

波動乱流理論における新たな展開

岐阜大学 工学部 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)
Faculty of Engineering, Gifu University

1 波動乱流研究の概要

1.1 波動乱流とは

波動乱流とは、様々な波数ベクトル \mathbf{k} および振幅を持つ無数の微小振幅波列が時間空間的に共存する状態であり、対象となる物理量（たとえば海洋波浪場における水面変位） $\eta(\mathbf{x}, t)$ は、振幅に関して最低次においては

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \int a_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t + \theta(\mathbf{k})), \quad \omega = \omega(\mathbf{k}) : \text{線形分散関係} \quad (1)$$

のように波列の重ね合わせとして表現される。ただし参加する波列が無数に多いため、 $\eta(\mathbf{x}, t)$ 自体に基づく決定論的な記述は非現実的であり、主にスペクトルなどを対象とする統計的記述が用いられる。系の支配方程式や境界条件に含まれる非線形性を通して、波列どうしは非線形相互作用を行い、その結果スペクトルは時間的に変化する。ただし各波列の振幅の小ささゆえに波列間の非線形相互作用は弱く、したがってスペクトル変化の時間スケールは周波数の時間スケールに比べて非常に長い。¹

1.2 モード方程式

振幅に関して最低次（すなわち線形）のエネルギーが $\int \omega(\mathbf{k})|b(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$ と表されるような適切な複素振幅 $b(\mathbf{k})$ を導入すると、多くの場合支配方程式は以下のようなモード方程式に帰着する：[1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(\mathbf{k})}{\partial t} = & -i\omega(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) - i \int \left\{ U_{012}^{(1)} b_1 b_2 \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} + \dots \right\} d\mathbf{k}_{12} \\ & - i \int \left\{ V_{0123}^{(1)} b_1 b_2 b_3 \delta_{0-1-2-3}^{\mathbf{k}} + \dots \right\} d\mathbf{k}_{123} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $b_1 = b(\mathbf{k}_1)$, $d\mathbf{k}_{12} = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2$, $\delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ などの略記法を用いている。

2 次の非線形項までを見ると Navier-Stokes 方程式のフーリエ表現と類似しているが、以下の点で異なる。1 つ目は言うまでもなく線形振動項 $i\omega(\mathbf{k})b(\mathbf{k})$ の存在であり、これは波動をベースとする波動乱流にとって本質的に重要な項である。² 2 つ目は、ここでの $b(\mathbf{k})$ は速度などある実数値物理量の単なるフーリエ変換ではなく、波数ベクトル \mathbf{k} に対応する波列の複素振幅であり、した

¹ スペクトル変化の時間スケール t_{NL} は、線形分散関係 $\omega = \omega(\mathbf{k})$ が 3 波共鳴相互作用を許す場合には $t_{\text{NL}} \sim O(1/\omega\epsilon^2)$, そうでない場合には $t_{\text{NL}} \sim O(1/\omega\epsilon^4)$ となる。ここで ϵ は波列振幅の小ささを表す無次元パラメータ。

² 新たな変数 $\tilde{b}_{\mathbf{k}} := b_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)$ を導入することでこの線形振動項を消去することはできる（相互作用表現）が、その場合には当然、相互作用の係数 $U^{(i)}, V^{(i)}$ が時間的に振動することになる。

がって $b(\mathbf{k})$ と $b(-\mathbf{k})$ は独立であるという点である。なおこのモード方程式において何次の項まで取り入れるべきかは分散関係に強く依存する。

分散関係 $\omega(\mathbf{k})$ は、3波共鳴相互作用 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)$ を許す崩壊型 (decay type) と、それ以外の非崩壊型に分類される。 $\omega = k^\alpha$ の場合, $\alpha > 1$ なら崩壊型, $\alpha < 1$ なら非崩壊型となる。水面波の場合, 表面張力を主な復元力とする短波長の表面張力波は崩壊型 ($\alpha = 3/2$), 重力を主な復元力とする比較的長波長の重力波は非崩壊型 ($\alpha = 1/2$) の分散関係を持つ。波列間非線形相互作用における共鳴の重要性は Phillips (1960) によって初めて指摘された。 [2]

モード方程式 (2) は適切な非線形変数変換

$$b_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}} + \int A_{012}^{(1)} c_1 c_2 \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{12} + \cdots + \int B_{0123}^{(1)} c_1 c_2 c_3 \delta_{0-1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123} + \cdots \quad (3)$$

を用いることにより, 崩壊型 (3波共鳴系) の場合には

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} - i \int \left\{ \frac{1}{2} V_{012} c_1 c_2 \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} + V_{102} c_1 c_2^* \delta_{1-0-2}^{\mathbf{k}} \right\} d\mathbf{k}_{12}, \quad (4)$$

非崩壊型 (4波共鳴系) の場合には

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} - i \int W_{0123} c_1^* c_2 c_3 \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} d\mathbf{k}_{123}, \quad (5)$$

なる標準形に帰着できることが知られている。これらは Zakharov 方程式と呼ばれる。 [3]

1.3 統計的記述への移行

Zakharov 方程式は決定論的であるが, これからアクションスペクトル (2次モーメント) に対する以下のような支配方程式を導出することができる。崩壊型分散関係を有する系の場合には,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{k})}{\partial t} = & \pi \int \left[|V_{012}|^2 (n_1 n_2 - n_0 n_1 - n_0 n_2) \delta_{0-1-2}^{\mathbf{k}} \delta_{0-1-2}^{\omega} \right. \\ & \left. + 2 |V_{102}|^2 (n_0 n_2 - n_1 n_0 - n_1 n_2) \delta_{1-0-2}^{\mathbf{k}} \delta_{1-0-2}^{\omega} \right] d\mathbf{k}_{12}, \end{aligned} \quad (6)$$

非崩壊型の場合には

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{k})}{\partial t} = & 2\pi \int |W_{0123}|^2 \delta_{0+1-2-3}^{\mathbf{k}} \delta_{0+1-2-3}^{\omega} \\ & \times \{ n_2 n_3 (n_0 + n_1) - n_0 n_1 (n_2 + n_3) \} d\mathbf{k}_{123}. \end{aligned} \quad (7)$$

これらの導出にあたっては通常乱雑位相近似 (random phase approximation) が用いられる。この近似では, 相互作用の最低次 (=自由波) では $c(\mathbf{k})$ の位相は独立でランダムであることが仮定され,

$$\langle c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'}^* \rangle = n(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \langle c_1^* c_2^* c_3 c_4 \rangle = n(\mathbf{k}_1) n(\mathbf{k}_2) \left[\delta_{1-3}^{\mathbf{k}} \delta_{2-4}^{\mathbf{k}} + \delta_{1-4}^{\mathbf{k}} \delta_{2-3}^{\mathbf{k}} \right], \quad (8)$$

などの関係によってモーメントの無限連鎖が閉じられる。 [1] スペクトル変動を支配する (6), (7) は運動論的方程式 (kinetic equation), Boltzmann 方程式, 輸送方程式 (transport equation) などと呼ばれる。

1.4 主な研究対象

近年まで波動乱流研究はもっぱら運動論的方程式を中心に行われてきた。主な研究題目としては、運動論的方程式の一般的性質 (保存則, H-定理など), 相互作用の局所性 (運動論的方程式の右辺の積分 $I(\mathbf{k})$ の収束性), Zakharov 変換 ($I(\mathbf{k})$ の被積分関数の因子化 \rightarrow すべてのベキ則の検出 \rightarrow 厳密解としての Kolmogorov スペクトル, フラックスの向き), Kolmogorov スペクトルとソース・シンク領域との接続, Kolmogorov スペクトルの安定性, などが挙げられる。またこれらの研究の適用対象としては、水波における水面波 (重力波, 表面張力波) や成層流体中の内部波, プラズマ・電磁流体における Langmuir 波, イオン音波, ドリフト波, 磁気音波など, 地球流体におけるロスビー波 (パロトロピック & バロクリニック), 慣性重力波など, 固体におけるスピン波, 弾性波, 薄板の振動など ..., 幅広い物理系が取り上げられている。これらの研究の詳細については, 1990 年頃までの研究の集大成とも言える Zakharov らの名著を参照されたい。 [1]

一方でまだ残されている今後の課題としては, スペクトル以外の統計量に関する研究 (本稿で後述), 系の有限性 (or 周期性) に起因する \mathbf{k} 空間の離散化の影響 (離散系における共鳴 [4][5], 表面張力波の凍結乱流現象 [6][7], 「砂山の挙動」 (sandpile behaviour) [8] など), 弱乱流の枠を超えた波動乱流理論への取り組み (流体乱流理論の直接相互作用近似 (DIA) の応用など [9]), カスケードに伴う弱乱流仮定の自発的な破綻とその帰結 (例えば [10]), 波動乱流と流体乱流の共存状態への取り組み (波と流れ (渦) の相互作用, 系依存性が強い中での普遍的な捉え方の可能性 (MHD 乱流や準地衡乱流における臨界平衡 (critical balance) など [11]) などが挙げられよう。また理論との比較に耐える精密な実験データが全般的に不足しているとも指摘されている。最近の情報を得るには Nazarenko [12] や Newell らの解説 [13] などを参照されたい。

2 Random Phase and Amplitude Formalism の紹介

2.1 動機

前述のように従来の波動乱流研究はもっぱら運動論的方程式を手がかりとしてアクションスペクトル $n_{\mathbf{k}}$, すなわち $|a_{\mathbf{k}}|^2$ のアンサンブル平均値 $\langle |a_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ に注目してきた。しかし数値計算や実験で観測されるスペクトルは通常大きなゆらぎを持つ。また波動乱流研究における直接数値計算 (DNS) では, 初期に各波動モードの振幅 $|a_{\mathbf{k}}|$ を, スペクトルから決まる確定値に取り, まったくゆらぎを持たない状態から出発することがしばしば行われるが, そのような場合にも振幅ゆらぎは時間とともに自発的に成長してくる (図 4 参照)。なぜこれらの振幅ゆらぎが生まれてくるのか? その成長の時間スケールはどの程度なのか? この $|a_{\mathbf{k}}|^2$ のゆらぎの確率密度関数 (PDF) は時間とともに, ガウスのな $a_{\mathbf{k}}$ に対応する分布に漸近するのか, それとももっと間欠的なのか? などの点についてはほとんど研究がなされて来なかった。

このような状況の中で近年登場したのが, 新たな RPA=Random Phase and Amplitude formalism という定式化である。と言っても用いる近似は従来の Random Phase Approximation と変わらない。すなわち複素振幅 $a_{\mathbf{k}}$ を振幅 $A_{\mathbf{k}}$ (正の実数) および位相因子 $\psi_{\mathbf{k}}$ ($\psi_{\mathbf{k}} = e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$) を用いて $a_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}$ と書くものとする。このとき, Random Phase Approximation は次の 3 つの性質を意味する:

1. 位相因子 $\psi_{\mathbf{k}}$ は複素平面の単位円上に一様に分布し, 統計的に互いに独立,
すなわち $\langle \psi_{\mathbf{k}_1} \overline{\psi_{\mathbf{k}_2}} \rangle = \delta_{\mathbf{k}_1}^1$. (ここで上線は複素共役, δ_2^1 はクロネッカーのデルタ)

2. 位相と振幅は統計的に独立, すなわち $\langle \psi_{k_1} A_{k_2} \rangle = 0$. したがって位相に関する平均操作と振幅に関する平均操作は独立に行うことができる.
3. 異なる k の振幅の間には相関がない, すなわち $\langle A_{k_1}^n A_{k_2}^m \rangle = \langle A_{k_1}^n \rangle \langle A_{k_2}^m \rangle$.

新たな RPA の提唱者である Lvov と Nazarenko[14] は『Random Phase Approximation という名前は振幅には言及しておらず, 上記性質 2 と 3 は従来は陽には言及されていない. しかしこの振幅の統計に関する重要な仮定は, RPA が使われるときには常に暗黙のうちに使われてきている, しかも多くの場合意識されないままに.』と述べている. すなわち新たな RPA 定式化とは, 位相だけでなく振幅も非常に noisy な確率変数であるという従来あまり意識されてこなかった事実を直視し, その高次モーメントや確率密度関数がどのように時間的に発展するのかをきちんと理解しようという試みと言えよう. 今後本稿での「RPA」はこの立場を指すものとする.

2.2 RPA 定式化の概略

以下では [14] に従って RPA の方法論の概略を紹介する. 対象は 3 波系とする. 相互作用表現 $c_l = a_l e^{-i\omega_l t}$ を導入すると, Zakharov 方程式 (4) は以下のように書くことができる:

$$i\dot{a}_l = \epsilon \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} V_{mn}^l a_m a_n e^{i\omega_{mn}^l t} \delta_{m+n}^l + \overline{V_{ln}^m} \overline{a_n} a_m e^{-i\omega_{ln}^m t} \delta_{l+n}^m \right), \quad (9)$$

ここで $a_l = a_{k_l}$, $\omega_l = \omega_{k_l}$, $\omega_{mn}^l := \omega_l - \omega_m - \omega_n$. また ϵ は振幅の小ささを表す微小パラメータ, $k_n = 2\pi n/L$ (n は整数, L は box length).³

ここで, 線形時間スケール $\tau_L = 2\pi/\omega$ よりずっと長く, 非線形時間スケール $\tau_{NL} = 1/\epsilon^2\omega$ よりずっと短い中間的な時間 T を考える⁴: $\tau_L = 2\pi/\omega \ll T \ll 1/\epsilon^2\omega = \tau_{NL}$. 時刻 T における a_l に対する ϵ についての摂動展開

$$a_l(T) = a_l^{(0)} + \epsilon a_l^{(1)} + \epsilon^2 a_l^{(2)} + \dots \quad (10)$$

を考え, (9) に代入すると, $O(1)$ では $a_l^{(0)}(T) = a_l(0)$. これは $T \ll \tau_{NL}$ では a の最低次部分は変化しないことに対応している. 今後 $a_l(0)$ を単に a_l と書く. $O(\epsilon)$, $O(\epsilon^2)$ では

$$i\dot{a}_l^{(1)} = \epsilon \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} V_{mn}^l a_m a_n e^{i\omega_{mn}^l t} \delta_{m+n}^l + \overline{V_{ln}^m} \overline{a_n} a_m e^{-i\omega_{ln}^m t} \delta_{l+n}^m \right), \quad (11)$$

$$i\dot{a}_l^{(2)} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} V_{mn}^l (a_m^{(0)} a_n^{(1)} + a_m^{(1)} a_n^{(0)}) e^{i\omega_{mn}^l t} \delta_{m+n}^l + \overline{V_{ln}^m} (\overline{a_n^{(0)}} a_m^{(1)} + \overline{a_n^{(1)}} a_m^{(0)}) e^{-i\omega_{ln}^m t} \delta_{l+n}^m \right], \quad (12)$$

なる微分方程式が得られる. 詳細は省略するが, これらを t について 0 から T まで積分することにより, $a_l^{(1)}(T)$, $a_l^{(2)}(T)$ に対する表現が得られ, それを $|a_k|^2$ の p 次モーメントの定義:

$$M_k^{(p)}(T) := \langle |a_k(T)|^{2p} \rangle_{A,\psi}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

³まずは離散系で計算しておいて, 最後に $L \rightarrow \infty$ (large box limit), $\epsilon \rightarrow 0$ (weak nonlinear limit) を, この順序で取るのが RPA の常套手段.

⁴線形時間スケールと非線形時間スケールが十分に分離されていて, T のような中間的な時間スケールを取ることが弱乱流理論の前提.

に代入して, a_k , すなわち $a_k^{(0)}$ (0) のみを含む表現にした上で, a_k に対して RPA を適用すると

$$M_k^{(p)}(T) = M_k^{(p)} + pM_k^{(p)}(-2\epsilon^2 \sum_{m,n} [|V_{mn}^k|^2 \delta_{m+n}^k \text{Re}(E[0, \omega_{mn}^k]) n_m + |V_{km}^n|^2 \delta_{k+m}^n \text{Re}(E[0, \omega_{km}^n]) (n_m - n_n)]) + p^2 M_k^{(p-1)} \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{m,n} [|V_{mn}^k|^2 \delta_{m+n}^k |\Delta_{mn}^k|^2 + 2|V_{km}^n|^2 \delta_{k+m}^n |\Delta_{km}^n|^2] n_n n_m. \quad (14)$$

が得られる. (E や Δ の定義などについては原論文 [14] を参照されたい.) ここで Large Box Limit $L \rightarrow \infty$, 続いて Large t Limit $T \rightarrow \infty$ (weak nonlinear limit $\epsilon \rightarrow 0$) を取ると, 最終的にアクション密度 $|a_k|^2$ の p 次モーメント $M_k^{(p)} := \langle |a_k|^{2p} \rangle$ に対する支配方程式

$$\frac{dM_k^{(p)}}{dt} = -p\gamma_k M_k^{(p)} + p^2 \eta_k M_k^{(p-1)} \quad (15)$$

が得られる. 式 (15) の $p=1$ の場合がアクションスペクトル $n(k)$ に対する運動論的方程式 (16a) を与える:

$$\frac{dn(k)}{dt} = -\gamma(k)n(k) + \eta(k), \quad (16a)$$

$$\eta(k) = \pi \int n_1 n_2 [|V_{12}^0|^2 \delta_{12}^0 \delta(\omega_{12}^0) + 2|V_{01}^2|^2 \delta_{01}^2 \delta(\omega_{01}^2)] dk_{12}, \quad (16b)$$

$$\gamma(k) = 2\pi \int [|V_{12}^0|^2 \delta_{12}^0 \delta(\omega_{12}^0) n_2 + |V_{01}^2|^2 \delta_{01}^2 \delta(\omega_{01}^2) (n_2 - n_1)] dk_{12}. \quad (16c)$$

これは (6) に対応する.

a_k が Gaussian の場合には, $M_k^{(p)} = p! n_k^p$ が成り立つ. したがって

$$F_k^{(p)} := \frac{M_k^{(p)} - p! n_k^p}{p! n_k^p} \quad (17)$$

で定義される $F_k^{(p)}$ は a_k の Gaussian からのずれを表す指標となる. (15) を用いると $F_k^{(p)}$ の時間発展に対する以下の式が得られる:

$$\frac{dF_k^{(p)}}{dt} = \frac{p\eta_k}{n_k} (F_k^{(p-1)} - F_k^{(p)}), \quad \text{特に} \quad \frac{dF_k^{(2)}}{dt} = -\frac{2\eta_k}{n_k} F_k^{(2)}. \quad (18)$$

定義 (16b) より $\eta_k > 0$ を考慮すると, (18) は, 時間が十分経過したのちにはすべての次数において, a_k の分布の Gaussian からのずれは時間とともに減衰していくことを示している.

また詳細は省略するが, RPA 理論によると, アクション密度 $s_k := |a_k|^2$ の確率密度関数 (PDF) $P(s_k)$ は以下の線形偏微分方程式に従うことが示されている:

$$\frac{\partial P(s_k)}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s_k}, \quad F(k) := s_k \left(\gamma_k P(s_k) + \eta_k \frac{\partial P}{\partial s_k} \right). \quad (19)$$

3 直接数値計算による RPA 理論の検証

3.1 対象とするモデル

3波相互作用系のモデルとして以下のハミルトン系を採用する:

$$H = H_2 + H_3, \quad H_2 = \sum_k \omega_k |a_k|^2, \quad (20a)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} V_{12}^0 (a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}_1} a_{\mathbf{k}_2} + \text{c.c.}) \delta_{12}^0, \quad (20b)$$

$$\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = -i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} V_{12}^0 a_1 a_2 \delta_{12}^0 - i \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} V_{02}^1 a_1 a_2^* \delta_{02}^1, \quad (20c)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = k^\alpha, \quad V_{12}^0 = 2\pi(k_0 k_1 k_2)^\beta, \quad \alpha = 3/2, \quad \beta = 1/4 \quad (20d)$$

分散関係は表面張力水面波と同じものを採用した。実際の表面張力水面波とここで採用するモデルの違いは、非線形相互作用の係数 V_{12}^0 にある。表面張力水面波においては V_{12}^0 は k, k_1, k_2 の複雑な関数であるが、本研究の目的は水面波に限定したのではないので、非線形項の畳み込み和の計算が高速フーリエ変換 FFT を用いて高速にできるように、上記のような簡単な変数分離形を想定した。FFT を用いた非線形項の計算において発生する aliasing 誤差は、いわゆる「2/3 則」により除去している。

aliasing 誤差の影響を受けない計算対象領域は \mathbf{k} 平面上の正方形領域 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $-8 \leq k_x, k_y \leq 8$ とし、それを k_x, k_y 両方向共に $\Delta k = 1/42$ 間隔のメッシュで離散化した。このとき計算対象となる波動モード数は約 46 万となる。初期場のスペクトルには海洋波の Pierson-Moskowitz スペクトルを参考に以下の等方性スペクトルを採用した：

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2, \quad (21a)$$

$$|a_{\mathbf{k}}|^2 = A k^{-6.5} \exp(-1/k^4) D(k), \quad (21b)$$

$$D(k) = \begin{cases} 1, & (0 < k < 7) \\ \exp(-10(k-7)^2), & (7 \leq k \leq 8). \end{cases} \quad (21c)$$

各 $a_{\mathbf{k}}$ の初期位相は $[0, 2\pi]$ の一様乱数で与えた。波動場の非線形性の程度は H_2 の値で制御した。今回の計算では $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}, 2.5 \times 10^{-6}, 5.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-5}$ の 4 種類を扱った。アンサンブル平均を取るために同一の H_2 に対して初期位相の乱数セットのみが異なる 256 個の数値計算を行った。時間発展の追跡には時間刻みを $\Delta t = T_p/50$ と固定した 4 次精度 Runge-Kutta 法 (+ 変数変換により線形振動項の取り込み) を用いた。ここで T_p はエネルギースペクトルのピークに対応する周期であり、 $T_p = 2\pi$ である。計算は名古屋大学情報基盤センターの FUJITSU FX を使用し、 $t = 100T_p$ までの時間発展の追跡に要した CPU 時間は約 13 時間であった。

3.2 計算結果

3.2.1 スペクトルの時間変化

直接数値シミュレーション (DNS) から得られた、 $t = 0$ と $t = 100T_p$ における 1 次元エネルギースペクトル $E(k)$ を図 1 に示す。左図は $H = 1.25 \times 10^{-6}$ の場合、右図は $H = 1 \times 10^{-5}$ の場合の結果である。 $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$ に対しては、100 周期が経過してもスペクトル形はごく僅かな変化しか示さないが、 $H_2 = 1 \times 10^{-5}$ に対してはかなりのスペクトル変化が見られる。今回検証の対象としている RPA 理論を含め、大部分の波動乱流理論は、線形時間スケール (線形振動数が決める時間スケール) と非線形時間スケール (スペクトル変動の時間スケール) が十分に分離されている状態、いわゆる「弱乱流」を対象として構築されている。その意味では我々の DNS では、

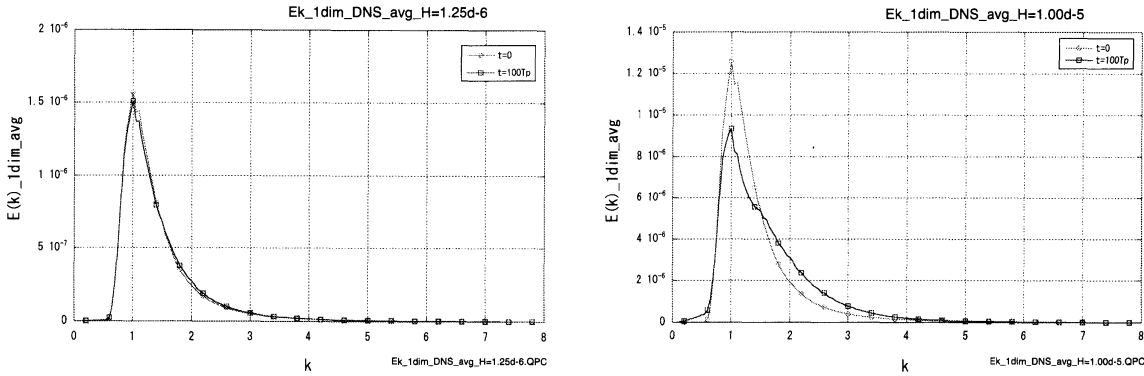


図 1: 1次元エネルギースペクトル $E(k)$ の時間変化 (左: $H = 1.25 \times 10^{-6}$, 右: $H = 1 \times 10^{-5}$)

$H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$ については、理論との合理的な比較が可能である弱乱流状態が実現していると思われるが、 $H_2 = 1 \times 10^{-5}$ に対しては多少その枠組みを逸脱している可能性も排除できない。

波動乱流理論によると、3波系 (20c) に対するアクションスペクトル $n(\mathbf{k})$ は (16a) にしたがって時間発展する。初期スペクトル (21b) に対して (16a) から算出した1次元スペクトル $E(k)$ の時間変化率と、 $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$ とした DNS から得られた時間変化率の比較を図 2 に示す。DNS については $t = 0$ および $t = 50T_p$ における $E(k, t)$ の差を $50T_p$ で割ることで評価しているが、両者は大変よく一致する。また図 3 は、 $H_2 = 1 \times 10^{-5}$ の場合に、運動論的方程式 (16a) を数値的に時

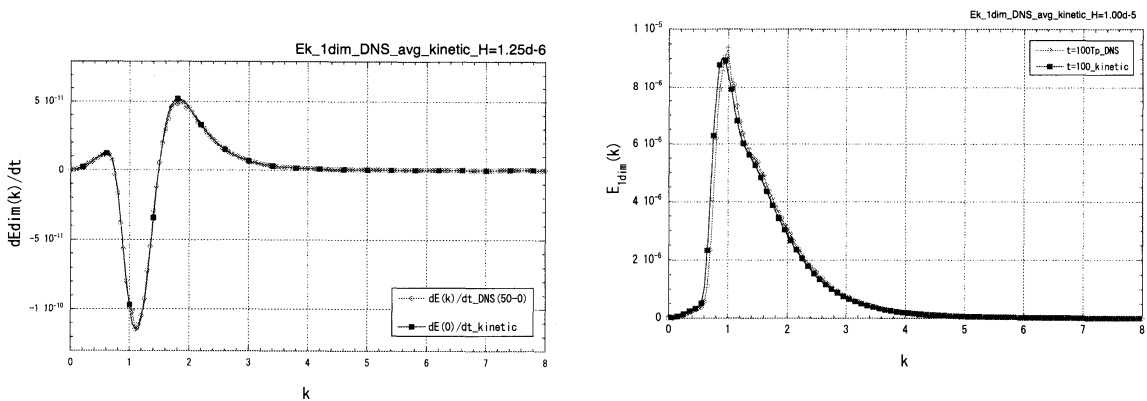


図 2: $dE(k, t)/dt$ についての DNS と運動論的方程式の比較. $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$

図 3: $t = 100T_p$ における $E(k, t)$ に対する DNS と運動論的方程式の比較. $H_2 = 1.00 \times 10^{-5}$

間積分して求めた $t = 100T_p$ におけるスペクトルと、同時刻における DNS から得られたスペクトルを比較したものである。やはりこの場合にも両者は非常によく一致しており、ここで扱った最大の H である $H_2 = 1 \times 10^{-5}$ に対しても、DNS におけるスペクトルが確かに弱乱流理論が予想するごとく、(16a) に従って変化していることを示している。

3.2.2 ゆらぎの発達

DNS においては、初期振幅 $|a_{\mathbf{k}}(0)|$ は初期スペクトル形状から確定し、したがって $t = 0$ におけるゆらぎは 0 である。しかし他の膨大な数のモードとの間の非線形相互作用の結果、ゆらぎは自発的に発生し、時間と共に増大する。 $H_2 = 5 \times 10^{-6}$ の場合、 $\mathbf{k} = (3, 0)$ における 5 つの実現から

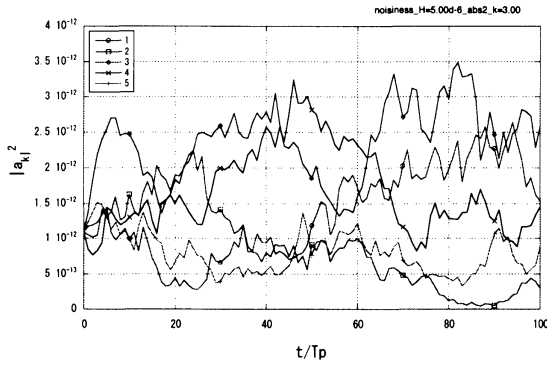


図 4: 5つの実現から得られた $|a_k|^2$ の時間発展. $H_2 = 5.0 \times 10^{-6}$, $k = (3, 0)$.

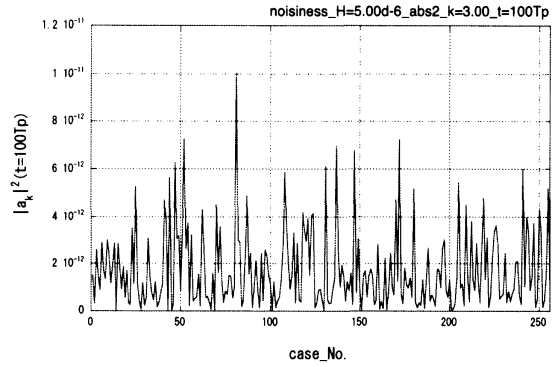


図 5: $t = 100T_p$ において 256 の実現から得られた $|a_k|^2$ の値. $H_2 = 5.00 \times 10^{-6}$, $k = (3, 0)$

得られた $|a_k|^2$ の時間発展の様子を図 4 に示す. $t = 0$ における $|a_k|^2$ の値はスペクトルから決まる同一の値を持つものの、時間と共にゆらぎが成長し、全く異なる時間発展をする様子が見られる. また図 5 は $t = 100T_p$, $k = (3, 0)$ における $|a_k|^2$ の値を実現番号 (1-256) を横軸としてプロットしたものであるが、同時刻同波数における $|a_k|^2$ の不確定さを明瞭に示している.

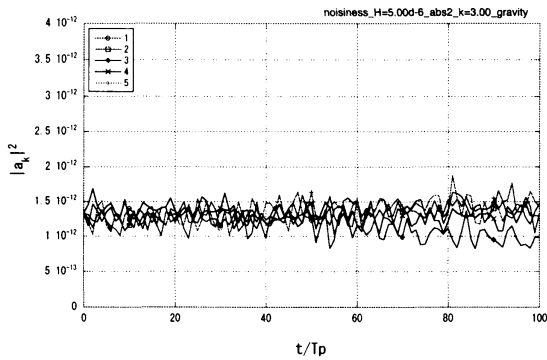


図 6: 図 4 に同じ. ただし $\omega = k^{1/2}$

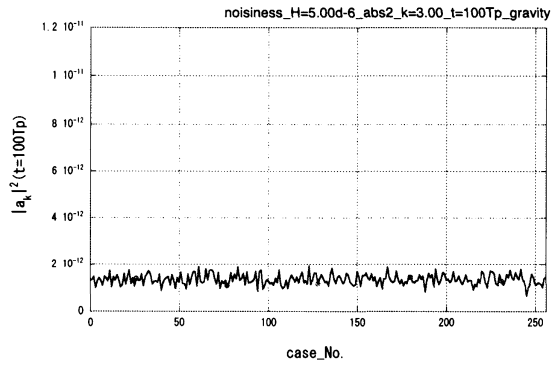


図 7: 図 5 に同じ. ただし $\omega = k^{1/2}$

ちなみに数値モデルにおいて (20d) の α だけを $3/2$ から $1/2$ に変更、すなわち線形分散関係だけを $\omega = k^{3/2}$ から 3 波共鳴を許さない $\omega = k^{1/2}$ に変更して行った DNS から得られた結果を図 6, 7 に示す. $\omega = k^{3/2}$ の場合と異なり、 $|a_k|^2$ のゆらぎがほとんど成長しないことが分かる. スペクトル $n(k)$ の時間変化に対して共鳴的な非線形相互作用だけが重要であることは、弱乱流理論に基づいて導出された運動論的方程式 (16a) が示すところであり、古くからよく知られている. n_k , すなわち $|a_k|^2$ の平均値が変動するためには時間平均で消えないようなエネルギーの永年的な輸送が必要であり、それをもたらすことができるのは共鳴相互作用だけであることから、このことは直感的にも理解しやすい. これに対して、 $|a_k|^2$ の平均値まわりのゆらぎに関しては、共鳴・非共鳴を問わず他の多数のモードとの非線形相互作用さえあれば、時間的に発達しように思えなくもない. その意味で、ゆらぎの成長の原動力が共鳴的な相互作用であることは、平均値 (スペクトル) の場合に比べそれほど自明ではないように思われるが、ここでの $\omega = k^{3/2}$ と $\omega = k^{1/2}$ のケースの比較はその事実を明瞭に示している.

ゆらぎの発達をより定量的に見るために、 $H_2 = 5 \times 10^{-6}$ のケースについて、 $k = 1$ および $k = 6$

における $|a_k|^2$ の平均値 n_k およびその標準偏差 σ_k の時間変化を図8に示す. 波数 k によって速さに違いはあるものの, どちらの波数においても σ_k が, したがって振幅ゆらぎが時間とともに成長していることが分かる. 特に $k=6$ においては, a_k の Gauss 分布に対応する $n_k = \sigma_k$ の状態に向けて漸近しつつある様子が明瞭に見られる.

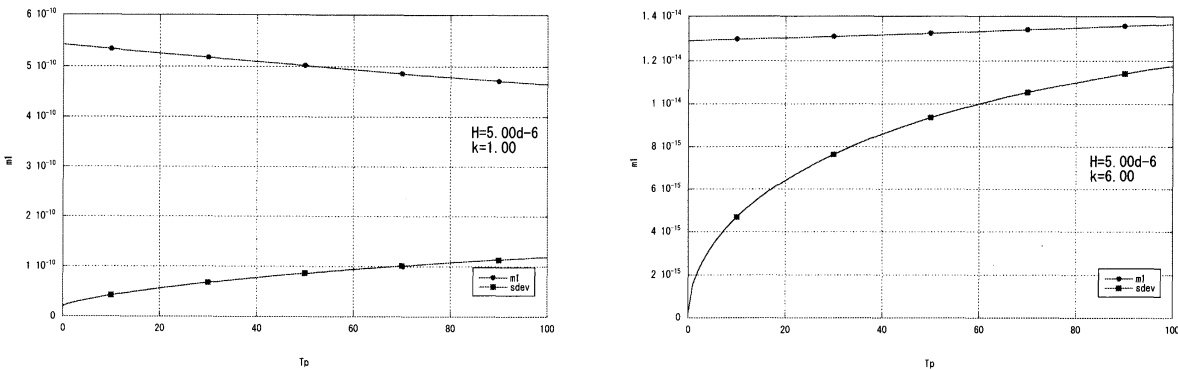


図 8: $|a_k|^2$ の平均値 n_k および標準偏差 σ_s の時間発展. $H_2 = 5 \times 10^{-6}$. (左) $k = 1$, (右) $k = 6$.

RPA 理論によると, (17) で定義される $F_k^{(2)}$ は a_k の Gaussian からのずれの指標となり, (18) にしたがって時間発展する. $H_2 = 5 \times 10^{-6}$ の場合, $t = 100T_p$ までにかかなりのスペクトル変化が生じるが, DNS および運動論的方程式の結果によると, $\eta(k)/n(k)$ の値は $1.5 < k < 3.0$ の領域を除き, $0 \leq t \leq 100T_p$ の間であまり大きく変動しない. この場合, 式(18)は $F^{(2)}(k)$ が t についてほぼ指数関数的に振舞うことを示唆する. 図9は $H_2 = 5 \times 10^{-6}$ とした DNS の結果から, $k = 3$ における $F^{(2)}$ の時間的振舞いを片対数スケールで示したものであるが, 期待通り $F^{(2)}$ の絶対値がほぼ指数関数的に減少する様子を見ることができる. この $F^{(2)}$ に最小2乗法により指数関数 $-\frac{1}{2} \exp(-\alpha t)$ を当てはめると $\alpha = 2.58 \times 10^{-3}$ となる. 一方, RPA 理論が予言する変化率 $2\eta(k)/n(k)$ の100周期の間の時間平均値は $k = 3$ において 2.57×10^{-3} という値を取り, RPA と DNS の結果は定量的に非常に良く一致している. 図10は上記の方法で DNS から得られた $F^{(2)}(k, t)$ に対して最小2乗法

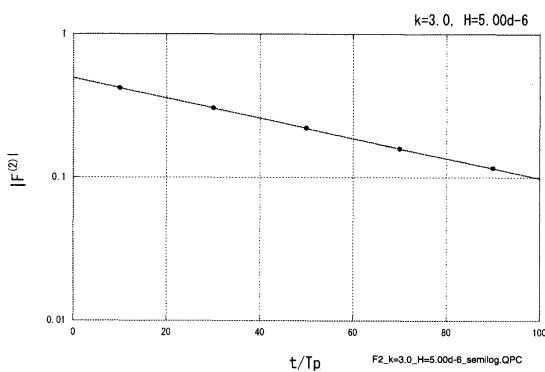


図 9: DNS から求めた $F_k^{(2)}$ の時間発展. $H_2 = 5 \times 10^{-6}$, $k = 3$.

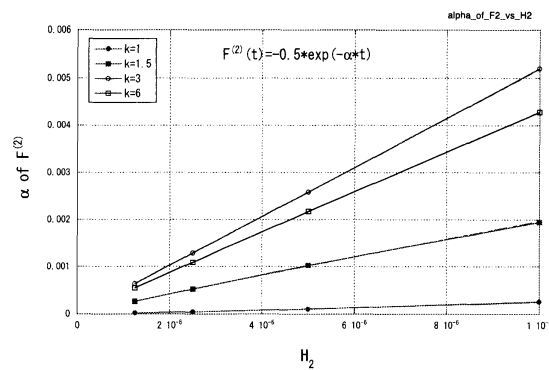


図 10: DNS から求めた $F^{(2)}(k)$ の変化率 $\alpha(k)$ の H_2 依存性

により求めた時間変化率 α を H_2 の関数として表したものである. 対象とした波数は $k = 1, 1.5, 3, 6$ である. どの波数においても α が H_2 の1乗に比例していることが分かる. RPA 理論は, (16a) と (18) が示すように, ゆらぎの成長の時間スケールは, スペクトル変動のそれと同様, ハミルトニアン H の -1 乗に比例することを予言するが, 図10の結果はそれとよく整合している.

3.2.3 高次モーメントの振舞い

RPA によると高次モーメントの Gaussian からのずれの指標 $F_k^{(p)}$ は (18) に従って時間発展する。(18) の解は

$$F_k^{(p)}(t) = \sum_{j=2}^p C_j^{(p)} e^{-j\theta}, \quad \theta = \int_0^t \alpha_k(t') dt', \quad \alpha_k = \eta_k/n_k, \quad (22)$$

のように表すことができる。ここで $C_j^{(p)}$ は漸化式

$$C_2^{(2)} = F_k^{(2)}(0), \quad C_j^{(p)} = \binom{p}{j} C_j^{(j)} \quad (j = 2..p-1), \quad C_p^{(p)} = F_k^{(p)}(0) - \sum_{j=2}^{p-1} C_j^{(p)} \quad (23)$$

によって決まる係数を表す。

図 11 は、 $H_2 = 5 \times 10^{-6}$ の場合について $k = 7$ において、RPA 理論式 (22) から求めた $F^{(p)}$ および DNS から直接算出した $F^{(p)}$ を次数 p の関数として描いたものである。対象とした時刻は $t = 50T_p$ および $t = 100T_p$ である。なおここで (22) に基づいて RPA 理論値を求めるにあたっては、 α の時間積分 θ を α の $100T_p$ までの時間平均値 $\bar{\alpha}$ を用いて $\theta \approx \bar{\alpha}t$ で近似している。図 12 は同様の近似に基づいて RPA 理論より算出した $F^{(3)}, F^{(5)}$ および $F^{(9)}$ の時間発展を DNS の結果と比較したものである。 $\alpha = \eta/n$ の値を時間平均値で置き換えていること、および、9 次というかなり高次のモーメントまでを対象としていることを考慮すると、両者の一致は非常にいいと言えよう。

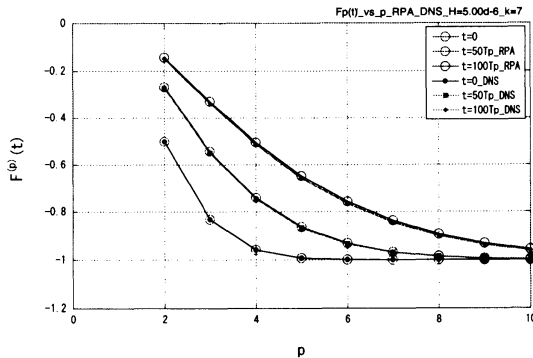


図 11: $F^{(p)}$ の次数 p 依存性に関する RPA 理論と DNS の比較。 $H_2 = 5 \times 10^{-6}$, $k = 7$, $t = 0, 50T_p, 100T_p$.

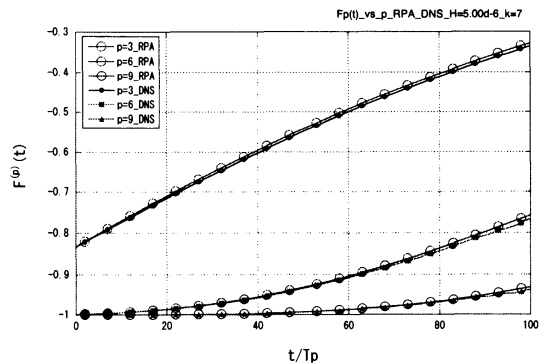


図 12: RPA および DNS から求めた $F^{(3)}, F^{(6)}, F^{(9)}$ の時間発展。 $H_2 = 5 \times 10^{-6}$, $k = 7$.

3.2.4 振幅ゆらぎの確率密度関数の時間発展

RPA 理論によると、 $s(k) = |a(k)|^2/\delta(0)$ の確率密度関数 (PDF) $\mathcal{P}(s)$ は (19) に従うことが示されている。 $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$ および $H_2 = 1 \times 10^{-5}$ の場合について、波数 $k = 3$ において、(19) を $t = 100T_p$ まで数値的に積分して求めた $\mathcal{P}(s)$ を図 13 に示す。図の横軸 x は s の初期値 $n(0)$ で規格化された s , すなわち $x = s/n(0)$ を表す。 $\mathcal{P}(x)$ の変化は H_2 が大きいほど速く、 $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$ では $t = 100T_p$ においてまだ初期分布 $\delta(x-1)$ の痕跡を残す比較的狭い分布に留まっているのに対し、 $H_2 = 1 \times 10^{-5}$ の場合には同時刻までに $a(k)$ の Gaussianity に対応する χ^2 分布がほぼ確

立している様子を見ることができる。図には $t = 100T_p$ において DNS から得られた $s_k = |a_k|^2$ の確率密度関数 P もあわせて示した。これについても初期値で正規化した変数 $x = s_k/n_k(0)$ を用いている。どちらの H_2 に対しても、RPA の理論的予測と DNS が非常によく一致していることを見ることができる。Lvov と Nazareenko[14] は、波動乱流 (弱乱流) のクロージャーには RPA 定

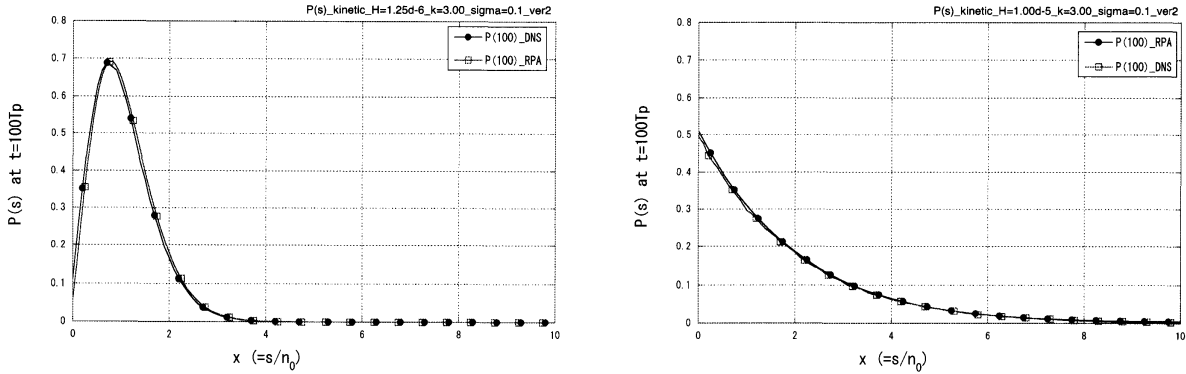


図 13: $P(s_k)$ に対する DNS と RPA 理論の比較 ($k = 3, t = 100T_p$). 左: $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$, 右: $H_2 = 1 \times 10^{-5}$)

式化の 3 つの要請, すなわち (1) 位相の一様乱雑性, (2) 位相と振幅の統計的独立性, (3) 異なる波数の振幅の統計的独立性, だけで十分であり, a_k の Gaussianity への近さは不要であると主張している. 図 13(左) は, $H_2 = 1.25 \times 10^{-6}$ の場合, $100T_p$ 経過後でも a_k が Gaussian とは程遠い状態にあることを示しているが, それにもかかわらず, 図 2 に示したようにスペクトル変動はほぼ完全に運動論的方程式に従って時間発展している. この結果は, 運動論的方程式の成立に a_k の Gaussianity は不要であるという事実を明瞭に示している. なお Benney ら [15][16] は, 波動乱流に対する運動論的方程式のクロージャーには, 弱非線形性と分散性だけで十分であり, 物理空間における Gaussianity やゼロキュムラントなどの仮定は不要であることを示している. Eyink[17] は, 複素振幅 a_k が RP(Random Phase) や RPA(Random Phase and Amplitude) の性質を持つときの対応する物理空間変数の統計的性質について議論している.

4 結論と今後の課題

本研究では, 3 波共鳴相互作用を許すあるハミルトン系を対象とした大規模な直接数値シミュレーションを実施し, その結果と比較することにより, 近年新たに提案された RPA 理論の正当性の評価を試みた. その結果, 各波動モードのアクション密度 $|a_k|^2$ の確率密度関数の時間発展の仕方, a_k の Gauss 分布への漸近的振舞いやその時間スケールなど, 今回比較した振幅ゆらぎの統計的性質のすべての側面において, RPA による理論的予測と DNS の結果が定量的に非常に良い一致を示すことを確認した. また, ゆらぎの成長がまったく不十分で, a_k が Gauss 分布から程遠い初期段階からすでに, スペクトルを含め, すべての次数のモーメントは, 波動乱流理論の予測どおりの時間発展を示すことを確認した.

本研究では 3 波共鳴を許す崩壊型分散関係 $\omega = k^{3/2}$ を有する系を対象とした. 4 波共鳴が最低次の共鳴相互作用となるような, 非崩壊型分散関係を有する系に対する RPA 理論においては, 非線形振動数のくり込みなど, 3 波系にはない側面も含まれており, その正当性については別途検証する必要がある. また本研究では単一モードの振幅 a_k を含む統計量のみを対象としたが, RPA 定式化は, 例えば M 個の波数モード k_1, \dots, k_M におけるアクション s_1, \dots, s_M に対する結合確率

密度関数 $\mathcal{P}(s_1, \dots, s_M; k_1, \dots, k_M)$ など、複数の波数モードにまたがる統計量に対する理論的予測も与えている。[18][19] またこれら複数モード統計量に関しては、RPA 理論が当初導出した結果に誤りがあるとの指摘もなされている。[17] これらの複数モード統計量の研究は、例えば RPA 的性質が長時間にわたる非線形相互作用によって崩れることはないか、異なるモードの振幅間に相関が生じることはないか、もしあるとすればそれが波動乱流のライフサイクルにどのような影響をもたらすのか、などさまざまな重要な問題と関係しており、今後の数値的な検証が必要がある。

また、今回の直接数値シミュレーションと理論的予測の比較において、以下のような「時間スケール」に関する疑問点も浮上した。本研究で対象とした RPA 理論をはじめ、すべての弱乱流理論は、線形時間スケール $\tau_L = O(2\pi/\omega)$ と非線形時間スケール、すなわちスペクトル変動の時間スケール、 $\tau_{NL} = O(1/\omega\epsilon^2)$ が十分に分離されており、したがってその間に

$$\tau_L \ll \tau_M \ll \tau_{NL} \quad (24)$$

を満たす中間的時間スケール τ_M が存在することを前提としている。そして、弱乱流理論が与えるモーメントなどの発展方程式は、その導出過程に忠実であろうとするならば、あくまでもこの中間的時間スケール $\tau_M (\gg \tau_L)$ における時間発展を記述するものであるはずである。

しかし、図 14 が示すように、ごく初期の $t = 1T_p$ から $t = 2T_p$ のほんの $1T_p$ 間のスペクトル変動から求めたスペクトル変化率ですら、ほぼ完全に運動論的方程式 (16a) と一致している。またここには示さないが、DNS から得られる $k = 7$ における $p = 2, 3, 4$ 次モーメントの初期 $10T_p$ の時間発展を見ても、 $t = 0$ からほぼ完全に RPA の理論的予測と一致している。この線形時間スケールの短時間発展における弱乱流理論と DNS の一致は、長時間極限 $t \rightarrow \infty$ を含む弱乱流理論式の導出過程からは理解できないものであり、弱乱流理論の成立条件とも関連する重要な問題であると考えられる。理論の対象が通常のスเปクトルであるのに対し、DNS で算出しているのはあくまでも、 k 空間における粗視化操作を含む「経験スペクトル」(empirical spectrum) であるという事実が問題解決の糸口となりそうに感じているが、現時点ではまだ明快な理解には至っていない。

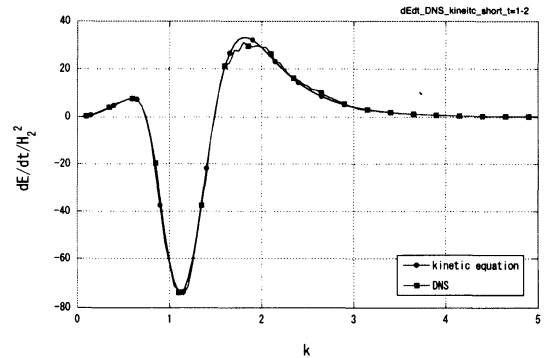


図 14: $t = 1T_p$ と $t = 2T_p$ の間の $1T_p$ 間のスペクトル変化から DNS で求めた $\frac{dE(k)}{dt}$ と運動論的方程式の比較 ($H_2 = 5 \times 10^{-6}$).

謝辞

本稿第 3 章の内容は京都大学の横山直人氏との共同研究によるものである。またここで紹介した数値計算はすべて名古屋大学情報基盤センターの計算機システムを用いて実行した。

参考文献

- [1] Zakharov, V.E., L'vov, V.S. and Falkovich, G., 1992. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*, Springer.

- [2] Phillips, O.M., 1960. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.* 9, 193–217.
- [3] Krasitskii, V.P., 1994. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves, *J. Fluid Mech.* 272, 1–20.
- [4] Kartashova, E., 1998. Wave resonances in systems with discrete spectra, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* 182, 95–129.
- [5] Kartashova, E., 2011. *Nonlinear Resonance Analysis*, Cambridge UP.
- [6] Pushkarev, A.N. and Zakharov, V.E., 1998. Turbulence of capillary waves – theory and numerical simulation, in *Nonlinear ocean waves*, W. Perrie (Ed.), 111–131.
- [7] Pushkarev, A.N., 1999. On the Kolomogorov and frozen turbulence in numerical simuation of capillary waves, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 18, 345–351.
- [8] Nazarenko, S., 2006. Sandpile behaviour in discrete water-wave turbulence, *J. Stat. Mech. Theor. Exp.*, L02002.
- [9] Yokoyama N., 2011. Wave turbulent statistics in non-weak wave turbulence, *Phys. Lett. A* 375, 4280–4287.
- [10] Newell, A.C., Nazarenko, S. and Biven, L., 2001. Wave turbulence and intermittency, *Physica D* 152–153, 520–550.
- [11] Goldreich, P. and Sridhar, S., 1995. Toward a theory of interstellar turbulence. II. Strong Alfvenic turbulence, *The Astrophys. J.* 438, 763–775.
- [12] Nazarenko, S., 2011. *Wave Turbulence* (Lecture Notes in Physics 825, Springer)
- [13] Newell, A.C. and Rumpf, B., 2011. Wave Turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 43, 59–78.
- [14] Lvov, Y.V. and Nazarenko, S., 2004. Noisy spectra, long correlations, and intermittency in wave turbulence, *Phys. Rev. E* 69, 066608.
- [15] Benney, D.J. and Saffman, P.G., 1966. Nonlinear interactions of random waves in a dispersive medium, *Proc. Roy. Soc. A* 289, 301–320.
- [16] Benney, D.J. and Newell, A.C., 1969. Random wave closure, *Stud. Appl. Math.* 48, 29–53.
- [17] Eyink G. L. and Shi, Y.-K., 2012. Kinetic wave turbulence, *Physica D* 241, 1487–1511.
- [18] Choi, Y., Lvov, Y.V., and Nazarenko, S., 2004. Probability densities and preservation of randomness in wave turbulence, *Phys. Lett. A* 332, 230–238.
- [19] Choi, Y., Lvov, Y.V. and Nazarenko, S., 2005. Joint statistics of amplitudes and phases in wave turbulence, *Physica D* 201, 121–149.