数理解析研究所講究録
第 1885 巻 2014 年 148-154

長距離ポテンシャルと長距離相関について 特に $(\Delta-\kappa^2)$ 型と $(\Delta+a^2)$ 型の違い

羽鳥尹承（文科省核融合科学研究所 名誉教授)

長距離ポテンシャルを持つ多体系、イ）中性プラズマ、ロ）stellar system 、ハ）負温度渦点系、ニ）正温度２次元非中性電子プラズマ、をとりあげる。いずれも、運動を記述する方程式とそれに随伴する Poisson 方程式から構成される点で類似している。一方で、長距離の相関関数に関しては、$\Delta-\kappa^2$ 型と $\Delta+a^2$ 型とに分かれることを指摘する。後者では、一様平衡状態の仮定（Jeans swindle）のもとでの線形応答理論では不安定モードの出現があり困難が生ずる。これを解決する方式を提案したい。

以下の目次は、

（１）裸の長距離ポテンシャル（平衡状態）

（２）Poisson equation

（３）Screened potential

（４）プラズマの線形応答

（５）Stellar system の線形応答

（６）負温度渦点系の線形応答

（７）非一様系の長距離相関関数

(1) 裸の長距離ポテンシャル

イ）電子のクーロンポテンシャル

$$-\triangle_3\,\phi = \frac{-e}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}) \tag{1}$$

$$\phi = \frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2}$$

ロ）万有引力ポテンシャル

$$-\triangle_3\,\Phi = -4\pi G m\delta(\vec{r}) \tag{3}$$

$$\Phi = \frac{-Gm}{r} \tag{4}$$

ハ）渦点の流れ関数

$$-\triangle_2\,\psi = \Omega\delta(\vec{r}) \tag{5}$$

$$\psi = \frac{-\Omega}{2\pi}\ln r \tag{6}$$

短距離力の中性分子の流体系が何故に長距離ポテンシャルを持つのか？

ニ）電子ロッドのポテンシャル

$$-\triangle_2\,\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}) \tag{7}$$

$$\phi = \frac{-q}{2\pi}\ln r \tag{8}$$

（2）Poisson equation(平衡状態)

イ）中性電子プラズマ（電子+ion background）

$$-\triangle_3\,\phi = \frac{-en_0}{\varepsilon_0}(e^{\beta e\phi}-1). \tag{9}$$

ロ）Stellar system

$$-\triangle_3\,\Phi = -4\pi G\rho_0 e^{-\beta m\Phi} \tag{10}$$

ハ）負温度渦点系

$$-\triangle_2\,\psi = \omega_0 e^{-\beta\Omega\psi} \tag{11}$$

ニ）正温度２次元非中性電子プラズマ（軸対称）

$$
\begin{aligned}
-\triangle_2\,\phi' &= \frac{-en_0}{\varepsilon_0}(e^{\beta e\phi'}-b), & (12)\\
\phi' &= \phi - b\frac{en_0}{4\varepsilon_0}r^2, & (13)\\
b &= \frac{\omega_r\omega_c-\omega_r^2}{\omega_p^2/2} > 1. & (14)
\end{aligned}
$$

(3)Screened potential

イ）デバイシールド

一様平衡解 $\phi_{eq}=0$ は自明である。外部から１電子を位置 $\vec{r_0}$ に導入し、その線形応答を $\delta\phi$ とすると、

$$
\begin{aligned}
-\triangle_3\,\phi_{eq} &= -\frac{en_0}{\varepsilon_0}(e^{\beta e\phi_{eq}}-1), & (15)\\
-e\rho_{ex} &= -e\delta(\vec{r}-\vec{r_0}), &\\
\phi &= \phi_{eq}+\delta\phi,\ \phi_{eq}=0, &\\
-(\triangle_3-k_D^2)\delta\phi &= -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r_0}), & (16)
\end{aligned}
$$

$$
\delta\phi=\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r}e^{-k_D r} \qquad ,k_D^2=\frac{e^2n_0\beta}{\epsilon_0} \qquad (17)
$$

ロ）万有引力

平衡状態 $\Phi_{eq}(r)$ に対して、外部から１天体を位置 $\vec{r_0}$ に導入し、その線形応答を $\delta\Phi$ とすると、

$$
\begin{aligned}
-\triangle_3\,\Phi_{eq} &= -4\pi G\rho_0 e^{-\beta m\Phi_{eq}}, & (18)\\
-(\triangle_3+k_J^2(r))\delta\Phi &= -4\pi Gm\delta(\vec{r}-\vec{r_0}), & (19)\\
k_J^2(r) &= k_J^2 e^{-\beta m\Phi_{eq}(r)}, & (20)\\
k_J^2 &= 4\pi\beta G\rho_0, & (21)
\end{aligned}
$$

もし一様性 $k_J(r)=k_J$ を仮定すれば、

$$
\delta\Phi = -\frac{Gm}{r}\cos k_J r, \qquad (22)
$$

ハ）負温度渦点系

平衡状態 ψ_{eq} に対して、外部から１渦点を位置 $\vec{r_0}$ に導入し、その線形応答を $\delta\psi$ とすると、

$$
\begin{aligned}
-\triangle_2\,\psi_{eq} &= \omega_0 e^{-\beta\Omega\psi_{eq}}, & (23)\\
-(\triangle_2+a^2(r))\delta\psi &= \Omega\delta(\vec{r}-\vec{r_0}), & (24)\\
a^2(r) &= a^2 e^{-\beta\Omega\psi_{eq}(r)}, a^2=-\beta\Omega\omega_0 & (25)
\end{aligned}
$$

もし一様性 $a(r) = a$ を仮定すれば、

$$\delta\psi = \frac{-\Omega}{4}N_0(ar) \ \sim \ \frac{-\Omega}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi ar}}\cos(ar - \frac{\pi}{4}) \tag{26}$$

ニ）正温度2次元非中性電子プラズマ（軸対称）
平衡状態 ϕ'_{eq} に対して、外部から1電子を位置 $\vec{r_0}$ に導入し、その線形応答を $\delta\phi'$ とすると、

$$\begin{aligned} -\triangle_2\,\phi'_{eq} &= \frac{-en_0}{\varepsilon_0}(e^{\beta e\phi'_{eq}} - b), & (27)\\ -(\triangle_2 - k_D^2(r))\delta\phi' &= \frac{-e}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r_0}), & (28)\\ k_D^2(r) &= k_D^2 e^{\beta e\phi'_{eq}(r)}, k_D^2 = \frac{e^2 n_0\beta}{\varepsilon_0}, & (29)\end{aligned}$$

もし一様性 $k_J(r) = k_J$ を仮定すれば、

$$\delta\phi' = \frac{q}{2\pi}K_0(k_D r) \ \sim \ \frac{q}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2k_D r}}e^{-k_D r} \tag{30}$$

（4）プラズマの線形応答

- プラズマの線形応答
  外的な電子数密度の導入　$\rho_{ex}(\vec{r},t)$、
  そのフーリエ成分 $\rho_{ex}(\vec{k},\omega)$
  プラズマに誘導される電子数密度 $\rho(\vec{r},t)$、
  そのフーリエ成分 $\rho(\vec{k},\omega)$
  線形応答 $\rho(\vec{k},\omega) = (\frac{1}{\varepsilon(\vec{k},\omega)} - 1)\rho_{ex}(\vec{k},\omega)$、ここに $\varepsilon(\vec{k},\omega)$ はよく知られた誘電応答関数。
  特に static な場合、$\rho_{ex}(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$ すなわち $\rho_{ex}(\vec{k}) = 1$

$$\begin{aligned} \rho(\vec{k},0) &= (\frac{1}{\varepsilon(\vec{k},0)} - 1)\\ &= (\frac{1}{1 + \frac{k_D^2}{k^2}} - 1)\\ &= \frac{-k_D^2}{k^2 + k_D^2}, & (31)\\ \rho(\vec{r}) &= \frac{-k_D^2}{4\pi r}e^{-k_D r} & (32)\end{aligned}$$

$\rho(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{e}k_D^2\delta\phi$ に注意すれば前の結果と一致することが分かる。

- 電子数密度 $n(\vec{r},t)$ の相関関数
  時空相関 $C(\vec{r},t) = \frac{1}{n}\langle \delta n(\vec{r}+\vec{r'},t+t')\delta n(\vec{r'},t')\rangle$ と、
  そのフーリエ成分 $S(\vec{k},\omega)$
  空間相関 $C(\vec{r}) = \frac{1}{n}\langle \delta n(\vec{r}+\vec{r'},t)\delta n(\vec{r'},t)\rangle$、
  とそのフーリエ成分 $S(\vec{k})$
  空間相関から自己相関 $\delta(\vec{r})$ を差し引いたものを相関関数 $h(\vec{r})$ と呼ぶ。
  したがって $S(\vec{k}) = \frac{1}{n}\langle |n(\vec{k},t)|^2\rangle = h(\vec{k},t)+1 \geq 0$
  特に平衡では、

$$S(\vec{k},\omega) = \frac{-n}{\pi\omega}\frac{k^2}{k_D^2}\Im\frac{1}{\varepsilon(\vec{k},\omega)}, \tag{33}$$

$$S(\vec{k}) = \frac{1}{n}\int d\omega S(\vec{k},\omega) \tag{34}$$

$$= \frac{k^2}{k_D^2}(1-\Re\frac{1}{\varepsilon(\vec{k},0)}) = \frac{k^2}{k^2+k_D^2} \tag{35}$$

なお、上の計算で Kramers-Kronig の関係を使った。以上線形応答 $\rho(\vec{k})$ と相関関数 $h(\vec{k})$ は同じことが分かる。従って、

$$h(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{e}k_D^2\delta\phi, \tag{36}$$

より、Poisson 方程式の線形応答 $\delta\phi$ が分かれば相関関数 h が求まる。

（５）Stellar system の線形応答

- 流体方程式に基ずく計算（Weinberg の教科書）。
  Vlasov 方程式に基ずく計算 (J. Binney and
  S. Tremaine の教科書)
  プラズマとパラレルに計算できる。無摂動状態が空間一様と仮定すると、

$$\varepsilon(\vec{k},0) = 1-\frac{k_J^2}{k^2}, \tag{37}$$

$$S(\vec{k}) = \frac{k^2}{k^2-k_J^2}, \tag{38}$$

$$h(\vec{k}) = \frac{k_J^2}{k^2-k_J^2} \tag{39}$$

$h(\vec{k})$ の表式からフーリエ逆変換で $\rho(\vec{r})$ に比例した表式（１７）が得られる。

- "Jeans swindle"
  無摂動状態として空間一様な状態を考えたいが現実にはない。すなわち密度一様 $\rho_0 = \text{const.}$、無重力 $\nabla\Phi_0 = 0$ を仮定すると Poisson eq. を満たさなくなる。しかし強引に一様の仮定で固有モードの計算をすると、音波が不安定になる。すなわち、$\omega^2 = (k^2 - k_J^2)v_s^2$ これはプラズマ振動 $\omega^2 = (kv_s)^2 + \omega_p^2$ の対応物である。したがって、$k < k_J$ では音波が不安定になる。

（6）負温度渦点系の線形応答

Fokker-Planck 方程式に基ずいて計算
（P.H. Chavanis (2008)Physica A 8917）、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\omega + \nabla(\vec{u}\omega) &= -\nabla\cdot\vec{\Gamma}, &(40)\\
\vec{u} &= -\hat{z}\times\nabla\psi, &(41)\\
\vec{\Gamma} &= -D\cdot\nabla\omega + \vec{V}\omega &(42)
\end{aligned}$$

- 準平衡の仮定。すなわち $\omega = f(\psi)$，したがって $\nabla(\vec{u}\omega) = 0$
- $\vec{\Gamma}$ の線形化。すなわち、$\vec{\Gamma} = -D_{eq}\nabla\omega + \vec{V}_{eq}\omega$ ここに $\vec{V}_{eq} = -\beta\Omega D_{eq}\nabla\psi_{eq}$（Einstein の関係）
- "swindle"　一様性、$D_{eq} = \text{const.}, \omega_{eq} = \text{const.}$ と $\vec{u}_{eq} = 0$ を仮定。しかし両立はしない（Jeans swindle に対応している）。
- 外的な摂動の導入 $\omega_{ex} = \Omega\delta(\vec{r})$. 誘導された応答 $\omega = \omega_{eq} + \delta\omega$、線形応答の方程式は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\delta\omega - D_{eq}(\triangle + a^2)\delta\omega &= D_{eq}a^2\omega_{ex}, &(43)\\
\frac{\partial}{\partial t}\delta n(\vec{k},t) + D_{eq}(k^2 - a^2)\delta n(\vec{k},t) &= D_{eq}a^2 &(44)
\end{aligned}$$

ここに渦点の数密度の応答 $\delta n = \frac{\delta\omega}{\Omega}$ を定義した。この解は簡単に求まり、

$$\begin{aligned}
\delta n(\vec{k},t) = h(\vec{k},t) &= \delta n_{eq}(1 - e^{-D_{eq}(k^2-a^2)t}), &(45)\\
\delta n_{eq} &= \frac{a^2}{k^2 - a^2} &(46)
\end{aligned}$$

Jeans 不安定性とよく似た長波長の不安定性条件 $k < a = \sqrt{-\beta\Omega\omega_{eq}}$ が得られた。

（７）非一様系の相関関数

ロ)、ハ)、ニ）については平衡状態が空間的に非一様であり中性プラズマのように一様系の線形応答理論を適用して相関関数を求めることができない。Jeans swindle のように無理に Poisson 方程式を満たさない一様解を仮定すると長波長領域で不安定なモードが出現する。
ロ)、ハ)、ニ）の平衡状態の相関関数 $h(\vec{r},\vec{r_0})$ を求めるには（３）節で導入した線形化 Poisson 方程式を直接解く必要がある。。すなわち、

ロ）Stellar system

$$
\begin{aligned}
-(\triangle_3 + k_J^2(r))\delta\Phi &= -4\pi G m \delta(\vec{r}-\vec{r_0}), &(47)\\
h(\vec{r},\vec{r_0}) &= -\frac{k_J^2(r)}{4\pi G m}\delta\Phi(\vec{r},\vec{r_0}). &(48)
\end{aligned}
$$

ハ）負温度渦点系

$$
\begin{aligned}
-(\triangle_2 + a^2(r))\delta\psi &= \Omega\delta(\vec{r}-\vec{r_0}), &(49)\\
h(\vec{r},\vec{r_0}) &= \frac{a^2(r)}{\Omega}\delta\psi(\vec{r},\vec{r_0}). &(50)
\end{aligned}
$$

ニ）正温度非中性電子プラズマ

$$
\begin{aligned}
-(\triangle_2 - k_D^2(r))\delta\phi' &= -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r_0}), &(51)\\
h(\vec{r},\vec{r_0}) &= \frac{\varepsilon_0 k_D^2(r)}{e}\delta\phi'(\vec{r},\vec{r_0}). &(52)
\end{aligned}
$$