

# 孤立波の解の特異性と長波近似

公立はこだて未来大学・システム情報科学部 村重 淳 (Sunao Murashige)

School of Systems Information Science, Future University Hakodate

## 概要

本研究では、一方向に一定速度で波形を変えずに進む孤立波の近似解について考える。特に、標準的な近似法である長波近似を用いない方法として Packham の方法 [7] に注目し、その応用を考える。孤立波の解は裾野において指数関数的に減衰するが、この性質は複素平面上の解の特異性としてとらえることができる。Packham のアイデアは、この特異性が正則化されるような新しい複素平面を導入することである。本研究では、この複素平面における直交多項式展開を用いると、最良多項式近似を与える新しい孤立波の解の表現が得られることを示す。また、Packham の近似解は従来の長波近似より精度がよいことを、数値例を用いて示す。

## 1 はじめに

水深  $h$  が一定の水路上を一定速度  $c$  で波形を変えずに進む孤立波の運動は、波の進行方向に沿った鉛直断面で 2 次元である。この運動の近似として、水平方向の運動の変化は緩やかであるという仮定に基づく長波近似が有効であることがよく知られている。長波近似により、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式に代表される近似方程式がいくつか導かれている。それに対して、Packham [7] が示した近似解は、長波近似を用いていないが比較的精度がよいという特徴がある。本研究の目的は、Packham の近似のアイデアを整理し、それに基づいた新しい近似解の表現を提案することである。

## 2 定式化と孤立波解の特徴

### 2.1 複素対数速度 $\omega$ を用いた定式化

Fig.1(a) のように、左方向に一定速度  $c$  で波形を変えずに進む孤立波の運動を、波とともに動く鉛直断面内の座標系  $((x, y)$  平面) で考える。流体は非粘性・非圧縮、流体の運動は 2 次元・渦無しであると仮定する。このとき、 $(x, y)$  平面における流体の 2 次元・定常・渦無し運動は、次式で定義される複素対数速度  $\omega$  を用いて表すことができる。

$$\omega = \tau + i\theta = \log \frac{c}{w} = \log \frac{c}{df/dz} \quad (1)$$

ここで,  $w = u - iv = qe^{-i\theta} = df/dz$  は複素速度,  $f = \phi + i\psi$  は複素速度ポテンシャル,  $z = x + iy$ ,  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\tau = \log(c/q)$ ,  $\theta = \arctan(v/u)$  である.

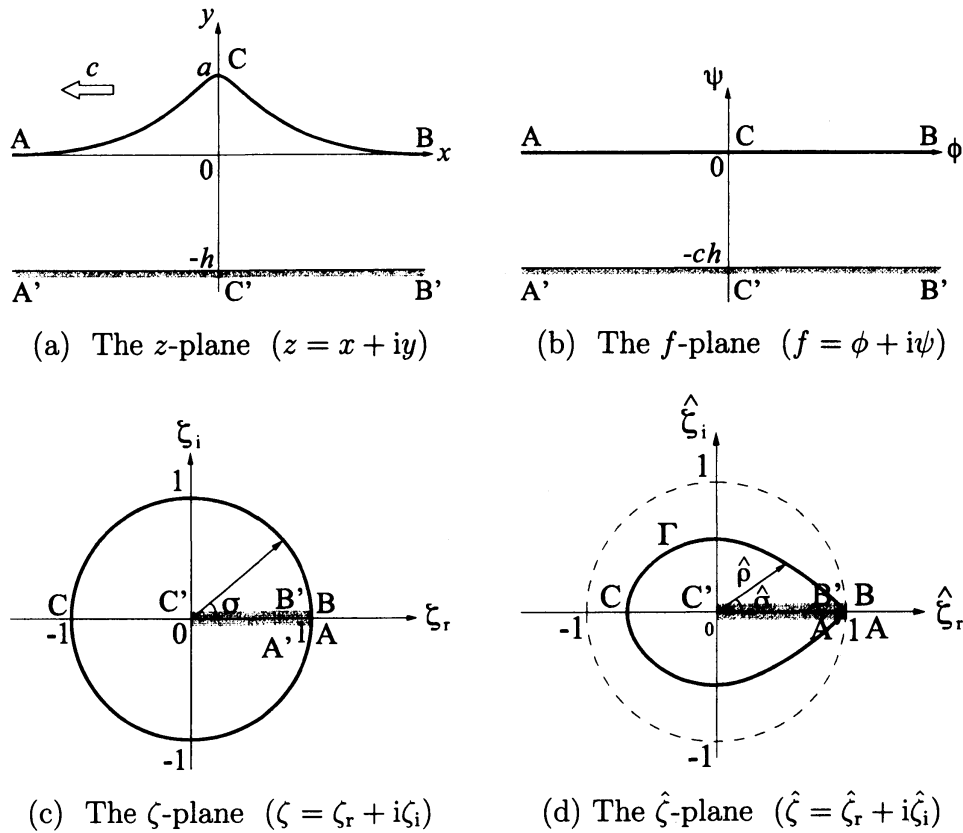


Fig.1 Conformal mapping of the flow domain of a solitary wave progressing in permanent form.  $c$  : wave speed,  $h$  : water depth and  $\Gamma : \hat{\zeta} = \hat{\rho}e^{i\hat{\theta}}$ .

(1) で定義される複素対数速度  $\omega$  は流場で正則である. 水面と水底の境界条件をみたく正則な複素関数  $\omega$  を求めるためには, 流場を Fig.1(b) のような複素速度ポテンシャル  $f$  平面に写すと便利である.  $f$  平面では, 水面は  $\psi = 0$ , 水底は  $\psi = -ch$ , 流場は  $-ch < \psi < 0$  に写される ( $-\infty < \phi < \infty$ ). このとき,  $\omega = \tau + i\theta$  に対する水面 ( $\psi = 0$ ), 水底 ( $\psi = -ch$ ), 波の山の下 ( $\phi = 0$ ), 無限遠 ( $\phi \rightarrow \infty$ ) の条件はそれぞれ次のように与えられる.

$$ch \frac{\partial \tau}{\partial \phi} - \frac{1}{F^2} e^{3\tau} \sin \theta = 0 \quad \text{on } \psi = 0 \quad (2)$$

$$\theta = 0 \quad \text{on } \psi = -ch \quad (3)$$

$$\theta = 0 \quad \text{on } \phi = 0 \quad (4)$$

$$\omega = \tau + i\theta \rightarrow 0 \quad \text{as } \phi \rightarrow \infty \quad (5)$$

(2)に含まれる  $F = c/\sqrt{gh}$  は Froude 数を表す ( $g$  は重力加速度). (2) のように表される水面の境界条件は Levi-Civita の条件とよばれることがある [4, §14.65]. (4) は解の対称性に対応する. 本研究で考える孤立波解は, 条件 (2) (3) (4) (5) をみたす正則な複素関数  $\omega$  である.

## 2.2 裾野における孤立波解の特徴

孤立波解は裾野 ( $|x| \gg 1$  or  $|\phi| \gg 1$ ) において指数関数的に減衰することが知られている. この性質は, 孤立波解の近似を考えるときポイントとなるので, この節で整理しておく.

複素対数速度  $\omega$  に対する上記の性質を調べるためには, 流場を Fig.1(c) のような新しい複素平面 ( $\zeta$  平面) 上の単位円の内側に写すと便利である.  $f$  平面から  $\zeta$  平面への写像は次式で与えられる.

$$f + ich = \frac{2ch}{\pi} \log \left( \frac{1 + \sqrt{\zeta}}{1 - \sqrt{\zeta}} \right) \quad \text{or} \quad \zeta = \tanh^2 \left\{ \frac{\pi}{4ch} (f + ich) \right\} \quad (6)$$

このとき, 水面 ( $y = \eta(x)$  or  $\psi = 0$ ) は  $\zeta = e^{i\sigma}$  ( $0 < \sigma < 2\pi$ ) に, 物理平面における無限遠 ( $|x| = \infty$  or  $|\phi| = \infty$ ) は  $\zeta$  平面における単位円上の点  $\zeta = 1$  に写される. また,  $f$  平面における水面の境界条件 (2) は

$$\pi \sin \frac{\sigma}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} + \frac{1}{F^2} e^{3\tau} \sin \theta = 0 \quad \text{on } \zeta = e^{i\sigma} \quad \text{and } 0 < \sigma < 2\pi, \quad (7)$$

水底 ( $0 \leq \zeta < 1$ ) の条件 (3) と波の山の下 ( $-1 < \zeta < 1$ ) の条件 (4) は

$$\theta = 0 \quad \text{on } -1 < \zeta < 1, \quad (8)$$

無限遠の条件 (5) は

$$\omega = \tau + i\theta \rightarrow 0 \quad \text{as } \zeta \rightarrow 1, \quad (9)$$

のように  $\zeta$  平面では表される.  $\zeta$  平面の単位円の内側  $|\zeta| < 1$  で正則で, 点  $\zeta = 1$  (物理平面の無限遠に対応する点) 付近で条件 (7) (8) (9) をすべてみたす解  $\omega$  を調べると, 次のような結果が得られる.

$$\omega \sim b(1 - \zeta)^{2\mu} \quad \text{as } \zeta \rightarrow 1 \quad (10)$$

ここで、 $b$  は実定数で、 $\mu$  は次式をみたす正の実数である。

$$F^2 \mu \pi = \tan \mu \pi \quad (11)$$

したがって、点  $\zeta = 1$  は  $\zeta$  平面における  $\omega$  の特異点であることがわかる。また、(10) は (6) を用いると

$$\omega \sim \tilde{b} e^{\mp \mu \pi (f + ich)/(ch)} \quad (\phi \rightarrow \pm \infty) \quad (12)$$

のように表すことができる ( $\tilde{b} = 2^4 \mu b$ )。  $dz/df = (1/c)e^\omega \sim c$  ( $\phi \rightarrow \pm \infty$ ) であるので、上式は孤立波解  $\omega$  が裾野で指数関数的に減衰していることを表している。その減衰率を与える  $\mu$  は Froude 数  $F$  と (11) により、Fig.2 のように関係づけられる。Fig.2 より、 $F$  の値が 1 に近い (波高が低い) ほど、 $\mu$  の値も小さいことがわかる。(11) は Stokes [8] [3, §252] がはじめて導いたので、(11) を Stokes の関係式とよぶ。

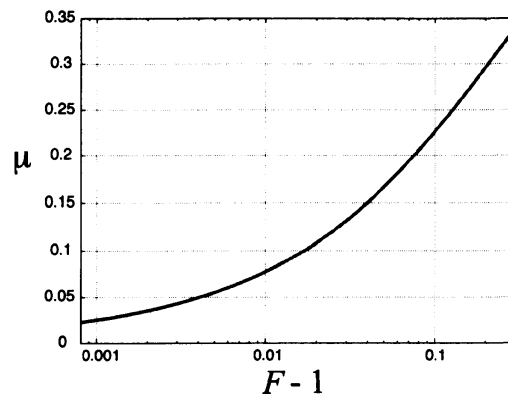


Fig.2 Variation of the decay rate  $\mu$  with the Froude number  $F$ . The relation between  $\mu$  and  $F$  is computed using Stokes' relation (11).

### 3 孤立波解の近似

#### 3.1 長波近似

長波近似のアイディアは、孤立波解の水平方向の変化は緩やかであるという仮定に基づき、 $x$  方向の高階微分を含む項は微小であるとして無視することである。このことは、2.2 節で述べた裾野における孤立波解の性質と次のように関連づけられる。

まず、(12) より

$$\tau \sim \tilde{b} e^{\mp \mu \pi \phi / (ch)} \cos \left\{ \mu \pi \left( \frac{\psi}{ch} + 1 \right) \right\} \quad (\phi \rightarrow \pm \infty) \quad (13)$$

を得る。この  $\phi$  方向の高階微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^n \tau}{\partial \phi^n} \sim \tilde{b} \left( \mp \frac{\mu \pi}{ch} \right)^n e^{\mp \mu \pi \phi / (ch)} \cos \left\{ \mu \pi \left( \frac{\psi}{ch} + 1 \right) \right\} \quad (\phi \rightarrow \pm \infty) \quad (14)$$

したがって、減衰率  $\mu$  の値が小さいとき（波高が低いとき）は、微少量  $\epsilon$  を用いて  $\mu = O(\epsilon)$  とすると、

$$(ch)^n \frac{\partial^n \tau}{\partial \phi^n} = O(\epsilon^n) \quad (15)$$

のように表すことができる。

一方、 $\omega = \omega(f)$  を水底  $\psi = -ch$  を中心に Taylor 展開すると、次のように表すことができる。

$$\omega(f) = \tau(\phi, \psi) + i\theta(\phi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \{i(\psi + ch)\}^k \frac{d^k}{d\phi^k} \tilde{\tau}(\phi) \right] \quad (16)$$

あるいは

$$\begin{cases} \tau(\phi, \psi) = \tilde{\tau}(\phi) - \frac{1}{2!}(\psi + ch)^2 \frac{d^2 \tilde{\tau}}{d\phi^2} + \frac{1}{4!}(\psi + ch)^4 \frac{d^4 \tilde{\tau}}{d\phi^4} - \dots \\ \theta(\phi, \psi) = (\psi + ch) \frac{d\tilde{\tau}}{d\phi} - \frac{1}{3!}(\psi + ch)^3 \frac{d^3 \tilde{\tau}}{d\phi^3} + \frac{1}{5!}(\psi + ch)^5 \frac{d^5 \tilde{\tau}}{d\phi^5} - \dots \end{cases} \quad (17)$$

ここで、 $\tilde{\tau}(\phi) = \tau(\phi, \psi = -ch)$  は水底 ( $\psi = -ch$ ) における  $\tau$  を表す。(17) を水面の境界条件 (2) に代入し、 $\tilde{\tau}$  は微小であるという仮定と長波近似の仮定 (15) に基づいて  $\phi$  に関する高階微分の項を無視することにより、次のような近似方程式が得られる。

$$\left( ch \frac{d\tilde{\tau}}{d\phi} \right)^2 = \frac{3(F^2 - 1)}{1 + \frac{3}{2}(F^2 - 1)} \tilde{\tau}^2 \left( 1 - \frac{F^2}{F^2 - 1} \tilde{\tau} \right) \quad (18)$$

この近似方程式の解とその裾野における挙動は、次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(\phi) &= \frac{F^2 - 1}{F^2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(F^2 - 1)}{1 + \frac{3}{2}(F^2 - 1)}} \frac{\phi}{ch} \right) \\ &\sim \frac{4(F^2 - 1)}{F^2} \exp \left( \mp \sqrt{\frac{3(F^2 - 1)}{1 + \frac{3}{2}(F^2 - 1)}} \frac{\phi}{ch} \right) \quad (\phi \rightarrow \pm \infty) \end{aligned} \quad (19)$$

(19) を (17) の右辺に代入して、高階微分項を打ち切ることにより、 $\tau$  と  $\theta$  の長波近似解を求めることができる。さらに、 $df/dz = ce^{-\omega}$  を用いて水面変位  $y = \eta(x)$  の近似解を求めることができるが、その近似解は波高が小さいときの KdV 方程式の解と一致する。また、 $\tau$  と  $\theta$  の近似解の指数関数的減衰率は  $\sqrt{3(F^2 - 1)/\{1 + \frac{3}{2}(F^2 - 1)\}}$  であるが、こ

これは Stokes の関係式 (11) で  $\mu$  の値は小さいと仮定することにより得られる近似値とみなすことができる。また, (17) の高階微分項を打ち切ることにより近似された  $\tau$  と  $\theta$  は, Laplace 方程式を厳密にはみたまない。すなわち, 近似解は解の調和性も近似している。

以上より, 長波近似では (i) 裾野における解の性質 (指数関数的に減衰する性質) と, (ii) 解の調和性を近似している。この近似による誤差は, 波高が高くなるとともに大きくなる。一方, 次節のように, Packham は長波近似と異なる方法で, この二つの性質を厳密に表現できる近似法を示した。

### 3.2 Packham 近似

(10) のように, 裾野における解の性質 (指数関数的に減衰する性質) は,  $\zeta$  平面における解の特異性と関連づけることができる。Packham [7] は, この特異性が正則化されるような複素平面 ( $\hat{\zeta}$  平面) を導入し,  $\hat{\zeta}$  平面で孤立波解をベキ級数展開することを考えた。そのような  $\hat{\zeta}$  平面の選び方は一通りではないが, Packham は次のように与えられる  $\hat{\zeta}$  を用いた。

$$\left(\frac{1+\sqrt{\zeta}}{1-\sqrt{\zeta}}\right)^{2\mu} = \frac{1+\sqrt{\hat{\zeta}}}{1-\sqrt{\hat{\zeta}}} \quad (20)$$

この変換により, Fig.1(d) のように, 水面は  $\hat{\zeta} = \hat{\rho}e^{i\hat{\sigma}}$  で与えられる閉曲線  $\Gamma$  上に, 流場はその内側に, 物理平面 ( $z$  平面) 上の無限遠は点  $\hat{\zeta} = 1$  に写される。  $\zeta = 1$  は  $\hat{\zeta} = 1$  に写されるが, (10) は

$$\omega \sim \hat{b}(1 - \hat{\zeta}) \quad \text{as } \hat{\zeta} \rightarrow 1 \quad (21)$$

のように変形されるので, 孤立波解  $\omega$  は  $\hat{\zeta}$  平面上の点  $\hat{\zeta} = 1$  で正則である ( $\hat{b}$  は実定数)。また,  $\omega$  は水面を与える閉曲線  $\hat{\zeta} = \hat{\rho}e^{i\hat{\sigma}}$  ( $0 < \hat{\sigma} < 2\pi$ ) 上とその内側 (流場) で正則であるので,  $\hat{\zeta}$  平面上では次のようにベキ級数展開できる。

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n \hat{\zeta}^n \quad (22)$$

さらに, 水底 ( $0 \leq \hat{\zeta} < 1$ ) と波の山の下 ( $-1 < \hat{\zeta} < 0$ ) の条件

$$\theta = 0 \quad (-1 < \hat{\zeta} < 1) \quad (23)$$

と無限遠 ( $\hat{\zeta} = 1$ ) の条件

$$\omega = \tau + i\theta \rightarrow 0 \quad \text{as } \hat{\zeta} \rightarrow 1 \quad (24)$$

を考慮すると, (22) は次のように表すことができる.

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(1 - \hat{\zeta}^n) \quad (b_n \in \mathbb{R}) \quad (25)$$

Packham [7] は, 上式の無限級数の第 2 項以降を打ち切ることにより得られる第 1 部分和  $b_1(1 - \hat{\zeta})$  を用いて正則関数を近似することを考えた. この第 1 部分和は, 水面以外のすべての境界条件と裾野における解の性質 (指数関数的に減衰する性質) を厳密にみたす.

Davies [1] [4, §15.59] は,  $\omega = \tau + i\theta$  に対する水面の境界条件 (2) に含まれる  $\sin \theta$  を

$$\sin \theta \sim \frac{1}{3} \sin 3\theta \quad (26)$$

のように近似することにより, (2) が次式で近似できることを示した.

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{1}{e^{-3\omega}} \left\{ ch \frac{d}{df} (e^{-3\omega}) - i \frac{3}{F^2} \right\} \right] = 0 \quad \text{on } \psi = 0 \quad (27)$$

Packham [7] はこの水面の近似境界条件 (27) をみたす解が,  $\hat{\zeta}$  を用いて次のように表されることを示した.

$$e^{-3\omega(\hat{\zeta})} = 1 - \sin^2 \mu\pi \cdot (1 - \hat{\zeta}) \quad \text{or} \quad \omega(\hat{\zeta}) = -\frac{1}{3} \log \{ 1 - \sin^2 \mu\pi \cdot (1 - \hat{\zeta}) \} \quad (28)$$

ここで,  $\mu$  は Stokes の関係式 (11) により与えられる正の実数である. この Packham の近似解 (28) は (i) 裾野における解の性質 (指数関数的に減衰する性質) と (ii) 解の調和性を厳密にみたしている点が, 長波近似と異なる.

#### 4 新しい近似解の表現

Packham [7] は, (25) の無限級数の第 1 部分和を用いて孤立波の近似解を求めたが, 第  $N$  部分和

$$\tilde{\omega}_N = \sum_{n=1}^N b_n(1 - \hat{\zeta}^n) \quad (b_n \in \mathbb{R}) \quad (29)$$

を用いてさらに精度のよい近似解を求めることが考えられる. この第  $N$  部分和  $\tilde{\omega}_N$  は, すべての  $N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) に対して, 水面以外のすべての境界条件と裾野における解の性質 (指数関数的に減衰する性質) を厳密にみたす. ただし, できるだけ少ない項数  $N$  で精度のよい近似解を求めるためには, (25) の無限級数の収束が速くなければならない. しかし, 波高が大きくなるとともに, この無限級数の収束は遅くなるので, (29) の級数展開を改良する必要がある.

(29) による  $\omega$  の近似は,  $\hat{\zeta}$  に関する  $N$  次多項式による近似とみなすことができる.  $\hat{\zeta}$  平面上の閉曲線 (水面)  $\Gamma: \hat{\zeta} = \hat{\rho} e^{i\hat{\sigma}}$  ( $0 < \hat{\sigma} < 2\pi$ ) で囲まれた領域上で正則な関数の近似の精度を評価するために, 二つの複素関数  $\varphi_1, \varphi_2$  の内積  $(\varphi_1, \varphi_2)_\Gamma$  と複素関数  $\varphi$  のノルム  $\|\varphi\|_\Gamma$  を次のように定義する [2, §18.4].

$$(\varphi_1, \varphi_2)_\Gamma = \int_0^{2\pi} \varphi_1(\hat{\zeta} = \hat{\rho} e^{i\hat{\sigma}}) \overline{\varphi_2(\hat{\zeta} = \hat{\rho} e^{i\hat{\sigma}})} d\hat{\sigma} \quad (30)$$

$$\|\varphi\|_\Gamma = \sqrt{(\varphi, \varphi)_\Gamma} \quad (31)$$

このとき,  $\hat{\zeta}$  平面の領域上で正則な関数の最良多項式近似について, 次のような定理が成り立つことが知られている.

**定理** [2, §18.4]

$\omega(\hat{\zeta})$  は領域  $\mathcal{D}$  で正則,  $\mathcal{D} \cup \Gamma$  で連続とする ( $\Gamma: \mathcal{D}$  の境界). このとき, ノルム  $\|\cdot\|_\Gamma$  に関する  $\omega(\hat{\zeta})$  の最良  $N$  次多項式近似は, 次式で与えられる.

$$\omega_N(\hat{\zeta}) := \sum_{n=1}^N c_n p_n(\hat{\zeta}) \quad \text{with } c_n = (\omega, p_n)_\Gamma, \quad (32)$$

ここで,  $\{p_n(\hat{\zeta})\}_{n=1}^N$  は次の条件をみたす直交多項式系である.

$$(p_m, p_n)_\Gamma = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}. \quad (33)$$

□

直交多項式系  $\{p_n(\hat{\zeta})\}_{n=1}^N$  は  $N$  個の線形独立な関数系  $\{1 - \hat{\zeta}, 1 - \hat{\zeta}^2, \dots, 1 - \hat{\zeta}^N\}$  を Gram-Schmidt 変換することにより, 数値的に求めることができる. ただし, コンピュータ上の数値計算によるこの変換は丸め誤差の影響を受けやすいので, 多倍長演算用ライブラリなどを用いて誤差を軽減する工夫をした [5, 6].

本研究では, 直交多項式展開 (32) を新しい孤立波の近似解の表現として提案する. (32) は水面以外のすべての境界条件を厳密にみたす最良  $N$  次多項式であり, (i) 裾野における解の性質 (指数関数的に減衰する性質) と (ii) 解の調和性も近似せずに正確に表現できている. (32) の未知係数  $c_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) は,  $\omega_N$  が水面の境界条件 (2) を精度よくみたすように数値的に求めることができる.  $c_n$  の計算方法は参考文献 [5, 6] と同じであるので, その説明は省略する. 本研究では, 近似していない水面の境界条件 (2) を精度よくみたす  $\omega_N$  を強非線形解とよぶ.



## 5 近似解の比較

本節では、3.1節で求めた $\omega$ の長波近似解と、(28)に示したPackhamの近似解と、4節の方法で求めた強非線形解を比較する。強非線形解の精度は、次のように考えた。まず、 $f$ 平面における水面の境界条件(2)は、 $\hat{\zeta}$ 平面上の水面( $\hat{\zeta} = \hat{\rho} e^{i\hat{\sigma}}$ )では次のように表すことができる。

$$G(\hat{\sigma}) := ch \frac{d\hat{\sigma}}{d\phi} \frac{\partial \tau}{\partial \hat{\sigma}} - \frac{1}{F^2} e^{3\tau} \sin \theta = 0 \quad (0 < \hat{\sigma} < 2\pi) \quad (34)$$

このとき、次式で定義される $\|G\|_{\max}$ は、強非線形解の精度の指標として用いることができる。

$$\|G\|_{\max} := \max_{0 \leq \hat{\sigma} \leq 2\pi} |G(\hat{\sigma})| \quad (35)$$

以下に示す強非線形解の計算結果は、すべて $\|G\|_{\max} < 10^{-9}$ をみたすように求めた。そのために必要な近似解 $\omega_N$ の項数 $N$ と直交多項式系 $\{p_n\}$ を求めるために用いた多倍長演算の有効桁数 $M$ は、それぞれ $N \leq 50$ 、 $M \leq 40$ であった。

### 5.1 波形の比較

孤立波の波形を与える座標 $(x/h, y/h)$ は、 $e^{-\omega} = (1/c)df/dz$ を用いると次のように表すことができる。

$$\begin{cases} \frac{x}{h} = F^2 \int_{\hat{\sigma}}^{\pi} \frac{e^{\tau} \cos \theta}{2 \sin \frac{\hat{\sigma}}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\hat{\sigma}}{2} + \tan^2 \mu \pi}} d\hat{\sigma} \\ \frac{y}{h} = -F^2 \int_0^{\hat{\sigma}} \frac{e^{\tau} \sin \theta}{2 \sin \frac{\hat{\sigma}}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\hat{\sigma}}{2} + \tan^2 \mu \pi}} d\hat{\sigma} \end{cases} \quad (36)$$

Fig.3は、上式の $\tau$ と $\theta$ に長波近似解とPackhamの近似解と強非線形解を代入し、それぞれの波形を計算した結果を比較している。Packhamの近似解の方が長波近似解より精度がよいことがわかる。

### 5.2 運動エネルギー密度の比較

孤立波の運動エネルギー $E_k^*$ は

$$E_k^* = \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-h}^{\eta} \{(u-c)^2 + v^2\} dy dx \quad (37)$$

により与えられる( $\rho$ は流体の密度)。さらに、これを無次元化した $E_k = E_k^*/(\rho gh^3)$ は水面上( $\hat{\zeta} = \hat{\rho} e^{i\hat{\sigma}}$ )の $\tau = \tau(\hat{\sigma})$ と $\theta = \theta(\hat{\sigma})$ を用いて次のように表すことができる。

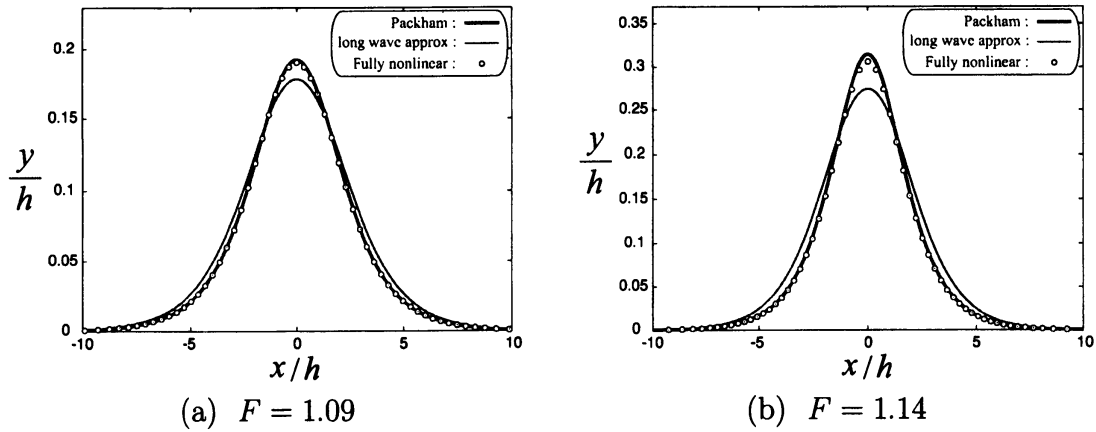


Fig.3 Comparison of the wave profile.  $F = c/\sqrt{gh}$ : the Froude number, thin line : long wave approximation, thick line : Packham's approximation and circle  $\circ$  : fully nonlinear solution.

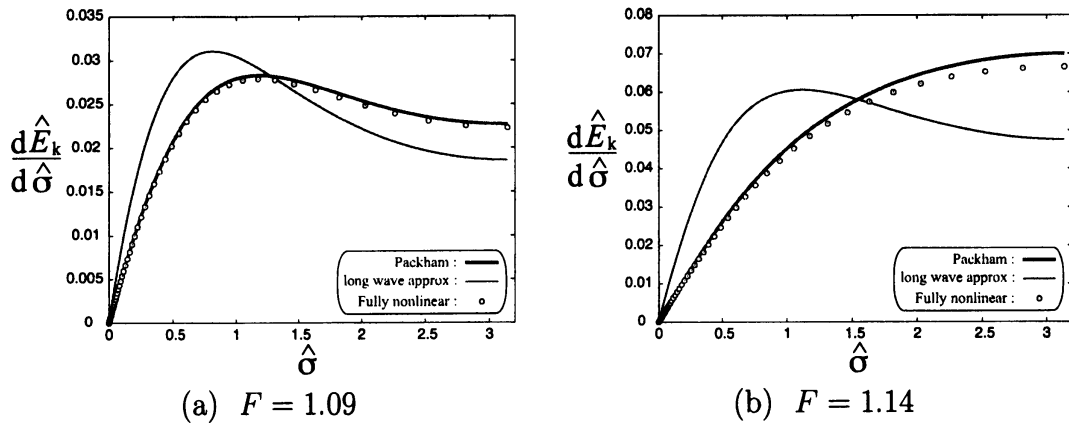


Fig.4 Comparison of the kinetic energy density  $d\hat{E}_k/d\hat{\sigma}$ .  $F = c/\sqrt{gh}$ : the Froude number, thin line : long wave approximation, thick line : Packham's approximation and circle  $\circ$  : fully nonlinear solution.

$$E_k = \frac{E_k^*}{\rho gh^3} = \int_0^\pi \frac{F^6 (e^\tau \cos \theta - 1)(1 - e^{-2\tau})}{4 \sin \frac{\hat{\sigma}}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\hat{\sigma}}{2} + \tan^2 \mu \pi}} d\hat{\sigma} \quad (38)$$

上式の被積分関数を  $d\hat{E}_k/d\hat{\sigma}$ , すなわち

$$\frac{d\hat{E}_k}{d\hat{\sigma}} = \frac{F^6 (e^\tau \cos \theta - 1)(1 - e^{-2\tau})}{4 \sin \frac{\hat{\sigma}}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\hat{\sigma}}{2} + \tan^2 \mu \pi}} \quad (39)$$

のように表すと,  $d\hat{E}_k/d\hat{\sigma}$  は水面に沿った運動エネルギー密度の分布を表す. Fig.4 は, (39) の  $\tau$  と  $\theta$  に長波近似解と Packham の近似解と強非線形解を代入し, それぞれの運動エネルギー密度  $d\hat{E}_k/d\hat{\sigma}$  を計算した結果を比較している. 横軸の  $\hat{\sigma}$  は水面  $\hat{\zeta} = \hat{\rho} e^{i\hat{\sigma}}$  の

位置を表し,  $\hat{\sigma} = 0$  が無限遠,  $\hat{\sigma} = \pi$  が波の山に対応する (Fig.1(d) 参照). Fig.3 の波形の結果と同様に, Packham の近似解の方が長波近似解より明らかに精度がよいことがわかる.

## 6 まとめ

本研究では, 一方向に一定速度で波形を変えずに進む孤立波の近似解について考えた. 孤立波解の近似のポイントは, 波の裾野における解の指数関数的減衰の評価である. Packham [7] は, この評価に適した複素平面を導入することにより, 従来の長波近似とは異なる近似解を導出した. 本研究では, Packham が用いた複素平面における水面上で直交化した関数系で解を展開することにより, 最良多項式近似を与える新しい孤立波の解の表現が得られることを示した. また, 新しい解の表現を用いて数値計算で求めた強非線形解と近似解を比較することにより, Packham 近似の方が長波近似より精度がよいことがわかった.

## 参考文献

- [1] Davies, T.V. : The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. I, Proc. R. Soc. Lond. A, vol.208, pp.475–486, 1951.
- [2] Henrici, P. : Applied computational complex analysis. vol3, John Wiley & Sons, 1986.
- [3] Lamb, H. : Hydrodynamics, 6th ed., §252, Dover, 1945.
- [4] Milne-Thomson, L.M. : Theoretical hydrodynamics, 5th ed., §14.65, §15.59, Dover, 1968.
- [5] Murashige, S. : Numerical use of exterior singularities for computation of gravity waves in shallow water, J. Eng. Math., vol.77, pp.1–18, 2012.
- [6] 村重 淳, 田中 健一郎 : 複素領域の境界上における直交多項式展開, 数理解析研究所講究録 1848, pp.124–131, 2013年8月.
- [7] Packham, B.A. : The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. II. The solitary wave, Proc. R. Soc. Lond. A, vol.213, pp.234–249, 1952.
- [8] Stokes, G.G. : On the theory of oscillatory waves. Appendix B., Math. and Phys. Pap., vol.1, pp.197–229, pp.314–326, 1880.