数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 50-69

あるGelfand対の球表現
(Spherical representations for certain Gelfand pairs)

京都大学大学院理学研究科　菊地 克彦
Katsuhiko Kikuchi
Department of Mathematics, Kyoto University

序

Gを連結(unimodular)Lie群, KをGの連結compact部分群とする. このとき, 対(G,K)が**Gelfand対**であるとは, G上の両側K不変可積分函数全体のなすBanach $*$-代数$L^1(K\backslash G/K)$が可換代数であることである. Gelfand対(G,K)は, Gが簡約Lie群であるとき**簡約型**, Gが連結冪零Lie群NとKの半直積$G=K\ltimes N$と表されるとき, **Heisenberg型**であるという. 今回は, 簡約型, Heisenberg型いずれでもないGelfand対の系列について, Gの球表現を具体的に構成する方法を与える.

対(G,K)がGelfand対であるとき, 高々2step冪零Lie群N, およびNに自己同型として作用し, Kを部分群としてもつ簡約Lie群Lが存在して, $G=L\ltimes N$と表される. この論文では, Nは自明でない, 即ち, $N\neq\{1\}$なる連結冪零Lie群, かつLを連結compact Lie群で, $L\neq K$なるものを扱う. よって, $(G,K)=(L\ltimes N;K)$は簡約型でもHeisenberg型でもない.

Gの既約unitary表現ρが対(G,K)の球表現であるとは, 自明でないK不変元が存在することである. 球表現のK不変元全体は表現空間の部分vector空間になるが, (G,K)がGelfand対であれば, K不変元全体のなす部分vector空間は1次元である. このK不変単位vectorから得られる行列成分は**球函数**と呼ばれるが, これは正定値であり, 球表現を決定づける.

Gelfand対$(L\ltimes N,K)$の球表現ρに対応する球函数ϕのL, $K\ltimes N$への制限$\phi^{(L)}=\phi|_L$, $\phi^{(N)}=\phi|_{K\ltimes N}$はそれぞれ$L$, $K\ltimes N$上の球函数である. これらの球函数$\phi^{(L)}$, $\phi^{(N)}$には, Gelfand対(L,K), $(K\ltimes N,K)$の球表現$\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$が対応する. 逆に, (L,K), $(K\ltimes N,K)$の球表現$\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$に対して, これらが対応する$(L\ltimes N,K)$の球表現が存在するかどうか考える.

定理A (1) $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$をそれぞれ(L,K), $(K\ltimes N,K)$の球表現とする. このとき, $(L\ltimes N,K)$の球表現ρで, 対応する球函数ϕのL, $K\ltimes N$への制限$\phi|_L$, $\phi|_{K\ltimes N}$が, それぞれ$\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$に対応する球函数$\phi^{(L)}$, $\phi^{(N)}$と一致するものが存在する. さらに, このようなρは有限個しか存在しない.
(2) $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$をともに$L\ltimes N$の表現と考えるとき, $\rho^{(L)}\otimes\rho^{(N)}$はmultiplicity-freeであり, その既約成分はすべて$(L\ltimes N,K)$の球表現である. また, (1)の性質をみたす$(L\ltimes N,K)$の球表現は, $\rho^{(L)}\otimes\rho^{(N)}$のある既約成分である. 特に, $\rho^{(L)}\otimes\rho^{(N)}$が既約ならば, それ自身$(L\ltimes N,K)$の球表現である.

N が可換 Lie 群であるときは, 単位指標でない N の unitary 指標 $\chi \in \widehat{N}$ に対して $(K \ltimes N, K)$ の球表現 $\rho^{(N)}$ が一意的に定められるが, χ に関する L, K の固定部分群をそれぞれ L_χ, K_χ とするとき, (L, K) の球表現 $\rho^{(L)}$ の L_χ への制限の各既約成分は, すべて (L_χ, K_χ) の球表現となり, $(L \ltimes N, K)$ の球表現を特徴づける. なお, この tensor 積が常に既約である例が存在する. この例については詳しく論じる.

また, N が Heisenberg Lie 群であるときは, N の任意の無限次元既約 unitary 表現 $\pi \in \widehat{N}$ について, π に関する L, K の固定部分群はいずれも L, K 自身であり, (L, K) の球表現 $\rho^{(L)}$, および π から構成される $(K \ltimes N, K)$ の球表現 $\rho^{(N)}$ が対応する $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, $\rho^{(L)}$ と, π の intertwining 表現 W_π の複素共役表現 $\overline{W_\pi}$ の tensor 積の既約成分により特徴づけられる. このような Gelfand 対のうち, indecomposable, principal, Sp(1)-saturated なものが 3 種類存在するが, N の無限次元既約 unitary 表現から構成される球表現は, ある複素 Jordan 代数 V 上の "調和多項式" 全体のなす vector 空間と, ある複素 vector 空間 W 上の多項式環の tensor 積の既約成分により特徴づけられる. そして, $V \oplus W$ はある非管状有界対称領域 $\mathcal{D}$ の Harish-Chandra 実現に現れる複素 vector 空間であり, V はその管状部分を含む. さらに, $\mathbb{T} \times L$ の $V \oplus W$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[V \oplus W]$ への作用は可約, かつ indecomposable な multiplicity-free 作用である. これらのことを, 3 種類の例それぞれについて, V, W, $\mathcal{D}$ およびその管状部分 $\mathcal{D}_0 \subset V$ を具体的に与えて論じる.

1 準備

まず, Gelfand 対と球表現および球函数について基本事項をまとめておく. G を連結 unimodular Lie 群とし, μ を G 上の Haar 測度とする. このとき, G 上の可積分函数全体のなす Banach 空間 $L^1(G) = L^1(G, d\mu)$ は以下の演算をそれぞれ積, 対合として Banach $*$-代数になる.

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy^{-1})g(y)d\mu(y), \tag{1.1}$$

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \tag{1.2}$$

ここで, $f, g \in L^1(G)$, $x \in G$ である. $K \subset G$ を連結 compact 部分群とする. すると, G 上の両側 K 不変な可積分函数全体のなす $L^1(G)$ の部分 vector 空間 $L^1(K\backslash G/K)$ は $L^1(G)$ の閉 $*$-部分代数である.

$$L^1(K\backslash G/K) = \{f \in L^1(G)\,;\, f(kxk') = f(x) \text{ for all } x \in G,\ k, k' \in K\}. \tag{1.3}$$

このとき, 対 (G, K) が **Gelfand 対**であるとは, $L^1(K\backslash G/K)$ が可換代数となることである.

Gelfand 対 (G, K) について, L を $K \subset L \subset G$ なる連結閉部分群とするとき, (L, K) も Gelfand 対である. さらに, L が compact 群であれば, (G, L) も Gelfand 対である.

Gelfand 対について, 以下の性質は重要である.

命題 1 (Vinberg [V]) Gを連結unimodular Lie群, KをGの連結compact部分群で, (G,K)がGelfand対であるとする. このとき, GのKを含む連結簡約閉部分群Lおよび連結冪零閉正規部分群Nが存在して, 以下のことが成り立つ.
(i) Nは高々2step冪零Lie群である.
(ii) GはLとNの半直積$G=L\ltimes N$である. ここで, LのNへの作用を$L\times N\ni(l,x)\mapsto l\cdot x\in N$と表すことにする.
(iii) Nの任意の元xおよびLの任意の元lに対して, Kの元kが存在して, $l\cdot x=k\cdot x$が成り立つ.

$N=\{1\}$, 即ち, $G=L$が簡約Lie群であるとき, Gelfand対(G,K)は**簡約型**, $L=K$, 即ち, GがKとNの半直積であるとき, Gelfand対(G,K)は**Heisenberg型**と呼ばれる. よって, $(G,K)=(L\ltimes N,K)$がGelfand対であるならば, (L,K)は簡約型Gelfand対, $(K\ltimes N,K)$はHeisenberg型Gelfand対である.

$\mathfrak{n}=\mathrm{Lie}\,N$, $\mathfrak{l}=\mathrm{Lie}\,L$, $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}\,K$をそれぞれ$N$, L, KのLie代数とする. そして, $\mathfrak{n}^*$を$\mathfrak{n}$の双対空間, $(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$を$\mathfrak{l}$における$\mathfrak{k}$の$K$不変な補空間の双対空間を表すとする. L, Kはいずれも$\mathfrak{n}^*$に作用するが, $f\in\mathfrak{n}^*$について, fに関するL, Kの固定部分群をそれぞれL_f, K_fと表す. また, Kは$(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$に作用する. この作用についても, $f\in(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$に関する$K$の固定部分群を$K_f$と表すことにする. このとき, 対$(G,K)=(L\ltimes N,K)$がGelfand対であるかどうかの判定が, G, Kの部分群の対たちが簡約型, あるいはHeisenberg型Gelfand対であるかどうかに帰着される.

命題 2 (Yakimova [Y1]) 対$(L\ltimes N,K)$が上の定理の条件をみたすとする. このとき, $(L\ltimes N,K)$がGelfand対であるためには, 以下の条件が成り立つことが必要十分である.
(i) 任意の$\mathfrak{n}^*$について, (L_f,K_f)がGelfand対である.
(ii) 任意の$(\mathfrak{l}/\mathfrak{k})^*$について, $(K_f\ltimes N,K_f)$がGelfand対である.

この論文において, 任意のLie群Gについて, Gのunitary双対, 即ち, Gの既約unitary表現の同値類全体のなす集合を$\widehat{G}$で表すことにする. また, Gのunitary表現ρに対して, その表現空間を$\mathcal{H}_\rho$で表すとする. Gの2つのunitary表現ρ, τに対して, $c(\rho,\tau)$で$\mathcal{H}_\rho$から$\mathcal{H}_\tau$へのintertwining作用素全体のなすvector空間の次元を表すとする. 特に, ρが既約であるときは, τにおけるρの重複度, τが既約であるときは, ρにおけるτの重複度を表す. そして, Gの単位表現を$\hat{1}_G$で表すことにする.

ρをGの既約unitary表現とする. このとき, ρが対(G,K)の**球表現**であるとは, ρの表現空間$\mathcal{H}_\rho$の零でない元vが存在して, $\rho(k)v=v$が任意の$k\in K$について成り立つことである. これは, ρのKへの制限$\rho|_K$において, Kの単位表現$\hat{1}_K$の重複度$c(\hat{1}_K,\rho|_K)$が正であるということと同値である.

(G,K)がGelfand対であるとき, $\rho\in\widehat{G}$が球表現であれば, $c(\hat{1}_K,\rho|_K)=1$である. ここで, ρの表現空間$\mathcal{H}_\rho$上の内積およびnormをそれぞれ$\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$, $\|\cdot\|_\rho$と表すことにする. すると, K不変な単位vector, 即ち, $\rho(k)v=v\,(k\in K)$, かつ$\|v\|_\rho=1$なる$v\in\mathcal{H}_\rho$が絶対値1の定数倍を除いてただ1つ存在する.

G上の有界連続函数$\phi:G\longrightarrow\mathbb{C}$が**球函数**であるとは, 以下の性質が成り立つことである.

(i) $\int_K \phi(xky)dk = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in G$,
(ii) $\phi(1_G) = 1$,
ここで, dk は K 上の正規化された Haar 測度, $1_G \in G$ は G の単位元を表す. さらに, 任意の $x_1, \ldots, x_n \in G$ および $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ について $\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \bar{\lambda}_k \phi(x_k^{-1}x_j) \geq 0$ が成り立つとき, ϕ は**正定値**であるという. (G, K) を Gelfand 対とするとき, G の球表現 ρ について, 表現空間 $\mathcal{H}_\rho$ の K 不変な単位 vector $v \in \mathcal{H}$ をとり, $\phi_\rho(x) = \langle \rho(x)v, v \rangle_\rho$ $(x \in G)$ とすると, ϕ_ρ は G 上の正定値球函数になる. そして, ϕ_ρ は K 不変な単位 vector $v \in \mathcal{H}_\rho$ のとり方に依らない. この ϕ_ρ を球表現 ρ に対応する G 上の球函数と呼ぶ. 逆に, $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ を G 上の正定値球函数とするとき, GNS 構成法により, G の球表現 $\rho_\phi \in \widehat{G}$ が同値を除いて一時的に定められる. この ρ_ϕ を球函数 ϕ に対応する G の球表現と呼ぶ. これらの対応により, G の球表現の同値類全体のなす集合と G 上の正定値球函数全体のなす集合が 1 対 1 に対応する. 従って, G の球表現の parameter を与えることと, G の正定値球函数の parameter を与えることは, 本質的に同じことである (例えば [H2] を参照せよ).

Gelfand 対 $(G, K) = (L \ltimes N, K)$ について, 球表現 $\rho \in \widehat{G}$ に対して, 対応する正定値球函数 ϕ の L, $K \ltimes N$ への制限はいずれも L, $K \ltimes N$ 上の正定値球函数である. それらを $\phi^{(L)}$, $\phi^{(N)}$ と表し, それぞれに対応する L, $K \ltimes N$ の球表現をそれぞれ $\rho_{\phi^{(L)}}$, $\rho_{\phi^{(N)}}$ と表すとする. このとき, これらの球表現 $\rho_{\phi^{(L)}}$, $\rho_{\phi^{(N)}}$ がどれだけ G の球表現 ρ の性質を決定づけるのかが, この論文の主たるテーマである.

2 Heisenberg 型 Gelfand 対

一般の Gelfnad 対の球表現と球函数について論じる前に, Heisenberg 型 Gelfand 対の球表現と球函数についてまとめておく. Gelfand 対 (G, K) が連結冪零 Lie 群と N に自己同型として作用する連結 compact Lie 群 K により $G = K \ltimes N$ と表されているとする. すると, G の既約 unitary 表現 $\rho \in \widehat{G}$ はすべて Mackey の方法で構成することができる ([M]). $\pi \in \widehat{N}$ を N の既約 unitary 表現とする. このとき, 任意の $k \in K$ について, $\pi_k(x) = \pi(k \cdot x)$ $(x \in N)$ とすると, π_k も N の既約 unitary 表現になる. そして, $\pi_{kk'} = (\pi_k)_{k'}$ $(k, k' \in K)$, かつ $\pi_{1_K} = \pi$ となることより, K は $\widehat{N}$ に右から作用する. この作用の $\pi \in \widehat{N}$ に関する K の固定部分群を K_π で表すことにする.

$$K_\pi = \{k \in K \,;\, \pi_k \sim \pi\}. \tag{2.1}$$

N が連結冪零 Lie 群であることより, 任意の $\pi \in \widehat{N}$ について, $K_\pi \subset K$ は K の閉部分群である. そして, 任意の $k \in K_\pi$ に対して, π と π_k の間の unitary な intertwining 作用素, 即ち, π の表現空間 $\mathcal{H}_\pi$ 上の unitary 作用素 $W_\pi(k) : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$ で, 任意の $x \in N$ について, 以下のことが成り立つものが, 絶対値 1 の定数倍の除いてただ 1 つ存在する.

$$\pi_k(x) = W_\pi(k)\pi(x)W_\pi(k)^{-1}. \tag{2.2}$$

このとき, W_π は K_π の $\mathcal{H}_\pi$ 上の射影表現になる. ここで, $(G, K) = (K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるから, 命題 1 より N は高々2step である. そして, K が compact Lie 群であることから, $k \in K_\pi$ に対する intertwining 作用素 $W_\pi(k)$ をうまくと

ることにより, W_π が K_π の unitary 表現であるようにすることができる. さらに, $K_\pi \ltimes N$ は G の閉部分群であり, $(k,n) \in K_\pi \ltimes N$ に対して $\pi W_\pi(k,n) = \pi(n)W_\pi(k)$ とすると, πW_π は $K_\pi \ltimes N$ の $\mathcal{H}_\pi$ 上の unitary 表現になる. いま, K_π の任意の既約 unitary 表現 $T \in \widehat{K}_\pi$ を任意にとる. すると, T は $T(k,n) = T(k)$ $((k,n) \in K_\pi \ltimes N)$ により $K_\pi \ltimes N$ の unitary 表現と見做され, 内部 tensor 積 $T \otimes \pi W_\pi$ は $K_\pi \ltimes N$ の既約 unitary 表現になる. そして, $T \otimes \pi W_\pi$ を G 上の誘導した unitary 表現を $\rho_{\pi,T}$ と表すことにする.

$$\rho_{\pi,T} = \mathrm{Ind}_{K_\pi \ltimes N}^{G}(T \otimes \pi W_\pi). \tag{2.3}$$

すると, $\rho_{\pi,T}$ は G の既約 unitary 表現である. また, G の任意の既約 unitary 表現はすべてこの方法で構成することができる.

$\pi \in \widehat{N}$ における K の固定部分群 K_π の intertwining 表現 W_π は unitary 表現であるが, その既約分解は Gelfand 対の特徴づけおよび球表現の構成に重要な役割を果たす.

命題 3 (Carcano [C], Benson–Jenkins–Ratcliff [BJR1]) *N を高々2step の連結冪零 Lie 群, K を N に自己同型として作用する連結 compact Lie 群とする. このとき, 対 $(K \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるためには, N の任意の既約 unitary 表現 π について, K の固定部分群 K_π の intertwining 表現 W_π の既約分解 $W_\pi = \bigoplus_{T \in \widehat{K}_\pi} c(T, W_\pi)T$ において, K_π の任意の既約 unitary 表現 T に対して, $c(T, W_\pi) \leq 1$ となることが必要十分である.*

即ち, 対 $(K \ltimes N, K)$ が Gelfanad 対であるためには, 任意の $\pi \in \widehat{N}$ について, W_π の既約分解に K_π の任意の既約 unitary 表現 T が高々重複度 1 で現れることが必要十分である.

命題 4 (Benson–Jenkins–Ratcliff [BJR1]) Gelfand 対 $(K \ltimes N, K)$ について, N の既約 unitary 表現 π に対する intertwining 表現 W_π の複素共役表現 $\overline{W}_\pi$ の既約分解を考える.

$$\overline{W}_\pi = \bigoplus_{\alpha} T_\alpha. \tag{2.4}$$

このとき, $K \ltimes N$ の既約 unitary 表現 $\rho_{\pi,\alpha} = \mathrm{Ind}_{K_\pi \ltimes N}^{K \ltimes N} T_\alpha \otimes \pi W_\pi$ は $K \ltimes N$ の球表現である. 逆に, $K \ltimes N$ の任意の球表現はこの方法で構成される.

ところで, この論文で考える Gelfand 対 $(L \ltimes N, K)$ は, 以下の性質をもつものである.
(1) N は自明でない連結冪零 Lie 群,
(2) L は N に自己同型で作用する連結 compact Lie 群,
(3) K は L の閉真部分群.
L が compact であるから, 対 $(L \ltimes N, L)$ も Heisenberg 型 Gelfand 対である. そして, 命題 1 より, 任意の $x \in N$ について, x の L 軌道 $L \cdot x \subset N$ と K 軌道 $K \cdot x \subset N$ は一致する. いま, $\pi \in \widehat{N}$ を N の任意の既約 unitary 表現とすると, π に関する L, K の固定部分群 L_π, K_π について, $L = KL_\pi$, かつ $K_\pi = K \cap L_\pi$ が成り立つ. さ

らに, L_π, K_π の intertwining 表現をそれぞれ W_π^L, W_π^K と表すとすると, それぞれの複素共役表現 $\overline{W}_\pi^L$, $\overline{W}_\pi^K$ は次のように既約分解される.

$$\overline{W}_\pi^L = \bigoplus_\alpha T_\alpha^L,\ \overline{W}_\pi^K = \bigoplus_\alpha T_\alpha^K,\ T_\alpha^L|_K = T_\alpha^K. \tag{2.5}$$

さらに, これらの既約分解から得られる $(L \ltimes N, L)$, $(K \ltimes N, K)$ の球表現には, 次のような関係がある.

$$(\mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T_\alpha^L \otimes \pi W_\pi^L)|_{K\ltimes N} \sim \mathrm{Ind}_{K_\pi \ltimes N}^{K\ltimes N} T_\alpha^K \otimes \pi W_\pi^K. \tag{2.6}$$

以下では, 混乱の恐れがない場合は, W_π^L と W_π^K, および T_α^L と T_α^K を区別せず単に W_π, T_α と表すことにする.

最後に, この論文で扱う群 $L \ltimes N$ 上の球函数の正定値性について述べておく. この論文で扱う Gelfand 対 $(G, K) = (L \ltimes N, K)$ は, 連結冪零 Lie 群 N と compact Lie 群 L の半直積と L の閉部分群 K からなる対であるが, N の L^1 群代数 $L^1(N)$ は対称 Banach $*$-代数であり ([Po]), L は compact であるから, $L^1(G) = L^1(L \ltimes N)$ も対称 Banach $*$-代数である ([LP]). さらに, $L^1(K\backslash G/K) \subset L^1(G)$ は $L^1(G)$ の閉 $*$-部分代数であるから, これも対称 Banach $*$-代数である. G 上の有界球函数は $L^1(K\backslash G/K)$ から $\mathbb{C}$ への (対合を考えない) 連続準同型写像とも考えられる. $L^1(K\backslash G/K)$ は対称 Banach $*$-代数であるから, $L^1(K\backslash G/K)$ から $\mathbb{C}$ への連続準同型は連続 $*$ 準同型, 即ち, $L^1(K\backslash G/K)$ の 1 次元連続 $*$-表現でもある. $L^1(K\backslash G/K)$ の 1 次元 $*$-表現は既約であるから, $L^1(G)$ の既約連続 $*$-表現に拡張される (例えば [Pa] を参照せよ). この既約連続 $*$-表現は $G = L \ltimes N$ の既約 unitary 表現 ρ に対応するが, ρ は $(G, K) = (L \ltimes N, K)$ の球表現であり, 元の球函数は ρ に対応する球函数であるから正定値になる. 同様に, L, $K \ltimes N$ 上の有界球函数は正定値であり, 特に, この論文で扱う球函数は正定値である. 以下では, 球函数はすべて正定値であるとする.

3 主定理.

ここで, Gelfand 対 $(L \ltimes N, K)$ の球表現について, その構造を考える. 既に述べている通り, (L, K), $(K \ltimes N, K)$ はそれぞれ簡約型, Heisenberg 型 Gelfand 対である. そこで, $(L \ltimes N, K)$ の球表現と, (L, K), $(K \ltimes N, K)$ の球表現の間にどのような関係があるのか調べる. まず, $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, Mackey の方法により以下のように構成される. $\pi \in \widehat{N}$ を N の既約 unitary 表現とし, L_π, K_π をそれぞれ π に関する L, K の固定部分群, W_π を L_π, K_π の intertwining 表現とする. そして, $T \in \widehat{L}_\pi$ を L_π の既約 unirtary 表現とする. すると, 次の表現 ρ は $G = L \ltimes N$ の既約 unitary 表現である.

$$\rho = \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T \otimes \pi W_\pi. \tag{3.1}$$

このとき, 次のことがわかる.

命題 5 $\rho = \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T \otimes \pi W_\pi \in (L \ltimes N)\hat{}$ が $(L \ltimes N, K)$ の球表現であるためには, $c(T|_{K_\pi}, \overline{W}_\pi) = 1$ であることが必要十分である.

実際, $(L \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるから, $\rho \in (L \ltimes N)\hat{}$ が球表現であることは, $c(\hat{1}_K, \rho|_K) = 1$ であることと同値である. よって, 以下のことが得られる.

$$\begin{aligned} 1 &= c(\hat{1}_K, \rho|_K) = c(\hat{1}_K, (\mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L \ltimes N} T \otimes \pi W_\pi)|_K) \\ &= c(\hat{1}_K, \mathrm{Ind}_{K_\pi}^{K}(T|_{K_\pi} \otimes (\pi W_\pi)|_{K_\pi})) = c(\hat{1}_K, \mathrm{Ind}_{K_\pi}^{K}(T|_{K_\pi} \otimes W_\pi)) \\ &= c(\hat{1}_{K_\pi}, (T|_{K_\pi}) \otimes W_\pi) = c(T|_{K_\pi}, \overline{W}_\pi). \end{aligned} \tag{3.2}$$

さらに, W_π は multiplicity-free であるから, (2.4) の既約分解に現れる既約成分 T_α で, $c(T|_{K_\pi}, T_\alpha) = 1$ となるものが存在する. ゆえに, 次がわかる.

$$1 = c(T|_{K_\pi}, T_\alpha) = c(\hat{1}_{K_\pi}, (T|_{K_\pi}) \otimes \overline{T}_\alpha). \tag{3.3}$$

ここで, T の表現空間を $\mathcal{H}_T$ とし, $\overline{W}_\pi$ の表現空間 $\overline{\mathcal{H}}_\pi$ の既約分解を $\overline{\mathcal{H}}_\pi = \bigoplus_\alpha \mathcal{H}_\alpha$ (ただし, $\mathcal{H}_\alpha$ は T_α に対応する閉部分 vector 空間) とすると, $\mathcal{H}_T \otimes \overline{\mathcal{H}}_\alpha$ に K_π 不変単位 vector $v_{\pi,\alpha,T}$ が存在する.

いま, 球表現 ρ の表現空間 $\mathcal{H}_\rho$ を次のように実現する.

$$\mathcal{H}_\rho = \left\{ f : L \longrightarrow \mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_\pi ;\ \begin{array}{l} \text{可測},\ f(lh) = (T \otimes W_\pi)(h^{-1})(f(l)) \\ \text{for all}\ l \in L,\ h \in L_\pi, \\ \|f\|_\rho^2 = \int_{L/L_\pi} \|f(l)\|_{\pi,T}^2 d\dot{\mu}(\dot{l}) < +\infty \end{array} \right\}, \tag{3.4}$$

ただし, $\dot{l} \in L/L_\pi$ は $l \in L$ を代表元とする同値類, $\dot{\mu}$ は L/L_π 上の正規化された不変測度であり, $\|\cdot\|_{\pi,T}$ は $\mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_\pi$ 上の norm である. そして, $\rho = \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L \ltimes N} T \otimes \pi W_\pi$ は以下のように実現される.

$$\rho(l, x) f(l') = \pi(l'^{-1} \cdot x) f(l^{-1} l'),\ (l, x) \in L \ltimes N,\ l' \in L. \tag{3.5}$$

このとき, 次の L 上の $\mathcal{H}_T \otimes \mathcal{H}_\pi$ 値函数 f は $\mathcal{H}_\rho$ の K 不変元であることがわかる.

$$f(l) = v_{\pi,\alpha,T},\ l \in L. \tag{3.6}$$

さらに, $\|f\|_\rho = 1$ であり, 次で与えられる $L \ltimes N$ 上の函数 ϕ は球函数である.

$$\phi(g) = \langle \rho(g) f, f \rangle_\rho,\ g \in L \ltimes N, \tag{3.7}$$

ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ は $\mathcal{H}_\rho$ 上の内積である. この ϕ の $K \ltimes N$ への制限 $\phi^{(N)} = \phi|_{K \ltimes N}$ は $K \ltimes N$ 上の球函数であり, 対応する $K \ltimes N$ の球表現 $\rho^{(N)}$ は $\pi \in \widehat{N}$ および T_α から構成される球表現 $\rho_{\pi,\alpha}$ と同値である.

ところで, $(L \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であり, かつ ρ が既約であることより, $\mathcal{H}_\rho$ の K 不変元全体のなす $\mathcal{H}_\rho$ の部分 vector 空間 $\mathcal{H}_\rho^K = \{v \in \mathcal{H}_\pi ; \rho(k)v = v \text{ for all } k \in K\}$ は 1 次元である. また, ϕ の L 上への制限 $\phi^{(L)} = \phi|_L$ は L 上の正定値球函数である. よって, $\phi^{(L)}$ には L のある球表現 $\rho^{(L)}$ が対応する. この $\rho^{(L)}$ は既約であり, ρ の L への制限 $\rho|_L$ の既約分解に現れる. そして, $\rho^{(L)}$ の表現空間 $\mathcal{H}_{\rho^{(L)}}$ の K 不変

元全体のなす部分 vector 空間 $\mathcal{H}^K_{\rho^{(L)}} = \{v \in \mathcal{H}_{\rho^{(L)}}\,;\, \rho^{(L)}(k)v = v \text{ for all } k \in K\}$ の次元も 1 であることより, $c(\rho^{(L)}, \rho|_L) = 1$ である. ゆえに, 次がわかる.

$$\begin{aligned}1 &= c(\rho^{(L)}, \rho|_L) = c(\rho^{(L)}, (\mathrm{Ind}^{L\ltimes N}_{L_\pi \ltimes N} T \otimes \pi W_\pi)|_L)\\ &= c(\rho^{(L)}, \mathrm{Ind}^L_{L_\pi} T \otimes (\pi W_\pi|_{L_\pi})) = c(\rho^{(L)}, \mathrm{Ind}^L_{L_\pi} T \otimes W_\pi)\\ &= c(\rho^{(L)}|_{L_\pi}, T \otimes W_\pi) = c(T, (\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes \overline{W}_\pi).\end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで, (2.4) の既約分解を用いて, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes \overline{W}_\pi$ は次のように直交分解される.

$$(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes \overline{W}_\pi \sim \bigoplus_\alpha ((\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha). \tag{3.9}$$

$\rho^{(L)}$ の表現空間 $\mathcal{H}_{\rho^{(L)}}$ から $\mathcal{H}_\rho$ への L 不変な埋め込みを $\iota : \mathcal{H}_{\rho^{(L)}} \longrightarrow \mathcal{H}_\rho$ とする. すると, $\iota(\mathcal{H}^K_{\rho^{(L)}}) = \mathcal{H}^K_\rho$ であり, これは次の空間に含まれる.

$$\{f \in \mathcal{H}_\rho\,;\, f(l) \in \mathcal{H}_T \otimes \overline{\mathcal{H}}_\alpha \text{ for all } l \in L\}. \tag{3.10}$$

これより, 次のことがわかる.

$$1 = c(\rho^{(L)}, \mathrm{Ind}^L_{L_\pi} T \otimes \overline{T}_\alpha) = c(\rho^{(L)}|_{L_\pi}, T \otimes \overline{T}_\alpha) = c(T, (\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha). \tag{3.11}$$

即ち, $T \in \widehat{L}_\pi$ は $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ の既約分解に重複度 1 で現れる既約 unitary 表現である. $\rho^{(L)}$, T_α はいずれも有限次元であるから, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ の既約分解に現れる L_π の既約 unitary 表現は有限個である.

逆に, (L, K), $(K \ltimes N, K)$ の球表現 $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$ が与えられるとする. さらに, $\rho^{(N)} \in (K \ltimes N)\hat{}$ は N の既約 unitary 表現 $\pi \in \widehat{N}$, および intertwining 表現 W_π の複素共役表現 $\overline{W}_\pi$ の既約成分 $T_\alpha \in \widehat{K}_\pi$ から構成されるとする. $\overline{W}_\pi$ および T_α は L_π の表現とも考えることができる. いま, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ の既約成分 $T \in \widehat{L}_\pi$ を任意にとる. すると, 次が得られる.

$$\begin{aligned}1 &\le c(T, (\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha) = c(\rho^{(L)}|_{L_\pi}, T \otimes \overline{T}_\alpha) = c(\rho^{(L)}, \mathrm{Ind}^L_{L_\pi} T \otimes \overline{T}_\alpha)\\ &\le c(\rho^{(L)}|_{L_\pi}, T \otimes W_\pi) = c(\rho^{(L)}, \mathrm{Ind}^L_{L_\pi} T \otimes W_\pi) = c(\rho^{(L)}, \mathrm{Ind}^L_{L_\pi} T \otimes (\pi W_\pi)|_{L_\pi})\\ &= c(\rho^{(L)}, (\mathrm{Ind}^{L\ltimes N}_{L_\pi \ltimes N} T \otimes \pi W_\pi)|_L) \le 1.\end{aligned}$$

よって, $\rho = \mathrm{Ind}^{L\ltimes N}_{L_\pi \ltimes N} T \otimes \pi W_\pi \in (L \ltimes N)\hat{}$ について, $c(\rho^{(L)}, \rho|_L) = 1$ であり, $\rho^{(L)}$ は非自明な K 不変元をもつから, ρ も非自明な K 不変元をもつ. ゆえに, ρ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. さらに, 次も得られる.

$$\begin{aligned}1 &= c(T, (\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha) = c(\rho^{(L)}|_{L_\pi}, T \otimes \overline{T}_\alpha)\\ &= c(\rho^{(L)}|_{L_\pi}, T \otimes W_\pi) = c(T, (\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes \overline{W}_\pi).\end{aligned}$$

よって, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes \overline{W}_\pi$ は multiplicity-free であり, その部分表現である $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ も multuplicity-free に既約分解されることがわかる. いま, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ の既約分解を考える.

$$(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha = \bigoplus_j T_j. \tag{3.12}$$

このとき, 次が成り立つことがわかる.

$$\begin{aligned}\bigoplus_j (\mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T_j \otimes \pi W_\pi) &\sim \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N}\left(\bigoplus_j T_j\right) \otimes \pi W_\pi \\ &= \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N}((\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha) \otimes \pi W_\pi \\ &\sim \rho^{(L)} \otimes (\mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T_\alpha \otimes \pi W_\pi) = \rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}.\end{aligned}$$

特に, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ が既約であれば, $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}$ は球表現である. 以上により, 次の定理を得る.

定理 6 (1) $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$ をそれぞれ (L, K), $(K \ltimes N, K)$ の球表現とし, $\rho^{(N)} = \rho_{\pi,\alpha}$ が N の既約 unitary 表現 $\pi \in \widehat{N}$ および π に関する K の固定部分群 K_π の intertwining 表現 W_π の複素共役表現 $\overline{W}_\pi$ の既約成分 T_α から得られるものとする. すると, W_π, T_α は L の固定部分群 L_π の表現とも考えられ, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes \overline{W}_\pi$, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ は multiplicity-free である.
(2) $T \in \widehat{L}_\pi$ を $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ の既約成分とするとき, $\rho = \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T \otimes \pi W_\pi$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現であり, $\phi^{(L)}$, $\phi^{(N)}$, ϕ をそれぞれ $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$, ρ に対応する球函数とすると, $\phi|_L = \phi^{(L)}$, および $\phi|_{K\ltimes N} = \phi^{(N)}$ が成り立つ. 逆に, このような性質をみたす $(L \ltimes N, K)$ の球表現 ρ は, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ の既約成分 T を用いて $\rho = \mathrm{Ind}_{L_\pi \ltimes N}^{L\ltimes N} T \otimes \pi W_\pi$ という形で構成される. 特に, このような球表現 ρ は常に存在するが, 有限個しか存在しない.
(3) $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$ をいずれも $L \ltimes N$ の既約 unitary 表現と考える. このとき, $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}$ の既約成分はすべての $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. 特に, $(\rho^{(L)}|_{L_\pi}) \otimes T_\alpha$ が既約であれば, $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現である.

4 N が可換 Lie 群の場合.

ここでは, 冪零 Lie 群 N が可換である場合について, 球表現の性質をより詳しく述べる. 可換 Lie 群 N の任意の既約 unitary 表現は 1 次元表現である. 即ち, N の任意の既約 unitary 表現は unitary 指標である. ゆえに, $L \ltimes N$ の既約 unitary 表現は, すべて N の unitary 指標 χ および χ に関する L の固定部分群 L_χ の既約 unitary 表現 T により構成される.

$\chi = \hat{1} \in \widehat{N}$ が単位表現であるときは, L, K の固定部分群 L_χ, K_χ はいずれも L, K と一致する. そして, intertwining 表現 W_χ も単位表現である. よって, L の既約 unitary 表現 $T \in \widehat{L}$ について, それを用いて構成される $L \ltimes N$ の既約 unitary 表現 $\rho = T \otimes \chi W_\chi$ は T 自身であり, 命題 5 より, ρ が球表現であることは, $c(T|_K, \hat{1}_K) = 1$, 即ち, T が (L, K) の球表現であることである. この場合, 球表現 ρ とは (L, K) の球表現 T そのものである.

次に, $\chi \in \widehat{N}$ が単位表現でない unitary 指標であるとする. すると, 一般に $L \neq L_\chi$, $K \neq K_\chi$ であるが, $(L \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるから, 命題 2 より (L_χ, K_χ) も Gelfand 対である. また, この場合も intertwining 表現 W_χ は単位表現である. よって, L_χ の既約 unitary 表現 $T \in \widehat{L}_\chi$ について, $L \ltimes N$ の既約 unitary 表現 $\rho = \mathrm{Ind}_{L_\chi \ltimes N}^{L\ltimes N} T \otimes \chi W_\chi \in (L \ltimes N)\hat{}$ が球表現であるためには, 命題 5 より, 次

のことが成り立つことが必要十分である.

$$1 = c(T|_{K_\chi}, \overline{W}_\chi) = c(\hat{1}_{K_\chi}, T|_{K_\chi}). \tag{4.1}$$

これは, T が (L_χ, K_χ) の球表現であることを意味している. ところで, この ρ に対して, 対応する球函数 ϕ の L への制限 $\phi^{(L)} = \phi|_L$ は L 上の球函数であり, L の球表現 $\rho^{(L)}$ が対応する. このとき, ρ を構成するために用いる T は $(\rho^{(L)}|_{L_\chi}) \otimes \overline{W}_\chi$ の既約成分である. ところが, $\overline{W}_\chi$ は単位表現であるから, T は $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ の既約成分である. さらに, $(\rho^{(L)}|_{L_\chi}) \otimes \overline{W}_\chi$ は multiplicity-free に既約分解されるが, これは $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ が multiplicity-free であることを意味している. なお, N の unitary 指標 $\chi \in \widehat{N}$ について, $\rho^{(N)} = \rho_\chi = \mathrm{Ind}_{K_\chi \ltimes N}^{K \ltimes N} \chi$ は $K \ltimes N$ の球表現であり, $K \ltimes N$ の球表現はすべてこのように構成される. さらに, $\rho^{(N)}$ は $(L \ltimes N, L)$ の球表現とも考えることができる. 従って, 定理 6 より以下のことが得られる.

定理 7 N が連結可換 Lie 群であるとする.
(1) $\rho^{(L)}$ を (L, K) の球表現, $\chi \in \widehat{N}$ を N の unitary 指標とする. そして, L_χ, K_χ をそれぞれ χ に関する L, K の固定部分群とする. このとき, $\rho^{(L)}$ の L_χ への制限は multiplicity-free であり, 各既約成分は (L_χ, K_χ) の球表現である.
(2) $T \in \widehat{L}_\chi$ を $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ の既約成分とするとき, $\rho = \mathrm{Ind}_{L_\chi \ltimes N}^{L \ltimes N} T \otimes \chi$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. そして, $(L \ltimes N, K)$ の任意の球表現はすべてこの方法で構成される.
(3) $\rho^{(L)} \otimes \rho_\chi$ の既約成分はすべて $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. 特に, $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ が既約であれば, $\rho^{(L)} \otimes \rho_\chi$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現である.

N の unitary 指標 $\chi \in \widehat{N}$ が単位表現でなければ, 一般に $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ は既約ではない. ところが, L の任意の球表現 $\rho^{(L)}$ の L_χ への制限が既約となる例が存在する. なお, 任意の Lie 群 H について, $\Delta(H)$ で直積群 $H \times H$ の対角線部分群を表すことにする.

$$\Delta(H) = \{(h, h) \in H \times H \,;\, h \in H\}. \tag{4.2}$$

例 1. $N = \mathbb{R}^4$, $L = \mathrm{SO}(4)$, $K = \mathrm{U}(2)$ とし, L は N に自然に作用し, K は N を $\mathbb{C}^2$ と同一視して, $\mathbb{C}^2$ に自然に作用するものとする. すると, $(L \ltimes N, K)$ は Gelfand 対である ([Y2]).

$(L \ltimes N, K)$ の球表現を構成しやすくするために, $\mathrm{SO}(4)$, $\mathrm{U}(2)$ の 2 重被覆群 $\widetilde{L} = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, $\widetilde{K} = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ をとる. ただし, $\widetilde{L}$ の N への作用は, N を四元数体 $\mathbb{H}$ と同一視して, 次のように表されるものとする.

$$(q_1, q_2) \cdot x = q_1 x q_2^{-1}, \ (q_1, q_2) \in \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1), \ x \in \mathbb{H}. \tag{4.3}$$

すると, 次のことが成り立つ.

$$\widetilde{L}/\widetilde{K} \sim L/K \sim \mathrm{Sp}(1)/\mathrm{U}(1), \quad (\widetilde{L} \ltimes N)/\widetilde{K} \sim (L \ltimes N)/K. \tag{4.4}$$

そして, $(\widetilde{L} \ltimes N, \widetilde{K})$ の球表現は, $(L \ltimes N, K)$ の球表現と, $\widetilde{L} \ltimes N$ から $L \ltimes N$ への被覆写像の合成である. ゆえに, 始めから $L = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, $K = \mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$, $N = \mathbb{H}$ としてよい.

L の球表現 $\rho^{(L)}$ は, $\mathrm{Sp}(1)$ の $2n+1$ 次元既約 unitary 表現 τ_n (n は非負整数) により次のように与えられる.

$$\rho^{(L)}(q_1, q_2) = \tau_n(q_1),\ q_1, q_2 \in \mathrm{Sp}(1). \tag{4.5}$$

$\chi \in \widehat{N}$ を unitary 指標とする. χ が単位表現であれば, $L_\chi = L$, $K_\chi = K$ であり, $\rho^{(N)} = \rho_\chi$ も単位表現であるから, $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)} \sim \rho^{(L)}$ となり, $\rho^{(L)}$ そのものが $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. そこで, χ が単位表現でないとする. $L \ltimes N$ の既約 unitary 表現を構成するためには, $\chi \in \widehat{N}$ を任意にとる必要はなく, $\widehat{N}$ における L 軌道 (K 軌道とも一致する) から代表元を選び, その代表元から構成すればよい. $\widehat{N}$ の各 L 軌道 (単位表現のみという軌道を除く) の代表元として, 正実数 r を用いて次のように表されるものをとる.

$$\chi(x) = \chi_r(x) = e^{ir\mathrm{Re}\,x},\ x \in \mathbb{H}, \tag{4.6}$$

ただし, $\mathrm{Re}\,x$ は x の実部, 即ち, $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ $(x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$ について, $\mathrm{Re}\,x = x_0$ とする. すると, L_χ, K_χ は次のようになる.

$$L_\chi = \Delta(\mathrm{Sp}(1)) = \{(q,q) \in \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)\,;\, q \in \mathrm{Sp}(1)\} \sim \mathrm{Sp}(1), \tag{4.7}$$
$$K_\chi = \Delta(\mathrm{U}(1)) = \{(u,u) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(1)\,;\, u \in \mathrm{U}(1)\} \sim \mathrm{U}(1). \tag{4.8}$$

よって, $(L_\chi, K_\chi) \sim (\mathrm{Sp}(1), \mathrm{U}(1))$ も Gelfand 対であり, $\rho^{(L)}$ の L_χ への制限 $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ は次のようになる.

$$\rho^{(L)}|_{L_\chi}(q,q) = \tau_n(q),\ q \in \mathrm{Sp}(1). \tag{4.9}$$

ゆえに, $\rho^{(L)}|_{L_\chi}$ は既約である. χ から得られる $(L \ltimes N, L)$ の球表現 $\rho^{(N)}$ は $\rho_\chi = \mathrm{Ind}_{L_\chi \ltimes N}^{L \ltimes N} \chi$ であり, $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. ρ, $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$ に対応する球函数をそれぞれ ϕ, $\phi^{(L)}$, $\phi^{(N)}$ とすると, $\phi = \phi^{(L)}\phi^{(N)}$ である. $\phi^{(L)}$, $\phi^{(N)}$ はそれぞれ Legendre 多項式, Bessel 函数で表すことができるが, ϕ はこれらの特殊函数の積として表すことができる.

ここで, Gelfand 対に関する幾つかの概念を導入する. r を正整数とし, (G_j, K_j) $(1 \leq j \leq r)$ を r 個の Gelfand 対とする. すると, それらの群の直積たちのなす対 $(G_1 \times \cdots \times G_r, K_1 \times \cdots \times K_r)$ も Gelfand 対である. これを $(G_1, K_1), \ldots, (G_r, K_r)$ の直積と呼ぶことにする. このとき, Gelfand 対 (G, K) が **indecomposable** であるとは, (G, K) が非自明な 2 つの Gelfand 対の直積として表されない, 即ち, G_1, $G_2 \neq \{1\}$ なる Gelfand 対 (G_1, K_1), (G_2, K_2) の直積として表されないことである. 任意の Gelfand 対 (G, K) は必要ならば G, K それぞれについて適当な円環群, 即ち, $\mathbb{T}$ の有限個の直積との積 $\widetilde{G} = \mathbb{T}^{t_1} \cdot G$, $\widetilde{K} = \mathbb{T}^{t_2} \cdot K$ (t_1, t_2 は非負整数) をとることにより, $(\widetilde{G}, \widetilde{K})$ は有限個の indecomposable な Gelfand 対の直積になる. 以下では, 円環群が十分付け加えられた Gelfand 対を主に扱う.

$(L \ltimes N, K)$ を Gelfand 対とし, 必要ならば適当な被覆群をとることにより, L が中心 $Z(L)$ と単純成分 $L_1, \ldots, L_m$ により $L = Z(L) \times L_1 \times \cdots \times L_m$ と直積の形で表されているとする. また, L の N への作用を $\sigma\,;\, L \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ ($\mathrm{Aut}(N)$ は N の自己同型群) とするとき, P で $\mathrm{Ker}\,\sigma$ の連結成分を表すとする. この P を ineffective kernel と呼ぶ. また, N の Lie 代数 $\mathfrak{n}$ について, 導来 ideal $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ は L 不変である.

よって, L は剰余空間 $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ に作用するが, その既約分解を $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = \mathfrak{w}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{w}_p$ とする.

定義 8 (Yakimova [Y2]) Gelfand 対 $(L \ltimes N, K)$ が **principal** であるとは, 以下の条件をみたすことである.
(i) P は半単純である.
(ii) K の中心 $Z(K)$ は $Z(K) = Z(L) \times (L_1 \cap Z(K)) \times \cdots \times (L_m \cap Z(K))$ と直積分解される.
(iii) $Z(L)$ は $C_j \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{w}_j)$ $(1 \leq j \leq p)$ なる部分群 C_j たちにより, $Z(L) = C_1 \times \cdots \times C_p$ と直積分解される.

また, L の単純成分 L_i を 1 つとり, 他の単純成分の直積を L^i と表すことにする. また, L から L_i への射影を π_i で表すとする.

定義 9 (Yakimova [Y2]) Gelfand 対 $(L \ltimes N, K)$ が Sp(1)-**saturated** であるとは, 以下の条件をみたすことである.
(i) K の任意の正規部分群 K_1 で, Sp(1) と局所同型であるものは, P に含まれるか, K の半単純成分 K_s における P の補因子 $K^\diamond$ $(P \times K^\diamond = K_s$ となる K_s の正規部分群$)$ に含まれる.
(ii) L_* で, $\mathfrak{n}$ のある一般的な点 $x \in \mathfrak{n}$ に関する L の固定部分群を表すとする. このとき, $L_i \not\subset P$ かつ $\pi_i(L_*) = L_i$ が成り立つならば, L_i は K に含まれる.
(iii) L_i の作用が非自明であり, $Z(L) \times L^i$ の作用が既約である $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ の既約成分 $\mathfrak{w}_j \subset \mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$ について, L_i は $(\mathfrak{n}/[\mathfrak{n},\mathfrak{n}])/\mathfrak{w}_j$ に自明に作用する.

N が可換な Gelfand 対 $(L \ltimes N, K)$ で, indecomposable, principal, かつ Sp(1)-satureted であるものは, 以下のいずれかである ([Y2]).
(1) $((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n)) \ltimes \mathbb{C}^{2n}, \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n))$, $n \geq 2$,
(2) $(\mathrm{SO}(2n) \ltimes \mathbb{R}^{2n}, \mathrm{U}(n))$, $n \geq 3$,
(3) $((\mathbb{T} \times \mathrm{SO}(8)) \ltimes \mathbb{C}^8 ; \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(7))$,
(4) $(\mathrm{SO}(8) \ltimes \mathbb{R}^8, \mathrm{Spin}(7))$,
(5) $(\mathrm{SO}(7) \ltimes \mathbb{R}^7, \mathrm{G}_2)$,
(6) $(\mathrm{Spin}(7) \ltimes \mathbb{R}^8, \mathrm{SU}(4))$,
(7) $((\mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SO}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n, \Delta(\mathrm{SO}(n)))$, $n \geq 5$,
(8) $((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)) \ltimes \mathbb{C}^n ; \mathbb{T} \times \Delta(\mathrm{SU}(n)))$, $n \geq 3$,
(9) $((\mathrm{Sp}(m) \times \mathrm{Sp}(2) \times \mathrm{Sp}(2)) \ltimes \mathrm{M}(m, 2, \mathbb{H}), \mathrm{Sp}(m) \times \Delta(\mathrm{Sp}(2)))$.
ただし, G_2 は G_2 型単連結 compact Lie 群を表す. また, L, K の半単純成分をそれぞれ L_s, K_s とするとき, (1), (3) については, (L, K) を (L, K_s), あるいは (L_s, K_s) にしても Gelfand 対になる. これらの対については, この節で述べられた方法ですべての球表現が与えられる.

5 N が Heisenberg Lie 群の場合.

次に, 冪零 Lie 群 N が Heisenberg Lie 群である場合を考察する. n を正整数とするとき, $2n+1$ 次 Heisenberg Lie 群 H_n を次のように実現する. 集合としては

$H_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ であり, 積は以下のように定義される.

$$(z_1, t_1)(z_2, t_2) = \left(z_1 + z_2 - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\langle z_1, z_2\rangle, t_1 + t_2\right),\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

ただし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{C}^n$ 上の標準内積を表し, 複素数 $\omega \in \mathbb{C}$ に対して, $\mathrm{Im}\,\omega$ は ω の虚部を表すとする. すると, H_n の中心 $Z(H_n)$ は以下のものであり, 導来部分群 $[H_n, H_n]$ は一致し, Lie 群として $\mathbb{R}$ と同型である.

$$Z(H_n) = [H_n, H_n] = \{(0, t) \in H_n\,;\, t \in \mathbb{R}\} \sim \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

$N = H_n$ の既約 unitary 表現 $\pi \in \widehat{H}_n$ は 1 次元か無限次元である. $N = H_n$ の 1 次元表現 $\chi \in \widehat{H}_n$ は, 本質的に剰余群 $\overline{N} = H_n/\mathbb{R}$ の unitary 指標である. そして, $\overline{N}$ は Lie 群として $\mathbb{C}^n$ と同型であり, 特に可換である. また, 連結 compact Lie 群 L が $N = H_n$ に作用するとき, $Z(N) = Z(H_n)$ は L 不変であり, L は剰余群 $\overline{N}$ に作用する. この作用により, $L \ltimes N$ の $Z(N)$ による剰余群 $(L \ltimes N)/Z(N)$ は $L \ltimes \overline{N}$ と同型であり, さらに, $(L \ltimes N, K)$ が Gelfand 対ならば, $(L \ltimes \overline{N}, K)$ も Gelfand 対である. $\overline{N} \sim \mathbb{C}^n$ は可換であるから, $N = H_n$ の 1 次元表現 χ から構成される $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, 本質的に N が可換である場合に構成されたものと同一視される.

以下では, $\pi \in \widehat{N} = \widehat{H}_n$ が無限次元の場合を考える. H_n の無限次元表現 $\pi \in \widehat{H}_n$ について, π の中心 $Z(H_n)$ への制限は, 表現空間 $\mathcal{H}_\pi$ 上の恒等作用素 $I_{\mathcal{H}_\pi}$ および $\mathbb{R}$ の unitary 指標 $\chi \in$ を用いて, $\pi(0, t) = \chi(t) I_{\mathcal{H}_\pi}\ (t \in \mathbb{R})$ と表される. この指標 χ を π の**中心指標**と呼ぶ. 中心指標 χ は, 0 でない実数 λ により, $\chi(t) = \chi_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ $(t \in \mathbb{R})$ と表される. そして, π, $\pi' \in \widehat{H}_n$ に対応する中心指標がそれぞれ χ_λ, $\chi_{\lambda'}\ (\lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ であるとき, π と π' が同値であることと, $\lambda = \lambda'$ が成り立つことは同値である. そこで, 中心指標が χ_λ である H_n の既約 unitary 表現を π_λ と表すことにする.

N の無限次元 unitary 表現 π_λ を Fock 空間上で実現する. $\lambda > 0$ を正実数とするとき, Fock 空間 $\mathcal{H}_\lambda$ を以下のものとする.

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ f\,:\,\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, 正則,\ \|f\|_\lambda^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-\frac{\lambda}{2}\|w\|^2} dw < +\infty \right\}. \quad (5.3)$$

ここで, $\|\cdot\|$ は $\mathbb{C}^n$ 上の標準内積から得られる norm であり, 積分は $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ と同一視したときの Lebesgue 測度による積分である. すると, $\mathcal{H}_\lambda$ は $\|\cdot\|_\lambda$ を norm としてもつ Hilbert 空間であり, $\mathbb{C}^n$ 上の多項式全体のなす vector 空間 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ は $\mathcal{H}_\lambda$ の稠密な部分 vector 空間である. このとき, π_λ は以下のように実現される.

$$\pi_\lambda(z, t) f(w) = e^{it + \frac{\lambda}{2}\langle w, z\rangle - \frac{\lambda}{4}\|z\|^2} f(w - z),\ f \in \mathcal{H}_\lambda,\ z, w \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

ここで, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{C}^n$ 上の標準内積である. $\lambda < 0$ であるときは, $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{-\lambda}$ として, π_λ は次のように実現する.

$$\pi_\lambda(z, t) = \pi_{-\lambda}(\overline{z}, -t),\ z \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

L は連結 compact Lie 群であるから, H_n の実現 $H_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ において, 初めから $\mathbb{C}^n$ を保存し, さらに, $\mathbb{C}^n$ の標準内積を不変にすると仮定してよい. 即ち, 任意

の $l \in L$ について, $l\cdot(z,t) = (l\cdot z, t)$ $(z \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R})$, かつ $\|l\cdot z\| = \|z\|$ $(z \in \mathbb{C}^n)$ が成り立つ. このとき, 正実数 $\lambda > 0$ について, $(\pi_\lambda)_l$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned}(\pi_\lambda)_l(z,t)f(w) &= \pi_\lambda(l\cdot z, t)f(w)\\ &= e^{i\lambda t + \frac{\lambda}{2}\langle w, l\cdot z\rangle - \frac{\lambda}{4}\|z\|^2} f(w - l\cdot z),\ z, w \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

すると, H_n の既約 unitary 表現 $(\pi_\lambda)_l$ の中心指標は χ_λ である. よって, $(\pi_\lambda)_l$ と π_λ は同値である. ゆえに, π_λ に関する L, K の固定部分群はそれぞれ L, K 自身である. $l \in L$ に対して, intertwining 作用素 $W_{\pi_\lambda}(l)$ を以下のように与える.

$$W_{\pi_\lambda}(l)f(w) = f(l^{-1}\cdot w),\ f \in \mathcal{H}_\lambda,\ w \in \mathbb{C}^n. \tag{5.6}$$

すると, $W_{\pi_\lambda}(l)$ は $\mathcal{H}_\lambda$ 上の unitary 作用素で, $W_{\pi_\lambda}(l)\pi_\lambda(z,t)W_{\pi_\lambda}(l)^{-1} = (\pi_\lambda)_l(z,t)$ $(z \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R})$ が成り立つ. そして, W_{π_λ} は $\mathcal{H}_\lambda$ 上の unitary 表現になる. さらに, W_{π_λ} は多項式空間 $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ を不変にする. これらのことは, $\lambda < 0$ のときも同様に成り立つ. ゆえに, W_{π_λ} の既約分解は, 本質的に $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ の (代数的な意味での) 既約分解に帰着される. そして, $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ 上では, W_{π_λ} は本質的に λ に依らない. よって, λ として特定の実数 (例えば $\lambda = 2$) のときのみ考えれば十分であり, π_λ を単に π と表すことにする. すると, $L_\pi = L$, $K_\pi = K$ であり, $L \ltimes N$ の既約 unitary 表現は, L の既約 unitary 表現 T により, $\rho = T \otimes \pi W_\pi$ と表される. このとき, 命題5より, ρ が球表現であるためには, 以下のことが成り立つことが必要十分である.

$$c(T|_K, \overline{W}_\pi) = 1. \tag{5.7}$$

$(L \ltimes N, K)$ が Gelfand 対であるとき, $(K \ltimes N, K)$, $(L \ltimes N, L)$ も Gelfand 対である. ゆえに, intertwining 表現 W_π は muliplicity-free に既約分解される. いま, W_π の複素共役表現 $\overline{W}_\pi$ が以下のように既約分解されているとする.

$$\overline{W}_\pi = \bigoplus_\alpha T_\alpha. \tag{5.8}$$

この分解も λ のとり方に依らない. これらのことと定理6より, 以下のことが得られる.

定理 10 $N = H_n$ を $2n+1$ 次元 Heisenberg Lie 群 (n は正整数), $\pi \in \widehat{N} = \widehat{H}_n$ を無限次元既約 unitary 表現とする.
(1) $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$ をそれぞれ (L,K), $(K \ltimes N, K)$ の球表現とし, $\rho^{(N)} = \rho_{\pi,\alpha}$ は π の intertwining 表現 W_π の複素共役表現 $\overline{W}_\pi$ の既約成分 T_α から構成されるものとする. このとき, $\rho^{(L)} \otimes \overline{W}_\pi$, $\rho^{(L)} \otimes T_\alpha$ は multiplicity-free である.
(2) $T \in \widehat{L}$ を $\rho^{(L)} \otimes T_\alpha$ の既約成分とする. このとき, $T \otimes \pi W_\pi$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現であり, 対応する球函数 ϕ の L, $K \ltimes N$ への制限 $\phi^{(L)} = \phi|_L$, $\phi^{(N)} = \phi|_{K\ltimes N}$ に対応する (L,K), $(K \ltimes N, K)$ の球表現はそれぞれ $\rho^{(L)}$, $\rho^{(N)}$ である. そして, このような性質をもつ $(L \ltimes N, K)$ の球表現 ρ はすべてこの方法で構成される.
(3) $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}$ の既約成分はすべて $(L \ltimes N, K)$ の球表現である. 特に, $T \otimes T_\alpha$ が既約であれば, $\rho^{(L)} \otimes \rho^{(N)}$ は $(L \ltimes N, K)$ の球表現である.

ところで, $N = H_n$ が $2n+1$ 次元 Heisenberg Lie 群であり, indecomposable, principal, かつ Sp(1)-satureted である Gelfand 対 $(L \ltimes N, K)$ は以下のいずれかである ([Y2]).

(1) $((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n)) \ltimes H_{2n}, \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n))$, $n \geq 2$,
(2) $((\mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(8)) \ltimes H_8, \mathbb{T} \otimes \mathrm{Spin}(7))$,
(3) $((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)) \ltimes H_n, \mathbb{T} \times \Delta(\mathrm{SU}(n)))$, $n \geq 3$.

ただし, (1) については, L, K の半単純成分をそれぞれ L_s, K_s とするとき, (L, K) を (L, K_s), (L_s, K_s) に替えてもよい.

上の 3 種類の Gelfand 対には共通の性質がある. まず, L/K_s はある管状有界対称領域 $\mathcal{D}_0$ の Shilov 境界 Σ に局所微分同相である. さらに, $\mathcal{D}_0$ はある非管状有界対称領域 $\mathcal{D}$ の管状部分である. 即ち, $\mathbb{C}$ 上の (Jordan 代数の構造をもつ) 有限次元 vector 空間 V および有限次元 vector 空間 W が存在して, $D_0 \subset V$ であり, $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 $V \oplus W$ は $\mathcal{D}$ を Harish-Chandra の意味で実現するために用いる vector 空間と見做すことができる. さらに, $V \oplus W$ は Hermite Jordan 3 重系の構造をもつ (例えば [FK][S] を参照せよ).

V への L の作用から, V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ が得られるが, この作用についての相対不変式が存在する. そのうち, 既約多項式であるものが, 定数倍を除いて 1 個存在する. それを $h \in \mathbb{C}[V]$ と表すことにする. すると, h は L_s 不変であり, $\mathbb{C}[V]$ における L_s 不変元全体からなる $\mathbb{C}[V]$ の部分環は h を変数とする 1 変数多項式環 $\mathbb{C}[h]$ となる. このとき, V 上の L の作用に関する調和多項式を定義することができる. $f \in \mathbb{C}[V]$ が (L の作用に関する) **調和多項式**であるとは, $h(\partial)f = 0$ をみたすことである. ここで, $h(\partial)$ とは, h を適当な座標で表示したとき, そこに現れる変数 x_j をその変数に関する偏微分 $\partial_j = \partial_{x_j}$ に替えたものである. V 上の調和多項式全体のなす $\mathbb{C}[V]$ の部分 vector 空間を $\mathrm{Harm}[V]$ と表すことにする.

$$\mathrm{Harm}[V] = \{f \in \mathbb{C}[V]\,;\, h(\partial)f = 0\}. \tag{5.9}$$

すると, vector 空間として, V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ は L_s 不変式環と調和多項式全体のなす部分 vector 空間 $\mathrm{Harm}[V]$ の tensor 積で表される.

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[h] \otimes \mathrm{Harm}[V]. \tag{5.10}$$

$K_s \subset L_s \subset L$ であることより, L_s/K_s は $\mathcal{D}_0$ の Shilov 境界 Σ の部分集合と見做すことができるが, それを V の部分集合と考えると, 相対不変式 h は L_s/K_s 上では 0 でない定数函数になる. そこで, 必要ならば h を定数倍することにより, L_s/K_s を $h(v) = 1$ となる $v \in \Sigma$ 全体のなす閉部分集合と考えることができる.

$$L_s/K_s \sim \Sigma_1 = \{v \in \Sigma\,;\, h(v) = 1\} \subset V. \tag{5.11}$$

(L, K) の球表現は, L/K 上の 2 乗可積分函数全体のなす Hilbert 空間 $L^2(L/K)$ 上で実現されるが, L/K は L_s/K_s と同一視される. そして, (L, K), (L, K_s), (L_s, K_s) はすべて Gelfand 対であり, (L, K) の球表現は, L_s への制限が $L^2(L_s/K_s)$ 上に現れる (L_s, K_s) の球表現であって, L の中心の連結成分では単位指標となるものである. $L^2(\Sigma)$ の既約成分は, V 上の (正則) 多項式のなす $\mathbb{C}[V]$ の部分 vector 空間に, 必要ならば相対不変式 h の整数冪を掛けることにより実現される. (L_s, K_s) の球

表現は, (L,K_s) の球表現の L_s への制限として実現されるが, これはすべて $L^2(\Sigma)$ の既約成分の L_s への制限として実現される. そして, h は $\Sigma_1\sim L_s/K_s$ 上値 1 をとるから, L_s の表現の表現空間の元としては, h の冪は無視できる. ゆえに, (L_s,K_s) の球表現は, V 上の調和多項式全体のなす空間 $\mathrm{Harm}[V]$ に実現される. さらに, L_s の $\mathrm{Harm}[V]$ は multiplicity-free である. その既約分解を以下のものとする.

$$\mathrm{Harm}[V]=\bigoplus_{\beta}\rho_\beta^{(L)}. \tag{5.12}$$

ここに現れる既約成分 $\rho_\beta^{(L)}$ たちが, (L,K) の球表現すべてである.

また, N の無限次元既約 unitary 表現は, ある正実数 $\lambda>0$ を用いて, (5.3) で定義された Fock 空間 $\mathcal{H}_\pi=\mathcal{H}_\lambda$ 上に (5.4), または (5.5) で与えられる $\pi=\pi_\lambda$, または $\pi_{-\lambda}$ として実現される. そして, $\mathcal{H}_\pi$ は W 上の正則多項式全体のなす空間 $\mathbb{C}[W]$ を稠密な部分 vector 空間として含み, $\mathbb{C}[W]$ は π に関する L の intertwining 表現 W_π について不変である. このとき, W_π の複素共役表現 $\overline{W}_\pi$ は, Fock 空間 $\mathcal{H}_\pi$ の元の複素共役である W 上の反正則函数全体からなる Hilbert 空間 $\overline{\mathcal{H}}_\pi$ 上に実現される. また, W 上の反正則多項式はすべて W 上の正則多項式の複素共役として実現され, W 上の反正則多項式全体のなす空間 $\overline{\mathbb{C}[W]}$ は $\overline{\mathcal{H}}_\pi$ の稠密な部分集合であり, $\overline{W}_\pi$ で不変である. ここで, W の複素共役な vector 空間を $\overline{W}$ とすると, $\overline{\mathcal{H}}_\pi$ は $\overline{W}$ 上の正則函数からなる Hilbert 空間と見做され, $\overline{\mathbb{C}[W]}$ は $\overline{W}$ 上の正則多項式全体からなる vector 空間 $\mathbb{C}[\overline{W}]$ と同一視することができる. さらに, $\overline{W}_\pi$ は $\overline{W}$ への L の作用から得られるものと考えられる. よって, π から構成される $(L\ltimes N,K)$ の球表現は, $\mathrm{Harm}[V]\otimes\mathbb{C}[\overline{W}]$ の既約成分を用いて構成される. ここで, $\mathbb{T}$ を V に自然に作用させることにより得られる $\mathbb{T}\times L$ の $\mathbb{C}[V\oplus\overline{W}]=\mathbb{C}[V]\otimes\mathbb{C}[\overline{W}]$ への作用は multiplicity-free であり, $\mathrm{Harm}[V]\otimes\mathbb{C}[\overline{W}]$ の既約成分は, $\mathbb{C}[V\oplus\overline{W}]$ の既約成分から選ぶことができる.

なお, この構成法では L が作用するのが本質的に $V\oplus\overline{W}$ であり, Hermite Jordan 3 重系の構造をもつ $V\oplus W$ への L の作用とは整合しない. $(L\ltimes N,K)$ の球表現を L の $V\oplus W$ への作用と関連させて parametrize するには工夫が必要である. $L^2(L/K)$ の既約成分は V 上の調和多項式の空間に相対不変式の整数冪を掛けることにより実現されるが, 調和多項式の複素共役からなる空間に相対不変式 h の複素共役 $\overline{h}$ の整数冪を掛けることによっても構成することができる. そして, V 内の有界対称領域 $\mathcal{D}_0\subset V$ の Shilov 境界 $\Sigma\subset V$ の部分集合 $\Sigma_1\subset V$ 上では, $\overline{h}$ も値 1 をとる. よって, $L^2(L/K)$ の既約成分は, V 上の調和多項式の複素共役たちからなる vector 空間上に実現することができる. ただし, 同じ既約成分に対応する調和多項式の空間と調和多項式の複素共役の空間は単に複素共役をとることにより対応するのではない. 既約成分が (5.12) における $\rho_\beta^{(L)}$ として実現されるとき, この表現の最高 weight λ_β の複素共役として与えられる weight $\overline{\lambda}_\beta$ を最低 weight としてもつ既約表現を調和多項式の空間に相対不変式の整数冪を掛けて実現し, その空間の元の複素共役たちに現れる相対不変式の複素共役の整数冪を無視することにより, 調和多項式の複素共役からなる vector 空間上に $\rho_\beta^{(L)}$ と同値な表現を実現する. よって, $\pi\in\widehat{N}$ から構成される $(L\ltimes N,K)$ の球表現は, $\overline{\mathrm{Harm}[V]}\otimes\overline{\mathbb{C}[W]}$ の既約成分により parametrize される. そして, $\overline{\mathrm{Harm}[V]}\otimes\overline{\mathbb{C}[W]}$ は自然に $\mathrm{Harm}[V]\otimes\mathbb{C}[W]$ に複素共役な vector 空間 $\overline{\mathrm{Harm}[V]\otimes\mathbb{C}[W]}$ と考えることができる. ゆえに, $\pi\in\widehat{N}$

から構成される $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, $\mathrm{Harm}[V] \otimes \mathbb{C}[W]$ の既約成分を用いて得られると考えることができる．なお，一般に $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}[W]$ の既約分解のほうが, $\mathbb{C}[V] \otimes \mathbb{C}[\overline{W}]$ の既約分解より構造が分かりやすい．これらのことを，それぞれの例について調べる．

例 2. $(L \ltimes N, K) = ((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)) \ltimes H_n, \mathbb{T} \times \Delta(\mathrm{SU}(n)))\ (n \geq 3)$. この例では, L は $\mathbb{C}^n$ に次のように作用する．

$$(t, k_1, k_2)z = tk_1z,\ t \in \mathbb{T},\ k_1, k_2 \in \mathrm{SU}(n),\ z \in \mathbb{C}^n.$$

このとき, V, W, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0$ は以下のように与えられる．

$$\begin{aligned} V = \mathrm{M}(n, \mathbb{C}),\ W = \mathbb{C}^n,\ V \oplus W &= \mathrm{M}(n, n+1, \mathbb{C}), \\ \mathcal{D} &\sim \mathrm{SU}(n, n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n+1)), \\ \mathcal{D}_0 &\sim \mathrm{SU}(n, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)). \end{aligned}$$

即ち, $\mathcal{D}$ は $\mathrm{I}_{n,n+1}$ 型 (AIII 型) 有界対称領域, $\mathcal{D}_0$ は $\mathrm{I}_{n,n}$ 型 (AIII 型) 有界対称領域である (例えば [H1][S] を参照せよ). そして, V 上の既約な相対不変式は行列式である．

$$\begin{aligned} \mathrm{Harm}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] &= \{f \in \mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})]\,;\, \det(\partial)f = 0\}, \\ \mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] &= \mathbb{C}[\det] \otimes \mathrm{Harm}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})]. \end{aligned}$$

ところで, $\mathbb{T} \times L = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)$ の $\mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^n] = \mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ への作用は multiplicity-free である ([BR][L]). そして, $\mathbb{T}^2$ の第 1 成分の作用は, $\det$ の冪乗の誤差を区別する役割を果たす．よって, L の $\mathrm{Harm}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ への作用は multiplicity-free である．従って, $N = H_n$ の無限次元 unitary 表現から構成される $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, $\mathrm{Harm}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$ の既約成分により parametrize される．なお, $\mathbb{T} \times L = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)$ の $\mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \oplus \overline{\mathbb{C}^n}] = \mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\overline{\mathbb{C}^n}]$ への作用も multiplicity-free であり ([BR][L]), 球表現は $\mathrm{Harm}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\overline{\mathbb{C}^n}]$ の既約成分によっても parametrize されるが, $\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(n)$ の $\mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^n]$ への作用は半古典的であり, $\mathbb{C}[\mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \oplus \overline{\mathbb{C}^n}]$ への作用は準古典的である ([K]). 一般に, 半古典的作用のほうが, 準古典的作用より扱いやすい．

例 3. $(L \ltimes N, K) = ((\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n)) \ltimes H_{2n}, \mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n))$, $(n \geq 2)$. この例における V, W, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0$ は以下のものである．

$$\begin{aligned} V = \mathrm{Alt}(2n, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathrm{M}(2n, \mathbb{C})\,;\, {}^tX = -X\},\ W = \mathbb{C}^{2n}, \\ V \oplus W = \mathrm{Alt}(2n+1, \mathbb{C}) &= \{X \in \mathrm{M}(2n+1, \mathbb{C})\,;\, {}^tX = -X\}, \\ \mathcal{D} &\sim \mathrm{SO}^*(4n+2)/\mathrm{U}(2n+1), \\ \mathcal{D}_0 &\sim \mathrm{SO}^*(4n)/\mathrm{U}(2n). \end{aligned}$$

即ち, $\mathcal{D}$ は II_{2n+1} 型 (DIII 型) 有界対称領域, $\mathcal{D}_0$ は II_{2n} 型 (DIII 型) 有界対称領域である (例えば [H1][S] を参照せよ). そして, V 上の既約な相対不変式は Pfaffian

であり, Pf で表すことにする.

$$\mathrm{Harm}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})] = \{f \in \mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})]\,;\, \mathrm{Pf}(\partial)f = 0\},$$
$$\mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})] = \mathbb{C}[\mathrm{Pf}] \otimes \mathrm{Harm}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})].$$

ところで, $\mathbb{T}\times L = \mathbb{T}^2\times \mathrm{SU}(2n)$ の $\mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^{2n}] = \mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})]\otimes\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]$ への作用は multilicity-free である ([BR][L]). この作用における $\mathbb{T}^2$ の第 1 成分の作用により, Pf の冪乗の誤差は区別されることがわかる. よって, L の $\mathrm{Harm}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})]\otimes\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]$ への作用は multiplicity-free である. ゆえに, $N = H_{2n}$ の無限次元 unitary 表現 π から構成される $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, $\mathrm{Harm}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]$ の既約成分により parametrize される. この例でも, 例 2 と同様に, $\mathbb{T} \times L = \mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2n)$ の $\mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C}) \oplus \overline{\mathbb{C}^{2n}}] = \mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\overline{\mathbb{C}^{2n}}]$ への作用も multiplicity-free であり ([BR][L]), 球表現を $\mathrm{Harm}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C})] \otimes \mathbb{C}[\overline{\mathbb{C}^{2n}}]$ の既約成分により parametrize することができるが, $\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(2n)$ の $\mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^{2n}]$ への作用は半古典的であり, $\mathbb{C}[\mathrm{Alt}(2n,\mathbb{C}) \oplus \overline{\mathbb{C}^{2n}}]$ への作用は準古典的である ([K]).

<u>例 4.</u> $(L \ltimes N, K) = ((\mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(8)) \ltimes H_n, \mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(7))$. この例では, V, W, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_0$ は次のようなものをとる.

$$V = \mathbb{C}^8,\ W = \mathbb{C}^8,\ V \oplus W = \mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8,$$
$$\mathcal{D} \sim \mathrm{E}_{6(-14)}/(\mathbb{T}\cdot\mathrm{Spin}(10)),$$
$$\mathcal{D}_0 \sim \mathrm{SO}_0(2,8)/(\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(8)).$$

ただし, $\mathrm{E}_{6(-14)}$ は E_6 型非 compact 単純 Lie 群であり, $\mathcal{D}$ は V 型 (EIII 型) 有界対称領域, $\mathcal{D}_0$ は IV_8 型 (BDI 型) 有界対称領域である (例えば [S] を参照せよ). そして, V 上の既約な相対不変式は, V 上の非退化 2 次形式であり, これを R^2 と表すことにする. すると, $R^2(\partial)$ は本質的に Laplacian Δ と考えられる. 即ち, この例における調和多項式は, 本質的に通常の意味の調和多項式と同じものである.

$$\mathrm{Harm}(\mathbb{C}^8) = \{f \in \mathbb{C}[\mathbb{C}^8]\,;\, R^2(\partial)f = \Delta f = 0\},$$
$$\mathbb{C}[\mathbb{C}^8] = \mathbb{R}[R^2] \otimes \mathrm{Harm}[\mathbb{C}^8].$$

ここで, Spin(8) の $\mathbb{C}^8 \oplus \mathbb{C}^8$ への作用を, 第 1 成分には SO(8) の自然な作用, 第 2 成分には半 spin 表現として作用するものとする. すると, $\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(8)$ の $\mathbb{C}[\mathbb{C}^8\oplus\mathbb{C}^8] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^8] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^8]$ への作用は multiplicity-free である. そして, $\mathbb{T}^2$ の第 1 成分の作用は, R^2 の冪乗の誤差の区別を与える. なお, $W = \mathbb{C}^8$ 上にも L_s 不変式である非退化 2 次形式 R_2^2 が存在するが, その冪乗の誤差は, $\mathbb{T}^2$ の第 2 成分の作用により区別される. よって, L の $\mathrm{Harm}[\mathbb{C}^8] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^8]$ への作用は multiplicity-free である. 従って, $N = H_8$ の無限次元 unitary 表現から構成される $(L \ltimes N, K)$ の球表現は, $\mathrm{Harm}[\mathbb{C}^8] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{C}^8]$ の既約成分により parametrize される. なお, この例では, Spin(8) の $W = \mathbb{C}^8$ への作用が実作用である, 即ち, すべての表現行列が実直交行列となるように表現を実現できるから, $\mathbb{C}[\mathbb{C}^8]$ と $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{C}}^8]$ を区別する必要はない. ただし, どちらの立場で parametrize するかにより, 構成される球表現は異なる.

References

[BJR1] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratcliff, On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 321 (1990), 85–116.

[BJR2] C. Benson, J. Jenkins, G. Ratcliff, Bounded K-spherical functions on Heisenberg groups, J. Funct. Anal. 105 (1992), 409–443.

[BR] C. Benson, G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, J. Algebra 181 (1996), 152–186.

[C] G. Carcano, A commutativity condition for algebras of invariant functions, Boll. Un. Mat. Ital. B(7)1 (1987), 1091–1105.

[FK] J. Faraut, A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones,* Oxford University Press, Oxford, 1994.

[H1] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces,* Academic Press, San Diego, California, 1978.

[H2] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis,* Academic Press, Orlando, Florida, 1984.

[K] F. Knop, Semisymmetric polynomials and invariant theory of matrix vector pairs, Represent. Theory 5 (2001), 224-266.

[L] A. S. Leahy, A classification of multiplicity free representations, J. Lie Theory 8 (1998), 367–391.

[LP] H. Leptin, D. Poguntke, Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups, J. Funct. Anal. 33 (1979), 119–134.

[M] G. W. Mackey, Unitary representations of group extensions. I, Acta Math. 99 (1958), 265–311.

[Pa] T. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras. II. $*$-algebras,* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Po] D. Poguntke, Nilpotente Liesche Gruppen haben symmetrische Gruppenalgebren, Math. Ann. 227 (1977), 51–59.

[S] I. Satake, *Algebraic Structures of Symmetric Domains,* Iwanami Shoten, 1980.

[V] E. B. Vinberg, Commutative homogeneous spaces and co-isotropic symplectic actions (Russian), Uspekhi Mat. Nauk 56 (2001), 3–62; translation in Russian Math.Surveys 56 (2001), 1–60.

[Y1] O. Yakimova, On weakly commutative homogeneous spaces (Russian), Uspekhi Mat. Nauk 57 (2002), 171–172; translation in Russian Math. Surveys 57 (2002), 615–616.

[Y2] O. Yakimova, Principal Gelfand pairs, Transform. Groups 11 (2006), 305–335.