数理解析研究所講究録
第 1885 巻 2014 年 1-11

高密度荷電粒子ビームの自己組織化と安定性

広島大学・大学院先端物質科学研究科　　岡本 宏己
Hiromi Okamoto
Graduate School of Advanced Sciences of Matter,
Hiroshima University

1　はじめに

“荷電粒子ビーム”は通常“粒子加速器”によって生成され，現代社会の随所で様々な目的に利用されている。必要なビームの物理的仕様（エネルギー，電流値，密度など）は目的に応じて変わるが，多くの場合，極めて多数の粒子を極めて狭い空間に閉じ込めることが要求される。ビームを構成する粒子は正または負に帯電した同種粒子（電子，陽子，重イオン，反粒子，など）でなければならない。電荷が必要なのは，ビーム運動の制御に電磁相互作用（要するに，磁石や高周波空胴など）を使うからである。また，質量や電荷の異なる粒子が混在していると統一的な軌道制御ができないので，ビームは一般に単一種の荷電粒子で構成されている。生成されたビームは結局，別の対象に照射して使うため，この意味でも単一種の粒子から成っている（換言すれば，不純物を含まない）方が良い。いずれにしても，加速器中では，クーロン斥力によって互いに反発し合っている多数の粒子が電磁ポテンシャルによって無理矢理人為的に束ねられて運動しているわけである。

クーロン力は遠方まで届くため，ビーム構成粒子の運動は独立ではなく，粒子密度が高い場合はむしろ集団的である。この集団運動は様々な要因によって不安定化し得ることが知られている[1]。“航跡場”，“衝突ビーム”，“光電子雲”などは一定の条件下でビームの安定性に深刻な影響を与えるが，これら外的要因の存在を無視したとしても，ビーム単体の集団運動に問題が生じる場合がある。この種の問題は“空間電荷効果”と総称され，古くからビーム物理学における主要な研究テーマのひとつとなっている。当然のことながら，空間電荷効果は位相空間密度の高いビームにおいてより顕著となる。*[1] この小論では，近接分野における多体問題研究との関連性を念頭に，空間電荷効果を取り扱う際の基礎となる理論的枠組みについて簡単に紹介したい。上で触れた外的要素に起因する，加速器力学系に特有の集団不安定性は考慮しない。ビーム力学を専門としない読者を想定し，厳密性を或る程度犠牲にした，空間電荷効果に関する初歩的な解説を試みる。

2　基礎方程式系

ビーム構成粒子はマクロな対象であり，それらの相互作用はもちろん，ビーム全体を閉じ込めている外場も古典電磁気学の範疇にある。よって，個々の粒子（質量 m，電荷 q）の運動は周知の古典的なハミルトニアン

*[1] ただし，エネルギーの極めて高いビームにおいては，たとえ高密度でも，空間電荷効果は実質的に重要でなくなる；一言で言えば，実験室系とビーム重心系との間の相対論的な関係のためである。たとえば，ビーム重心系における物理現象の時間発展は，実験室系から見るとかなり遅い。

$$H_t = c\sqrt{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + m^2c^2} + q\Phi \tag{2.1}$$

に基づいて記述できる。ここで，c は光速，$\mathbf{\Phi}$および $\mathbf{A}$ はそれぞれこの力学系が含む電磁場のスカラーおよびベクトルポテンシャルである。ただし，ビーム力学では一般に，時間 t ではなく，設計運動量をもつ理想的な粒子が設計軌道に沿って走った距離 s を独立変数として採用する。理由は簡単で，時間を独立変数に選ぶと，$\mathbf{\Phi}$や $\mathbf{A}$ をすべての粒子に対して一意に定義することができないからである。*2 式(2.1)において独立変数を s に変換すると，ビーム進行方向自由度の正準共役変数は（時間，エネルギー）となる。

まず，簡単のため，進行方向に一様な“連続ビーム”を考えよう。離散的に配置された電磁石の存在を思い出せば，完全に一様な連続ビームはあり得ないが，進行方向に直交する平面（“横方向”平面）上でのビーム安定性のみに関心がある場合には妥当な近似と言える。このとき，距離 s を独立変数とする二次元ハミルトニアンとして，しばしば以下の近似式が採用されている[2]：

$$H_s = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}[K_x(s)x^2 + K_y(s)y^2] + I\phi_{sc} \tag{2.2}$$

(x, y) は横方向平面上に張られた直交座標，(p_x, p_y) はそれらに共役な運動量で，基準運動量により規格化されている。ϕ_{sc} はクーロン平均場のポテンシャルを表し，空間電荷効果の源となる。I は定数で，ローレンツ因子γの 3 乗に逆比例する。よって，ビームエネルギーが上昇すると，集団的なクーロン相互作用が（実験室系から見て）急速に弱まることが分かる。$K_x(s)$ および$K_y(s)$ はビーム集束用電磁石の空間的配置に依って決まる関数で，多くの場合，独立変数 s に関し周期的である。ビーム力学では，加速器を構成する各種電磁石や高周波空胴の配置パターンのことを“ラティス”と呼んでいる。式(2.2)の他，いわゆる“平滑化近似（smooth approximation）”されたハミルトニアン

$$\bar{H}_s = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(\kappa_x^2 x^2 + \kappa_y^2 y^2) + I\phi_{sc} \tag{2.3}$$

も過去の文献によく登場する。κ_x およびκ_y はいずれも定数である。上式から明らかなように，クーロン相互作用を無視した場合，加速器中を進む各粒子の運動は平滑化近似の下で単純な調和振動となる。

現実には，無限に長く一様な連続ビームは存在しない。いかなるビームも高周波加速を受ける過程で進行方向に集群した状態（業界用語で“バンチ”という）になっている。バンチの形状は千差万別で，楕円体から球体に近いビームがあれば，極めて長いソーセージ状のビームもある。いずれにしても，進行方向に集束力を受けたためバンチになったわけで，その状況を近似的に表現する理論モデルとして，たとえば式(2.2)を単純に拡張した

---

*2 加速器は多重極電磁石や高周波空胴などから構成されているが，これらの配置は“空間的”には確定しているものの，“時間的”には粒子毎に異なって見える。たとえば，個々の粒子の運動量にはばらつきがあるため，ひとつの加速器構成要素から次の構成要素まで移動するのに要する時間はまちまちである。特定の粒子 1 個に着目した場合でも，加速を受けてエネルギーが変われば，一定距離を移動するのに必要な時間は当然変化する。一方，各構成要素の位置が固定されている限り，それらが創るポテンシャルの空間的分布は粒子に依らず一意に定義できる。

$$H = H_s + \frac{1}{2}[p_z^2 + K_z(s)z^2] \tag{2.4}$$

を考えることができる。加速器中を進む単粒子の運動は，最も粗い近似では，3つの独立な擬調和振動子の重ね合わせとして表現可能ということである。平滑化近似を施すなら，上式の関数$K_z(s)$を定数κ_z^2に置き換えればよい。尚，一般に，κ_zは$\kappa_{x(y)}$に比べてかなり小さい値をとる。厳密には，高周波電場による進行方向の集束力は非線形で，式(2.4)で導入した線形ポテンシャルほど単純ではない。加えて，円形加速器には偏向電磁石（双極磁場）が点在するため，軌道の局所曲率半径が個々の粒子の運動量に依存してしまう。式(2.1)のハミルトニアンにおいて，ビーム集束用四重極磁場だけでなく，ビーム偏向用双極磁場のベクトルポテンシャルも考慮すると，式(2.4)には新たに座標xと運動量p_zの積に比例する項が付加されることになる。この結合項はいわゆる“運動量分散”を生む。このように，実際の加速器力学系は上掲のモデルよりも複雑ではあるが，高密度ビームの基礎物性研究において，多少簡単化された式(2.2)あるいは(2.4)を理論上の出発点とすることに何ら問題は無い。

さて，クーロン平均場のスカラーポテンシャルϕ_{sc}は粒子分布によって決まるが，当然のことながら，粒子分布自体が時々刻々変化している。人為的な外場のポテンシャルが独立変数に依存しているため，定常状態においてすら，粒子分布はビームの軌道に沿って完全に一様とはならない。要するに，ϕ_{sc}の関数形を独立に決定して，前頁のハミルトニアンに代入することは許されないわけである。ポテンシャルϕ_{sc}はポアソン方程式

$$\nabla^2\phi_{sc} = -\frac{q}{\varepsilon_0}n \tag{2.5}$$

を満足する。ε_0は真空の誘電率，nは実空間上での荷電粒子数密度を表す。この密度関数nは，位相空間における分布関数fを運動量変数で積分することにより得られる。たとえば，二次元問題の場合，

$$n(x,y;s) = \iint f(x,y,p_x,p_y;s)\,dp_x\,dp_y \tag{2.6}$$

である。個別粒子間のクーロン散乱が無視できる場合，位相空間分布関数fは近似的に次の方程式を満たす：

$$\frac{\partial f}{\partial s} + [f, H_s] = 0 \tag{2.7}$$

左辺第二項の[,]はポアソンの括弧式である。式(2.7)はブラソフ（Vlasov）方程式，あるいは無衝突ボルツマン方程式と呼ばれている。この偏微分方程式はハミルトニアンH_sのみに依存しているが，H_sはスカラー関数ϕ_{sc}を含んでいるため，ポアソン方程式(2.5)を解かなければ決定できない。ところが，式(2.5)は式(2.6)を通じて位相空間分布関数fに依存している。という訳で，ビームの集団運動を自己無撞着に解析したければ，ブラソフ方程式(2.7)をポアソン方程式(2.5)およびハミルトン関数と連立して一遍に解く必要がある。

高密度ビームの集団的振る舞いは主として多粒子シミュレーションにより解析されている。いわゆるPIC（Particle In Cell）法に基づく数値計算が主流で，可能な限り多くのマクロ粒子をばらまき，その運動を計算機上で追跡することが多い。運動方程式が含むクーロン相互作用の項は，たとえば，マクロ粒子の実空間分布から密度関数

n を評価してポアソン方程式を数値的に解くことにより求める。数値積分の各ステップで密度関数 n を計算しなければならないため，非常に時間がかかる。マクロ粒子の数を減らせばその分早く結果を出せるが，計算の精度は当然悪くなる。昨今はコンピュータの性能が上がったので，一昔前に比べて，多粒子シミュレーションの信頼性は格段に向上している。尚，多粒子シミュレーションを行う作業とブラソフ・ポアソン方程式系を解く作業は，結局のところ等価である。最近では，ブラソフ・ポアソン方程式系を直接数値積分するコードも開発されているようである。

3　定常状態とその安定性

任意の初期分布関数から出発して，前章のブラソフ・ポアソン方程式系を（コンピュータを使った数値計算ではなく）解析的に解くことができれば，少なくとも空間電荷効果に関する限り何でも即座に予言できるようになる。大強度ハドロン加速器や先進的なビーム冷却蓄積リングなどの基本設計あるいは性能向上に要する手間を劇的に省くことが可能になるだろう。後述するように，プラズマ物理学の領域でも同様の基礎方程式を取り扱うので，汎用性の高い解析解が当該分野にもたらす恩恵は極めて大きいはずである。しかしながら，現実問題として，ハミルトニアンが式(2.2)なり(2.4)なりで与えられている時，ブラソフ方程式とポアソン方程式を紙と鉛筆だけで厳密に解くのはおそらく不可能である。近似的に解くことすら非常に難しいため，結局，数値計算に訴えることになる。とくに，加速器研究者はユーザーに所定のビームを提供する使命を負っているため，最終的には，現実の複雑なマシーンの構造を可能な限り正確に反映した計算を行う必要に迫られる。このため，(数学的なモデル計算よりも)高性能の大型計算機を駆使した，系統的な多粒子シミュレーションが主流とならざるを得ない。

とは言え，空間電荷効果に関する純数学解析的な理論研究が軽視されているわけでは勿論無い。ブラソフ方程式に基づいた，高密度ビームの安定性に関する解析的理論は 1960 年代頃から見られるようになり，Sacherer[3]や Gluckstern[4]の仕事はその後の文献でしばしば引用されている。これらを含む多くの理論では，ラティス構造を平滑化した近似的ハミルトニアンが仮定されている。加速器のラティス構造を陽にとり入れることが可能なブラソフ理論は少なく，筆者の知る限り，二次元連続ビームに対しては文献[5]，一次元シートビームに対しては文献[6]ぐらいである。平滑化近似の入っていない三次元ブラソフ理論に至っては見たことがない。その大きな理由のひとつは，まず“定常状態の構築”の難しさにある。ビームの集団運動を取り扱う多くの理論は，或る種の定常状態を仮定し，それに摂動を加えて定常状態の時間発展を追う。所定の条件下でビームが安定な場合，定常状態の周りで微小振動が続くだけだが，不安定な場合，集団振動の振幅が増大する。ラティス構造を陽に考慮すると，摂動の時間発展を調べる以前に，定常状態を定義する段階で困難に遭遇してしまう。当然，その後の摂動解析の難度も，ラティスが入ると相当に高くなる。

定常状態の分布関数 f_0 もブラソフ方程式とポアソン方程式を同時に満たすが，一般の分布関数とは異なり，外場と同一の周期性を有している。ビーム集束のためのラティス構造が周期長 L をもつ場合，すなわち $K_{x(y)}(s)=K_{x(y)}(s+L)$ が成り立つとき，f_0 も独立変数 s に関して周期 L で変動する。これは物理的に自明である。このような状態

にあるビームのことを“ラティスに整合したビーム（matched beam）”と呼ぶ。加速器に入射されるビームは，理想的には，その加速器固有のラティスに整合していなければならない。しかしながら，現実のビームがもつ粒子分布は多かれ少なかれ理想的な定常状態からズレている。このズレが増幅しない条件を見極めることは，質の高いビームの安定供給を実現する上で極めて重要な課題である。

ブラソフ方程式(2.7)が $df/ds=0$ とも表せることから，いま想定している力学系が含む“運動の定数”の任意関数は自動的にこの方程式の解となることが分かる。平滑化された系(2.3)が過去の理論的研究でしばしば登場する理由は，定常状態においてハミルトニアンそのものが運動の定数になるからである。力学系(2.3)では外場が時間的に変化しないため，定常粒子分布は完全に静的である；クーロンポテンシャル ϕ_{sc} から独立変数 s に対する依存性が消える。このとき $d\bar{H}_s/ds=0$ で，$\bar{H}_s$ の任意関数 $f_0(\bar{H}_s)$ を定常分布関数として採用できる。f_0 の関数形はその後の数学的な解析の便宜を勘案して選択されることが多いが，言うまでもなく，実際のビームにできる限り近いモデルを考えるべきであろう。たとえば，指数関数モデル $f_0 \propto \exp(-\bar{H}_s/T)$（$T$ は正の定数）などは妥当な選択と言える。ちなみに，「f_0 が $\bar{H}_s$ の単調減少関数である場合，すなわち $df_0(\bar{H}_s)/d\bar{H}_s \le 0$ ならば，その分布関数は安定である」という定理が知られている[7,8]。これが確かなら，「現実的な定常分布関数から出発する限り，ビームの安定性は保証済み」ということになるわけで，平滑化近似に基づく空間電荷効果の摂動解析にはほとんど意味が無くなってしまう。だが，実際のビームはラティスに依存した周期的な駆動力を受けるため，一定の条件下で必ず不安定化する。現代加速器において，共鳴的な集団不安定性は不可避である。この点を考慮するため，平滑化近似に基づくビーム安定性解析では，後から周期的摂動を導入するなどして強引に共鳴条件を引き出している。通常の加速器はすべて，既知の共鳴不安定帯から十分離れた位置に動作点を固定して，運転されている。*3

平滑化されていない本来の力学系(2.2)に対するブラソフ・ポアソン方程式系の厳密な定常解は現在ひとつだけ知られており，発見者に因んで“Kapchinshy-Vladimirsky（KV）分布”と呼ばれている[9]。ふたりはクーロンポテンシャル ϕ_{sc} が（外部集束力のポテンシャル同様）座標の二次関数になる場合を考えた：

$$\phi_{sc}=\frac{1}{2}[Q_x(s)x^2+Q_y(s)y^2] \tag{3.1}$$

関数 $Q_{x(y)}(s)$ はラティス関数 $K_{x(y)}(s)$ と同じ周期性をもつ。これを式(2.2)に代入すると，$\tilde{K}_{x(y)}(s)\equiv K_{x(y)}(s)+IQ_{x(y)}(s)$ として

$$H_s=\frac{1}{2}[p_x^2+\tilde{K}_x(s)x^2]+\frac{1}{2}[p_y^2+\tilde{K}_y(s)y^2] \tag{3.2}$$

を得る。x 自由度と y 自由度が分離し，見かけ上，元の力学系(2.2)において単にクーロンポテンシャルを省略した形になっている。ハミルトニアン(3.2)に従う粒子運動では“作用（action）”が保存する。たとえば，x 自由度における作用は

---

*3 一部の加速器では，ビームを加速あるいは蓄積している最中に実効的な動作点が大きく動く。「共鳴不安定領域に遭遇あるいは横断した場合，ビーム状態がいかなる悪影響を受けるか」という問題は最近とくに研究者の興味を引いている。

$$J_x = \beta_x(s)p_x^2 + 2\alpha_x(s)xp_x + \gamma_x(s)x^2 \tag{3.3}$$

と書けるが，このJ_xは運動の定数であることが証明できる[10]；つまり，$dJ_x / ds = 0$である。関数$\beta_x(s)$は

$$\frac{d^2\sqrt{\beta_x}}{ds^2} + K_x(s)\sqrt{\beta_x} - \frac{1}{(\sqrt{\beta_x})^3} = 0 \tag{3.4}$$

を満足し，ビーム力学ではベータトロン関数と呼ばれている。また，$\alpha_x = -(d\beta_x / ds)/2$および$\gamma_x = (1+\alpha_x^2)/\beta_x$が成り立つ。無論，$y$自由度についても全く同様である。式(3.3)は座標と運動量の二次形式であり，x自由度の位相平面上で楕円を描く。J_xはこの楕円の面積に対応し，ビームの“エミッタンス（正確には，射影エミッタンス）”と呼ばれている。エミッタンスはビーム力学において最も重要なパラメータのひとつで，ビームの“質”を決定する。エミッタンスの小さいビームほど質が高く，同じ集束力でより細く絞ることができる。

さて，x自由度の作用J_xとy自由度の作用J_yが共に運動の定数となることから，これらの任意関数はブラソフ方程式を満たす。ただし，自己無撞着な解であるためには，ポアソン方程式(2.5)を解いて得られるポテンシャルが式(3.1)の形に帰着しなければならない。Kapchinsky と Vladimirsky はf_0として

$$f_0(J_x, J_y) \propto \delta\left(\frac{J_x}{\varepsilon_x} + \frac{J_y}{\varepsilon_y} - 1\right) \tag{3.5}$$

を選べば，クーロンポテンシャルが式(3.1)のような二次関数となることを示した。ここで，$\delta(z)$はDirac のデルタ関数，ε_xおよびε_yはそれぞれxおよびy自由度の射影エミッタンスを規定する定数である。この分布関数を式(2.6)に代入すると，実空間上で完全に一様な粒子数密度が得られる。

線形力によって閉じ込められたビームは，密度が高くなるにつれて，実空間上でより均一な分布に近づく。プラズマ物理における“デバイ遮蔽”と同じ効果である。ただし，KV 分布のポテンシャルは密度に関係なく常に線形（空間座標の二次関数）で，現実的な高密度ビームの均一化現象とは別物である。また，その特殊な関数形からも予想されるように，KV 分布には KV 分布特有の不安定性がある。加えて，ポテンシャルが完全に線形であるため，KV 分布を形作る個々の粒子はすべて同じ周波数で振動する。これに対し，現実的な高密度ビームのクーロンポテンシャルは非線形なので個々の粒子の振動数は振幅に依存し，その場合，高次の弱い共鳴は“ランダウ減衰”すると期待される。

人為的な線形集束力の下で高密度ビームの空間分布がより均一な方向へ向かうのは，或る種の自己組織化であると言ってよい。この意味で，“ラティスに整合したビーム”は自己組織化が完了した状態にある。完璧な整合ビームを加速器に入射するのが理想であるが，現実には必ず有限のズレがあり，ここまで述べてきた通り，このズレが共鳴的に増幅されることのない領域にパラメータを設定することが肝要である。これに関連して，次のような問題を提起することができる：入射ビームの分布と理想的な整合分布とのズレが非常に大きい場合，何が起こるか？実際の加速器実験で，このような状況は十分生じ得る。この問題の解析には摂動論が使えないので，非常に厄介である。PIC コードを用いた多粒子シミュレーションによれば，粒子群が理想的な

定常分布（ラティスに整合した状態）の周りで大きく集団振動し，その過程でいわゆる“ビームハロー”が成長する。ハローとは「大多数の粒子が集まったビーム核の周りに広がる，低密度の粒子雲」を指す。ハローの空間的なサイズは当然，整合ビームのサイズよりも大きいため，大強度加速器において深刻な問題を引き起こす可能性がある。具体的には，ハロー部が真空容器の壁と接触してしまうかもしれない。元々のビーム強度が極めて大きい場合，核に比べて低密度のハロー部分ですら無視できないエネルギー出力をもつ。したがって，ハローが周囲の壁と接触し，至る所でビームロスが発生すれば，加速器全体が放射化してしまう恐れがある。このように，「非定常分布関数がブラソフ方程式の下でいかなる時間発展を示すか」という問題は，現実の加速器設計に直接関連する，ビーム力学上重要度の高いテーマのひとつとなっている。

4　類似の多体力学系

4.1　非中性プラズマ

長距離力に支配された，おそらく荷電粒子ビーム以上に馴染みの深い多体系のひとつに“プラズマ”がある。プラズマも基本的にビームと同じクーロン多体系であり，両者の類似性は直感的に明らかと言える。伝統的な定義によれば，プラズマは陽イオンと電子から成る一種の電離気体であって，全体として電気的に中性な状態を維持している。正負両方に帯電した粒子を同時に含むという点で，ビームとはかなり異なって見えるが，その運動論的基礎はやはりブラソフ方程式（およびマックスウェル方程式）である。オーソドックスな中性プラズマの物理は，熱核融合炉，太陽や星間ガス，ダスト，半導体などの研究に幅広く応用されているようであるが，ここでは電気的に非中性なプラズマを取り上げる。とりわけ，単一種の荷電粒子によって構成される非中性プラズマはビームと酷似していることが容易に理解できる。非中性プラズマを安定的に維持するには，当然何らかの外力が要る。例によって，磁場あるいは電場を使って荷電粒子群を閉じ込めるわけだが，たとえば高周波四重極電場を利用した場合，軸に垂直な平面上での粒子運動を支配するハミルトニアンは

$$H_P = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}K_{\mathrm{RF}}(t)(x^2 - y^2) + I_P\phi_{sc} \tag{4.1}$$

となる。ここで，I_P は定数，$K_{\mathrm{RF}}(t)$ は電極に印加した高周波電圧の振幅に比例する周期関数である。この種のシステムは，主に重イオンを捕獲・蓄積する目的のため世界中で利用されている[11]。クーロンポテンシャル ϕ_{sc} はポアソン方程式(2.5)を満たし，位相空間粒子分布関数 f は通常，良い近似でブラソフ方程式(2.7)に従う。このように，自己場のポテンシャルまで含めて，ビーム力学系(2.2)と非中性プラズマ力学系(4.1)は非常に似通っている。*4 この事実は，非中性プラズマの研究を通じて得られる多くの知見が加速器物理の基礎研究に直接役立つ可能性を強く示唆している[12]。実際，既に広島大学と米国のプリンストン大学で，小型トラップシステム中のイオンプラズマをビームダイナミクスの基礎問題に応用する実験的研究が進められている。とくに，広島大学は，高周波イオントラップだけでなく，磁気トラップ中の純電子プラズマを使った空間電荷効果の基礎研究も並行して展開している。非中性プラズマを先進加速

---

*4 いわゆる線形ビーム輸送系を考えた場合，式(2.2)と式(4.1)は完全に一致する。

器の研究に広く応用することができれば，非常に大きなメリットがある。プラズマトラップ装置は，言うまでもなく，加速器に比べ遙かにコンパクトで遙かに安価である。基本パラメータの調整範囲も広く，またプラズマの重心は実験室系で静止しているため観測が容易である。加速器中のビームとは異なり，プラズマが実験中に不安定化して雲散霧消したとしても何ら危険はない。学術的にも，プラズマ物理のように伝統ある分野とビーム物理のような新興分野が直接的な接点をもつことは，双方にとって少なからぬ意義があるはずである。

4.2　自己重力多体系

ふたつの質点間に働く重力相互作用が荷電粒子間のクーロン相互作用と同形の中心力であることは誰でも知っている。引力と斥力の差はあるが，数学的には，いずれのポテンシャル関数もポアソン方程式を満足する。銀河を構成する星々を質点と見なした場合，その分布の時間発展は近似的にブラソフ方程式に従うことがわかっている[13]。この“自己重力多体系”に対するハミルトニアンであるが，宇宙には外力が存在しないので，ビームやプラズマが置かれている状況に比べ単純である。重力相互作用する個々の質点の運動を支配するハミルトニアンは，I_Gを定数として，

$$H_G = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + I_G \phi_G \tag{4.2}$$

で与えられる。上式はビームやプラズマに対するハミルトニアンを最も簡単化したケース，つまり時間依存性をもつ外場のポテンシャルを完全に無視した，非常に特殊な場合に対応している。したがって理想的には，クーロン多体系に関するブラソフ・ポアソン方程式系の数学的取り扱いが確立されていれば，その手法はおそらく自己重力多体系の理論的研究においても威力を発揮するはずである。とくに，特定の構造をもつ銀河の安定性解析には摂動論的手法がしばしば用いられているので[13]，ビームやプラズマの安定性研究との共通点は多いと思われる。

銀河は，渦巻き型や楕円体，不規則型など，外見上様々な構造をもつが，それぞれの構造に対応する定常分布関数が数学的に発見されているわけではない。また，これらの銀河構造は依然として完全には自己組織化されておらず，最終的な定常状態へ向かう過渡期にある可能性は十分に考えられる。*5 たとえば，渦巻き銀河は宇宙年齢の間に数十回ほど回転している計算になるらしいが，“数十周期”というタイムスケールはビームやプラズマの観点からするといかにも短い。問題の対称性からすると，球形の分布は自己重力多体系の自明な自己組織化状態である。一方で，実際に観測されている分布が上記のように多様なのは，初期条件や成長プロセスの差に起因している可能性が高い。個別質点間の衝突が無視できる場合，非一様・非等方的分布から出発すれば，終状態が球対称性をもつ必要は必ずしも無い。初期的に強い非整合性を有するビームがハローを伴うのと同じである。宇宙の大域構造（無数の銀河の分布関数）の時間発展を追うのも，詰まるところ，似通った問題と言えるかもしれない。この場

---

*5 現在観測可能な銀河の数が一千億個を超えることを考えれば，典型的な銀河構造が比較的少数のタイプに分類できるという事実は意味深い。銀河年齢に数億から数十億年の差がある場合でも，それぞれのタイプ毎に明らかな構造上の共通点が見られる。これは，銀河構造が（仮に完全な定常状態にはまだ到達していないとしても）何らかの準定常状態にある可能性を示唆している。

合，たとえば，理論的に予想される揺らぎを含んだ，ほぼ一様な初期分布を仮定することが考えられる。いずれにしても，式(4.2)のように自己ポテンシャルのみしか含まない力学系が，いかなる初期条件の差から，いかなる集団運動の過程を経て，現在観測されている様々な銀河形状あるいは宇宙の大域構造に至ったのか・・・非常に興味深い問題である。

5　まとめ

加速器中を走る荷電粒子ビーム，トラップシステム中に閉じ込められた非中性プラズマ，重力相互作用する質点の集合，これら三つの多体力学系が示す集団運動はいずれも同一の数学的枠組みに基づいて記述することができる。その数学的基礎は二つの偏微分方程式に集約される：位相空間における荷電粒子群あるいは質点群の分布を決定するブラソフ方程式

$$\frac{\partial f}{\partial s} + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla (U_{\mathrm{ext}} + \phi) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{5.1}$$

および自己場のポテンシャル関数ϕが従うポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = -\mu \int f \, d^3\mathbf{r} \tag{5.2}$$

である。式(5.1)中の関数$U_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r},s)$は人為的な外場のポテンシャルを表し，加速器や非中性プラズマトラップでは一般に

$$U_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}[K_x(s)x^2 + K_y(s)y^2 + K_z(s)z^2] + \delta U(\mathbf{r},s) \tag{5.3}$$

と書ける。$\delta U(\mathbf{r},s)$は非線形外力のポテンシャルで，当面は無視しても構わない。*6 U_{ext}として，平滑化近似された

$$\bar{U}_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}(\kappa_x^2 x^2 + \kappa_y^2 y^2 + \kappa_z^2 z^2) \tag{5.4}$$

を用いることもある。自己重力多体系を考える場合には，単に$U_{\mathrm{ext}} = 0$とすればよい。また，式(5.2)の定数μはクーロン多体系では正の値をとり，自己重力多体系では負となる。

荷電粒子ビームにおける空間電荷効果の理論的研究に際して頻繁に採用されてきた手法は，いわゆる線形ブラソフ解析（摂動論的解析）である。すなわち，ブラソフ・ポアソン方程式(5.1)および(5.2)の定常解を求め，それに摂動を加えて，微小振動の安定性を調べるのである。過去の理論モデルでは，定常状態の構築が容易な調和ポテンシャル(5.4)がしばしば仮定されている。周期的ラティス構造の影響をとり入れるため，式(5.3)を仮定した場合，（非線形項δUを無視したとしても）定常状態の構築は極めて困難となる。現在知られている唯一の厳密な定常解は，二次元連続ビームに対するKV 分布関数(3.5)である。KV 分布が生むクーロン斥力は完全に線形で，ビーム集束力が線形であるという事実に或る意味で呼応している。バンチ状のビームに対して，同様の定常状態が定義可能かどうかについては今のところ不明である。ただし，現実

*6 荷電粒子閉じ込めのための外部ポテンシャルは完璧に線形ではなく，磁石や電極の製造・設置上の誤差が必ずあるため，厳密には弱い非線形項を含んでいる。加速器の場合，ビームの軌道補正を行う必要上，意識的に非線形力を導入することもよくある。

のビームがKV型のように特殊な位相空間分布をもつことはない。

外場が周期的に変動する場合，一定の条件下でビームの安定性は必ず共鳴的に損なわれる。共鳴条件は，大雑把には，定常分布の詳細にほとんど依らないと予想されるが，不安定領域の幅は影響を受けるだろう。また普通，高次の共鳴不安定性はランダウ減衰するため，事実上無視できるはずである（$\delta U \neq 0$の場合はその限りではない）。ビーム力学では，設計通りの理想的なラティスにおいて不可避的に生じる共鳴を“構造共鳴（structure resonance)”，磁場誤差等の後発的な要因によって生じる共鳴を“非構造共鳴（non-structure resonance)”と呼んで区別する。要するに，非構造共鳴は人間が作る装置の不完全さが原因で起こる。

独立変数依存性をもつ外力の下でブラソフ・ポアソン方程式の厳密な定常解を求めるのは非常に難しいが，たとえば，定常解の存在自体が保証されているかどうかについて問うことはできるだろう。二次元問題の場合にKV分布以外の完璧な定常解が存在し得るのか，三次元問題の場合はどうか？万が一，新しい非線形定常解の表式が見つかれば，ビーム力学研究上，非常に有り難い（KV分布以降，過去50年以上にわたり発見されていないが...)。少なくとも多粒子シミュレーションでは，計算機上に定常状態らしきものは構築できる。現実のビームも（加速器の動作点を適切に選んでおけば）長時間安定に走り続けるので，定常あるいは準定常な非線形分布関数は存在するはずである。また，定常状態の構築とは切り離して（つまり非摂動論的に），周期的外部駆動力による集団共鳴不安定性の発生条件を導くことは数学的に可能か？そのような手法がもしあれば，是非クーロン多体系の研究に応用してみたい。

「ブラソフ・ポアソン方程式の定常解から大きく外れた分布関数が時間的にどのように発展するか」という問題は，とくに昨今の大強度加速器等の設計研究において一定の重要性をもつ。ズレが大きい場合，調和振動子モデル(5.4)をとったとしても（換言すれば，共鳴不安定性が存在しない状況下でも），初期のビーム形状が酷く歪んでしまうことになる。大多数の粒子は中心軸付近に比較的平坦なビーム核を形成するが，一部の粒子は核の周りにハローとして分布する。この種の問題をブラソフ方程式に基づいて数学的に記述するのは，共鳴問題を摂動論的に取り扱うことよりもずっと難しい。同じ意味で，宇宙の大域構造や単一銀河の形成過程を特定の初期条件から追うことには，外場が存在しない極めて単純な状況であるとは言え，かなりの困難が伴う。結局いずれの問題も，多粒子シミュレーションコードを駆使して数値的に研究されることが多い。

ハロー生成の具体的メカニズムはよくわかっていない。ビーム核が大きく振動するのだから，そこから一部の粒子がしみ出てきたとしても驚くにはあたらない...ということだろう。振動するビーム核の外に既にハロー粒子が存在する場合，それらの振幅（ハローの空間的広がり）を評価する非常に簡単なモデルはある。しかしながら，ビーム核のどの部分から，どのような物理的メカニズムでハロー粒子が漏れ出てきたのかを説明する理論は（筆者の知る限り）今のところない。高密度ビームの自己ポテンシャルは非線形なので，位相空間分布の境界付近で粒子運動がカオス的になっている可能性が指摘されている。ちなみに，共鳴不安定化したビームなどでも，不整合駆動のハローと見かけ上似通った低密度のテールが成長する場合がある。これらは，典型的な自己重力多体問題と理論形式上共通点の多い，初期的に非定常なクーロン多体系の自己組織化過程に関する問題である。

参考文献

[1] A.W. Chao and M. Tigner (Ed.), *Handbook of Accelerator Physics and Engineering*, World Scientific, Singapore, 1999, ISBN 981-02-3500-3.

[2] M. Reiser, *Theory and Design of Charged Particle Beams*, John Wiley & Sons, INC., 1994, ISBN 0-471-30616-9, and references therein.

[3] F.J. Sacherer, Ph.D. Thesis, UCRL 18454, 1968.

[4] R.L. Gluckstern, Proceedings of the Linac Conference, Fermilab, Batavia, IL, 1970, p. 811.

[5] I. Hofmann, L. J. Laslett, L. Smith and H. Haber, Part. Accel. **13** (1983) 145.

[6] H. Okamoto and K. Yokoya, Nucl. Instrum. Meth. A **482** (2002) 51.

[7] W. Newcomb, as reported by I. B. Bernstein, Phys. Rev. **109** (1958) 10.

[8] C.S. Gardner, Physics Fluids **6** (1963) 839.

[9] I.M. Kapchinsky and V.V. Vladimirsky, Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators, CERN, Geneva, 1959, p. 274.

[10] E.D. Courant and H.S. Snyder, Ann. Phys. **3** (1958) 1.

[11] P.K. Ghosh, *Ion Traps*, Oxford Science, Oxford 1995, ISBN 0-19-853995-9.

[12] H. Okamoto and H. Tanaka, Nucl. Instrum. Meth. A **437** (1999) 178.

[13] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton Series in Astrophysics, Princeton University Press, 1987, ISBN 0-691-08444-0.