数理解析研究所講究録
第 1877 巻 2014 年 1-8

Dual Clans Defined by Representations of Euclidean Jordan Algebras and the Associated Basic Relative Invariants

九州大学大学院数理学研究院　野村 隆昭 (Takaaki NOMURA[1])
Faculty of Mathematics, Kyushu University

§1　序

本稿では，中島秀斗氏との共著論文 [6] の後半部分で扱われた部分を取り出して解説する．双対クランの場合も中島氏の書いた数理研講究録 [5] の後半で報告されているが，本稿では Euclid 型 Jordan 代数の分類によらない統一的な方法で扱えることを示す（論文 [6] では，Note added in proof となっている部分である）．

§2　準備

V を有限次元の実ベクトル空間とし，$\Omega \subset V$ を正則な，すなわち直線を含まない開凸錐とする．Ω の線型同型群を $G(\Omega)$ で表す：

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g(\Omega) = \Omega\}.$$

$GL(V)$ の閉部分群として，$G(\Omega)$ は Lie 群である．$G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用するとき，Ω は**等質**であるという．

Vinberg [9] により，等質な正則開凸錐と単位元を持つクランと呼ばれる非結合的代数とが，同型を除いて 1 対 1 に対応する．クランの定義を与えておこう．

双線型な積 $x \triangle y = L(x)y$ を持った実ベクトル空間 V が**クラン**であるとは，次の (1)〜(3) が成り立つときをいう．

(1) $[L(x), L(y)] = L(x \triangle y - y \triangle x) \quad (\forall x, y \in V)$.
(2) 線型形式 $s \in V^*$ が存在して，$s(x \triangle y)$ は V に正定値内積を定める．
(3) 各作用素 $L(x)$ $(x \in V)$ は実固有値のみを持つ．

より一般に，正則な等質凸領域とクラン（単位元を持つとは限らない）とが，同型を除いて 1 対 1 に対応することが Vinberg の論文 [9] で示されている．

等質開凸錐 $\Omega \subset V$ からクランを得るには，次のようにする．$G(\Omega)$ には，Ω に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群（Borel 部分群）H がある．Ω の 1 点 E を固定すると，作用が単純推移的なことから，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ は微分同相である．$\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ とする．軌道写像の H の単位元における微分 $\mathfrak{h} \ni T \mapsto TE \in \Omega$ は

[1]E-mail: tnomura@math.kyushu-u.ac.jp

線型同型であり，その逆写像を $L : x \mapsto L(x)$ とする．すなわち，各 $x \in V$ に対して，一意的に $L(x) \in \mathfrak{h}$ が存在して，$L(x)E = x$．この $L(x)$ を用いて $x \triangle y := L(x)y$ $(x, y \in V)$ とすると，V に単位元 E を持つクラン構造を導入することができる．クラン積は一般に非可換であり，非結合的である．

さて，V は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を持つ実ベクトル空間とし，$\Omega \subset V$ を正則開凸錐とする．この内積に関する Ω の双対錐 Ω^* とは，次の集合のことである．

$$\Omega^* := \{y \in V \; ; \; \langle x \,|\, y \rangle > 0 \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\})\}.$$

Ω が等質であるとき，Ω^* も等質であり，$G(\Omega^*) = {}^tG(\Omega)$ （$G(\Omega)$ に属する線型作用素の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する転置作用素全体）が成り立つ．ある内積に対して $\Omega = \Omega^*$ が成り立つとき，Ω は**自己双対**であるという．等質で自己双対な開凸錐を**対称錐**と呼ぶ．

Faraut–Korányi の本 [1] にあるように，対称錐は Euclid 型 Jordan 代数 (EJA) を用いて記述される．EJA の復習をしておこう．まず，**Jordan 代数**とは，双線型な積 xy を持ったベクトル空間 V で，次の (1), (2) がすべての $x, y \in V$ に対して成り立つときをいう．

$$(1)\ xy = yx, \qquad (2)\ x^2(xy) = x(x^2y).$$

単位元 e_0 を持つ実 Jordan 代数 V が **Euclid 型**であるとは，正定値内積 $\langle x \,|\, y \rangle$ が存在して，次が成り立つときをいう．

$$\langle xy \,|\, z \rangle = \langle x \,|\, yz \rangle \quad (\forall x, y \in V).$$

この内積のことを**結合的内積**と呼ぶ．言い換えると，Jordan 積で y をかける作用素 $M(y)$ が，任意の $y \in V$ に対して自己共役であるような内積が存在することである．EJA である V から対称錐 Ω を得るには，$\Omega = \mathrm{Int}\{x^2 \; ; \; x \in \Omega\}$ とすればよい．

Ω が対称錐のとき，$G(\Omega)$ は簡約可能な Lie 群である．Jordan 枠 $c_1, \ldots, c_r$ （r は Ω の階数）を固定することにより，$G := G(\Omega)^\circ$ （単位元の連結成分）の岩沢分解 $G = KAN$ （標準的な記号で書いている）が定まり，その岩沢分解に現れる分裂可解 Lie 群 $H = AN$ は Ω に単純推移的に作用している．したがって，この H と EJA の単位元 e_0 を用いて，EJA である V に e_0 を単位元とするクラン構造を導入することができる．

あとで扱う EJA の自己共役表現の定義もここでしておこう．以下 V は単位元 e_0 を持つ EJA とする．また E は内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ を持つ実ベクトル空間とする．Jordan 代数としての準同型写像 $\varphi : V \mapsto \mathrm{End}(E)$ が，$\varphi(x) \in \mathrm{Sym}(E)$ $(\forall x \in V)$ をみたしているときに，φ は V の**自己共役表現**であるという．以下では，$\dim E > 0$ ならば $\varphi(e_0)$ は E の恒等写像であることを要求しておく．

§3 基本相対不変式

$\Omega \subset V$ を正則な等質開凸錐とし，前節で述べたように，Ω に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 H をとっておく．

Ω 上の函数 f が（H に関して）**相対不変**であるとは，H の 1 次元表現 χ が存在して，$f(hx) = \chi(h)f(x)$ が任意の $h \in H$ と $x \in V$ に対して成り立つときをいう．

次の定理は基本的である．以下 r は Ω の階数とする．

定理 3.1 (Ishi [2])． V 上の既約で相対不変な多項式函数 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ が存在して，V 上の相対不変な任意の多項式函数 P は次のように表される：

$$P(x) = c\,\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (c = \text{const.},\ (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geqq 0}).$$

この $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ を，Ω に付随する**基本相対不変式**と呼ぶ．基本相対不変式の特徴付けとして，次の定理 3.2 がある．まず $E \in \Omega$ を固定すると，V には E を単位元とするクラン構造 $x \triangle y$ が入ることを思い出そう．そのクランにおいて $x \in V$ を右からかける乗法作用素を $R(x)$ で表す．すなわち $R(x)y = y \triangle x$ $(\forall y \in V)$ とする．以下，作用素や行列（実または複素）T の行列式は大文字の $\operatorname{Det} T$ で表し，Jordan 代数での元 x の determinant は $\det x$ で表す．Jordan 代数での determinant は乗法的でないので，このような区別をする．また，四元数を成分とする Hermite 行列の行列式は Jordan 代数としてのものであり，したがって小文字の det で表す．

定理 3.2 ([4])． $\operatorname{Det} R(x)$ の既約因子は $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ である．

この定理により，直ちに次の問題が生じる．

問題 3.3． $\operatorname{Det} R(x)$ を実際に因数分解せよ．すなわち，$\operatorname{Det} R(x)$ の既約因子中の各 $\Delta_j(x)$ のベキを，クラン V の不変量で表せ．

EJA にクラン構造を導入した V の場合，この問題に解答を与えることができる．筆者がこの計算をしたのは 2008 年であるが，証明は論文 [6, Theorem 2.9] にある．

$\Omega \subset V$ を既約な対称錐とする．既約な EJA である V に導入したクラン構造での右乗法作用素 $R(x)$ の行列式を考える．岩沢部分群を定義したときに使った Jordan 枠から得られる Jordan 代数版の principal minors を $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ とする．これらは，対称錐 Ω に付随する基本相対不変式である．

定理 3.4． $\operatorname{Det} R(x) = \Delta_1(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^d(x)\Delta_r(x)$．ただし，$d$ は V の Peirce 分解に現れる off-diagonal の共通次元である．具体的には $\operatorname{Sym}(r, \mathbb{R})$ のときは $d = 1$ であり，$\operatorname{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O})$ のときは $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$，そして $\mathbb{R}^n$ の Lorentz 錐 $(n \geqq 3)$ のときは $r = 2$ で $d = n - 2$ である．

注意 3.5． 多項式 $\operatorname{Det} R(x)$ の次数は $\dim V = \frac{1}{2}r(r-1)d + r$ で，これがちょうど右辺の次数を勘定する式

$$\bigl(1 + \cdots + (r-1)\bigr) \times d + r = \tfrac{1}{2}r(r-1)d + r$$

にうまく対応しているところがおもしろい．

§4 EJAの自己共役表現からクランを定義する

この内容については，中島氏による報告[5]もあるので，あとで必要である程度にとどめる．

V を階数 r の既約なEJAとし，$c_1,\dots,c_r$ を V のJordan枠とする．さらに (φ,E) $(\dim E>0)$ を V の自己共役表現で，V の単位元 e_0 の像 $\varphi(e_0)$ は E の恒等写像であるとする．このとき，$\varphi(c_1),\dots,\varphi(c_r)$ は互いに直交する等ランクの射影作用素になる．元 $x\in V$ のPeirce分解を $x=\sum_i\lambda_ic_i+\sum_{j<k}x_{kj}$ とするとき，自己共役作用素 $\varphi(x)$ の下三角部分 $\underline{\varphi}(x)$ を次で定義する：

$$\underline{\varphi}(x):=\frac{1}{2}\sum_i\lambda_i\varphi(c_i)+\sum_{j<k}\varphi(c_k)\varphi(x_{kj})\varphi(c_j).$$

このとき，$\underline{\varphi}(x)+\underline{\varphi}(x)^*=\varphi(x)$ であることがわかる．ポイントは，$\underline{\varphi}$ がクランとしての V の表現にもなることである．すなわち，次が成り立つ．

$$\varphi(x\triangle y)=\underline{\varphi}(x)\varphi(y)+\varphi(y)\underline{\varphi}(x)^*\qquad(x,y\in V).$$

また，表現 φ に付随する対称双線型写像を $Q(\xi,\eta)$ とする：

$$\langle\,\varphi(x)\xi\,|\,\eta\,\rangle_E=\langle\,Q(\xi,\eta)\,|\,x\,\rangle\qquad(x\in V,\,\xi,\eta\in E).$$

以上の準備のもとで，$V_E:=E\oplus V$ に双線型な積 $\triangle$ を次で定義する：

$$(\xi+x)\triangle(\eta+y):=\underline{\varphi}(x)\eta+(Q(\xi,\eta)+x\triangle y)\qquad(x,y\in V,\ \xi,\eta\in E).$$

そうすると $(V_E,\triangle)$ はクランになる．実際，

$$s'(x):=\operatorname{Tr}L(x)\qquad(\xi\in E,\,x\in V)$$

と定義することで認容線型形式 s' が得られる．

このようにして定義したクラン V_E は単位元を持たないので，単位元 e を添加して，$V_E^0:=\mathbb{R}e\oplus V_E$ とする．以下，$u:=e-e_0$ とおいて，V_E^0 の記述としては専ら $V_E^0=\mathbb{R}u\oplus E\oplus V$ を用いる．そうすると，V_E^0 のクラン積は

$$(\lambda u+\xi+x)\triangle(\mu u+\eta+y)=(\lambda\mu)u+(\mu\xi+\tfrac{1}{2}\lambda\eta+\underline{\varphi}(x)\eta)+(Q(\xi,\eta)+x\triangle y)$$
$$(\lambda,\mu\in\mathbb{R},\,\xi,\eta\in E\text{ and }x,y\in V).$$

V_E^0 を次の形の正方行列でイメージすると理解しやすい．そこでは，V_E は下半分の長方形行列とイメージすることができる．

$$V_E^0=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&&&\\&\ddots&&{}^tE\\&&\lambda&\\\hline&E&&V\end{array}\right).$$

表現 φ に付随する対称双線型写像 Q が Ω-positive，すなわち $Q(\xi,\xi) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ $(\forall\xi \neq 0)$ をみたすことに注意して，実 Siegel 領域 $D(\Omega, Q)$ を次で定義しよう．

$$D(\Omega, Q) := \left\{\xi + x \in V_E \,;\, x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega\right\}.$$

そうすると，単位元を持つクラン V_E^0 に付随する等質開凸錐 Ω^0 は次のように記述される：

$$\Omega^0 = \left\{\lambda u + \xi + x \in V_E^0 \,;\, \lambda > 0,\ \lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi) \in \Omega\right\}.$$

すなわち，Ω^0 は超平面 $\lambda = 1$ に埋め込まれた Siegel 領域 $D(\Omega, Q)$ と原点とで生成される開凸錐である．

§5 V_E^0 の双対クラン

$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ に次式で内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle^0$ を定義する：

$$\langle \lambda u + \xi + x \,|\, \lambda' u + \xi' + x' \rangle^0 = \lambda\lambda' + \langle \xi \,|\, \xi' \rangle_E + \langle x \,|\, x' \rangle.$$

この内積に関する Ω^0 の双対錐を $(\Omega^0)^*$ とする：

$$(\Omega^0)^* := \left\{v \in V_E^0 \,;\, \langle v \,|\, v' \rangle^0 > 0 \ \text{ for all } v' \in \overline{(\Omega^0)} \setminus \{0\}\right\}.$$

このとき，$(\Omega^0)^*$ に付随する V_E^0 のクラン積 $\triangledown$ は，$v \triangledown v' = {}^t(L_v^0)v'$ で与えられる．ただし，クラン V_E^0 における左乗法作用素を L_v^0 $(v \in V_E^0)$ と書き，${}^t(L_v^0)$ は上で定めた内積に関する L_v^0 の共役作用素である．このようにして定義したクラン $(V_E^0, \triangledown)$ を V_E^0 の**双対クラン**という．

命題 5.1. 双対クラン $(V_E^0, \triangledown)$ における右乗法作用素は，$V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ 上の作用素行列として次の様に書ける．

$$R^{\triangledown}_{\lambda u + \xi + x} = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda & \langle \cdot \,|\, \xi \rangle_E & 0 \\ \hline \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) & \underline{\varphi}(\cdot)^*\xi \\ 0 & 0 & R_x^{\triangledown_V} \end{array}\right).$$

ただし $R_x^{\triangledown_V}$ は EJA である V での双対クラン構造 $\triangledown_V$ に関する右乗法作用素である．

したがって，命題 5.1 で両辺の行列式を考えると

$$\operatorname{Det} R^{\triangledown}_{\lambda u + \xi + x} = \left(\operatorname{Det} R_x^{\triangledown_V}\right) \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \lambda & \langle \cdot \,|\, \xi \rangle_E \\ \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) \end{pmatrix}.$$

ここで，元の V の Jordan 枠を逆順にした Jordan 枠 $c_r, \ldots, c_1$ に付随する $x \in V$ の JA principal minors を $\Delta_1^*(x), \ldots, \Delta_r^*(x)$ とすると，定理 3.4 により

$$\operatorname{Det} R_x^{\triangledown_V} = \Delta_1^*(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^d \Delta_r^*(x).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\operatorname{Det} R^{\nabla}_{\lambda u+\xi+x} &= \Delta_1^*(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^d \Delta_r^*(x) \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \lambda & \langle \cdot \,|\, \xi \rangle_E \\ \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) \end{pmatrix} \\ &= \Delta_1^*(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^d \Delta_r^*(x) \bigl(\lambda \operatorname{Det} \varphi(x) - \tfrac{1}{2}\langle\, {}^{\mathrm{co}}\varphi(x)\xi \,|\, \xi \rangle_E\bigr).\end{aligned}$$

ここで，${}^{\mathrm{co}}T$ は作用素 T の余因子作用素を表す．すなわち，作用素 T が可逆なら，${}^{\mathrm{co}}T := (\operatorname{Det} T)T^{-1}$ である．したがって，T が正定値自己共役作用素ならば，${}^{\mathrm{co}}T$ も正定値である．以上より，次の命題を得る．

命題 5.2. $v = \lambda u + \xi + x \in V_E^0$ とする．このとき，

$$v \in (\Omega^0)^* \iff x \in \Omega \text{ and } \lambda > \tfrac{1}{2}\langle \varphi(x)^{-1}\xi \,|\, \xi \rangle_E.$$

注意 5.3. 命題の条件は，Rothaus [8] が「表現 φ による Ω の拡張」と呼んだものである．ただし，Rothaus の意味での表現とは，開凸錐 Ω の表現のことで，それは線型写像 $R : V \to \mathrm{Sym}(E)$ で，$x \in \Omega$ に対しては $R(x)$ は正定値であり，Ω に推移的に働く部分群 H_0 があって，次をみたすときをいう：

$$\forall h \in H_0,\ \exists T \in GL(E) \text{ with } R(hv) = TR(v)\,{}^tT \quad (\forall v \in V).$$

EJA の表現は対応する対称錐の表現である．より一般に，Ishi[3] により，クランの表現は対応する等質開凸錐の表現になっている．

さて，[1, Proposition IV.4.2] より，$x \in V$ のとき $\operatorname{Det}\varphi(x) = (\det x)^{N/r}$ ($N := \dim E$) である．また，${}^{\mathrm{co}}x$ を Jordan 代数 V での x の余因子元とする．すなわち，$x \in V$ が可逆のとき，

$${}^{\mathrm{co}}x := (\det x)x^{-1}.$$

一般には，$x \mapsto {}^{\mathrm{co}}x$ は Jordan 代数版の Cayley–Hamilton 定理を用いて定義される $r-1$ 次の多項式写像である．x が可逆なとき，${}^{\mathrm{co}}\varphi(x) = (\det x)^{\frac{N}{r}-1}\varphi({}^{\mathrm{co}}x)$ となるから，次の命題を得る．

命題 5.4. 多項式 $\lambda \operatorname{Det}\varphi(x) - \frac{1}{2}\langle\, {}^{\mathrm{co}}\varphi(x)\xi \,|\, \xi \rangle_E$ の因数分解は次のようになる：

$$\lambda \operatorname{Det}\varphi(x) - \tfrac{1}{2}\langle\, {}^{\mathrm{co}}\varphi(x)\xi \,|\, \xi \rangle_E = (\det x)^{\frac{N}{r}-1}\bigl(\lambda \det x - \tfrac{1}{2}\langle \varphi({}^{\mathrm{co}}x)\xi \,|\, \xi \rangle_E\bigr).$$

多項式 $\lambda \det x - \frac{1}{2}\langle \varphi({}^{\mathrm{co}}x)\xi \,|\, \xi \rangle_E$ が既約であることはすぐにわかるので，次の定理を得る．

定理 5.5. $(\Omega^0)^*$ に付随する基本相対不変式 $P_j(v)$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned} P_j(\lambda u + \xi + x) &= \Delta_j^*(x) \qquad (j = 1, \dots, r), \\ P_{r+1}(\lambda u + \xi + x) &= \lambda \det x - \tfrac{1}{2}\langle \varphi({}^{\mathrm{co}}x)\xi \,|\, \xi \rangle. \end{aligned}$$

注意 5.6. $\deg P_j(v) = j$ $(j = 1, \ldots, r, r+1)$ である．定理5.5の記述はEJAの分類によっていない．そして表現φの特異性（非正則である度合い）にもよらない一様な記述である．

$x \in V$ のとき $\det x = \Delta_r^*(x)$ ゆえ，問題3.3への解答は次の様になる．

$$\mathrm{Det}\, R_v^{\nabla} = P_1(v)^d \cdots P_{r-1}(v)^d P_r(v)^{\frac{N}{r}} P_{r+1}(v) \qquad (v \in V_E^0).$$

以下，個々の場合についてコメントしておこう．

(1) The Hermitian cases. この場合，$V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$ $(r \geqq 3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ であり，自己共役表現は，$E = \mathrm{Mat}(r \times p,\ \mathbb{K})$ とするときの $\varphi(x) = x\xi$ $(x \in V,\ \xi \in E)$ で尽くされる．そして，$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi\eta^* + \eta\xi^*)$ となる．

定理 5.7. $(\Omega^0)^*$ は次の正則開凸錐 Ω' に線型同型である．

$$\Omega' := \left\{ Y = \begin{pmatrix} \mu & \eta^* \\ \eta & y \otimes I_p \end{pmatrix} \gg 0\ ;\ \begin{matrix} \mu \in \mathbb{R}, & \eta \in \mathbb{K}^{rp} \\ y \in \mathrm{Herm}(r, \mathbb{K}) & \end{matrix} \right\} \subset \mathrm{Herm}(rp + 1,\ \mathbb{K}).$$

ただし，記号$\gg 0$は正定値であることを表す．また$\mathbb{K}^{rp}$は行列の空間ではなく，サイズrpの縦ベクトルの空間である．

定理 5.8. Ω' に付随する基本相対不変式は次で与えられる：

$$P_j(Y) = \Delta_j^*(y)\ (j = 1, \ldots, r), \quad P_{r+1}(Y) = \mu \det y - \eta^*({}^{\mathrm{co}}y \otimes I_p)\eta.$$

ここで ${}^{\mathrm{co}}y$ は y の余因子行列であり，$\mathbb{K} = \mathbb{H}$ のときは Jordan 代数 $\mathrm{Herm}(r, \mathbb{H})$ で考えたものである．

注意 5.9. $\deg P_j(Y) = j$ $(j = 1, \ldots, r+1)$ であること，および$p > 1$のときはΩ'は対称錐ではないことに注意．定理5.8で得られた基本相対不変式は，$r = 2$，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で [4] において与えた例の，および一般の r と $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ で [7] で与えた例の系統的な一般化になっている．

(2) The Lorentzian case. この場合は，正定値内積を持つベクトル空間Wから得られるClifford代数$\mathrm{Cl}(W)$の線型部分$V = \mathbb{R}e_0 \oplus W$としてEJAである$V$が得られる．そして$x \mapsto {}^{\mathrm{co}}x$は，$W$の等長写像$w \mapsto -w$を$\mathrm{Cl}(W)$の自己同型に拡張し，それを$V \subset \mathrm{Cl}(W)$に制限した$x \mapsto \widetilde{x}$に一致する．

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[3] H. Ishi, Representation of clans and homogeneous cones, Vestnik Tambov University, **16** (2011), 1669–1675.

[4] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[5] 中島秀斗，ジョルダン代数の表現に付随するクランとその基本相対不変式，数理研講究録，**1825** (2013), 56–69.

[6] H. Nakashima and T. Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras, Kyushu J. Math., **67** (2013), 163–202.

[7] 野村隆昭，等質開凸錐，クラン，そして基本相対不変式，2010 年度表現論シンポジウム講演集，96–104.

[8] O. S. Rothaus, The construction of homogeneous convex cones, Ann. of Math., **83** (1966), 358–376; Correction, ibid., **87** (1968), 399.

[9] E. B. Vinberg, The theory of the convex homogeneous cones, Trudy Moskov. Mat. Obsc., **12**, 303-358.