mid \sum_{i \in S} \lambda(F) \cdot e_i = 0\} \subset \partial P$  ( $e_i$  は  $(\mathbb{Z}_2)^n$  の標準基底) とする。

### 3 カット & ペースト作用素

2つの small cover (または彩色多面体) から, それぞれある部分を取り除いて, 残った部分を境界同士で張り合わせて新しい small cover (または彩色多面体) を構成する作用素を考える (図 6, 7, 8, 9。より詳しくは [4, 7] 等参照)。

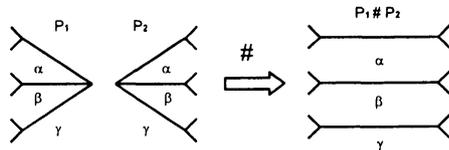


図 6: 連結和 #

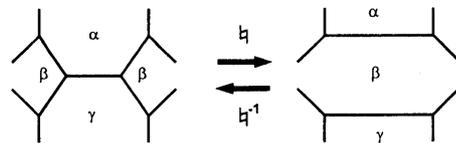


図 7: 手術  $h, h^{-1}$

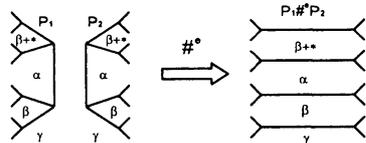


図 8: 辺連結和  $P_1 \#^e P_2 = h(P_1 \# P_2)$

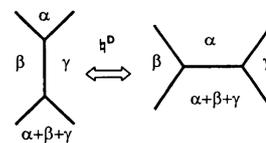


図 9: Dehn 手術  $h^D P = P \#^e \Delta^3$

例 3.1 注意 2.6 の多面体  $P$  は,  $\natural^D(\Delta^3 \# \Delta^3 \# \Delta^3) \#^e (\Delta^3 \# \Delta^3 \# \Delta^3)$  または,  $\natural^{-1}(\Delta^3 \# \Delta^3 \# \Delta^3) \#^e (\Delta^3 \# \Delta^3)$  として構成できる (図 10, 11)。

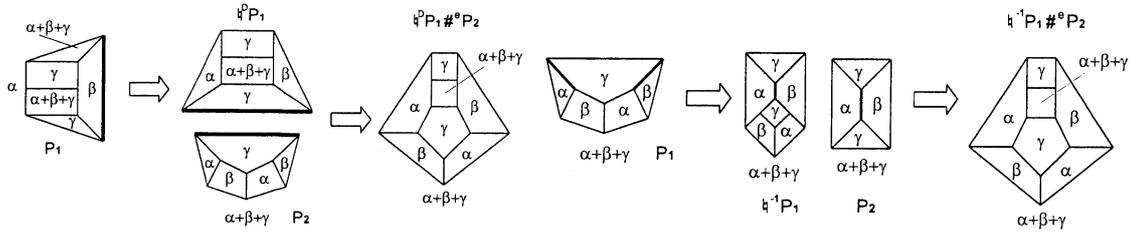


図 10:  $P = \natural^D P_1 \#^e P_2$

図 11:  $P = \natural^{-1} P_1 \#^e P_2$

上記の例に関して, 一般に次のことがわかる。

命題 3.2  $M_1, M_2$  を有理 3 次元球面となる small cover とする。このとき, 以下の作用素で構成される small cover も有理球面である。

1.  $M_1 \# M_2$
2.  $\natural^D M_1 \#^e M_2 = M_1 \#^e \mathbb{R}P^3 \#^e M_2$
3.  $\natural^{-1} M_1 \#^e M_2$

作用素 2, 3 に対応する 4-彩色多面体の作用素は, それぞれ図 12, 13 で表される。

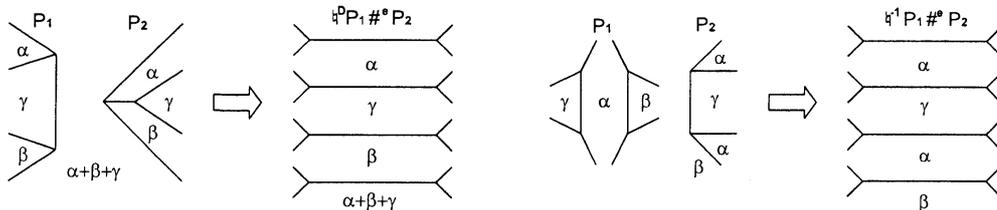


図 12:  $\natural^D P_1 \#^e P_2$

図 13:  $\natural^{-1} P_1 \#^e P_2$

注意 3.3 命題 3.2 の作用素を用いることで, 有理 3 次元球面となる small cover は, (辺) 連結和していくことで幾らでも構成できる。そこで, 有理 3 次元球面となる small cover は  $\mathbb{R}P^3$  から, 命題 3.2 の作用素を繰り返して得られるものだけか? という問題が生じるが, これには反例がある。図 14 の多面体に対応する small cover は, 命題 3.2 の作用素で  $\mathbb{R}P^3$  から構成できない有理球面 small cover の例である。

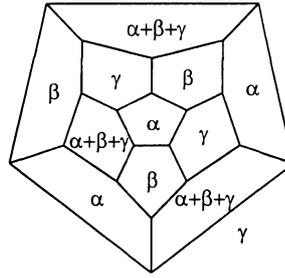


図 14: 4 彩色された正 12 面体

問題 3.4 全ての有理 3 次元球面となる small cover を, 幾つかの基本的な small cover からカット & ペースト作用素で構成する方法を考えよ。

## 参考文献

- [1] M. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.
- [2] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Coxeter polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.
- [3] Z. Lü and M. Masuda, *Equivariant classification of 2-torus manifolds*, Colloq. Math. **115** (2009), 171–188.
- [4] Z. Lü and L. Yu, *Topological types of 3-dimensional small covers*, Forum Math. **23** no.2 (2011), 245–284.
- [5] Z. Lü and L. Yu, *On 3-manifolds with locally standard  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -actions*, Topology and its Applications **60** no.4 (2013), 596–605.
- [6] H. Nakayama and Y. Nishimura, *Orientability of small covers and coloring simple polytopes*, Osaka J. Math. **42** no.1 (2005), 243–256.
- [7] Y. Nishimura, *Combinatorial constructions of three-dimensional small covers*, Pacific J. Math. **256** no.1 (2012), 177–199.
- [8] A. Suciú and A. Trevisan, *Real toric varieties and abelian covers of generalized Davis-Januszkiewicz spaces*, preprint, 2012.