数理解析研究所講究録
第 1891 巻 2014 年 156-169

Scattering theory for the Laplace-Beltrami operator on symmetric spaces of noncompact type

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 貝塚 公一 (Koichi Kaizuka)
Graduate School of Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba

1 序

本稿では, 非コンパクト型対称空間と呼ばれる完備リーマン多様体上の Laplace-Beltrami 作用素に対する散乱理論について考察する. 非コンパクト型対称空間の具体例は, 実双曲空間, 複素双曲空間, 有界対称領域等である. 対称空間上の調和解析の理論については, 例えば Helgason による著書 [4], [5], [6] を参照のこと.

この節では, Euclid 空間上の Laplace 作用素に対する Agmon-Hörmander の結果について復習する (詳細は [2], または [8], Chapter XIV を参照). 始めに, Euclid 空間上の Agmon-Hörmander 型の空間 $B(\mathbb{R}^n)$, $B(\mathbb{R}^n)^*$ を導入する. 1 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^1$ の部分集合の族 $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}}$ を以下で定義する.

$$\Omega_0 := \{t \in \mathbb{R}^1; |t| < 1\},\ \Omega_j := \{t \in \mathbb{R}^1; 2^{j-1} \leqslant |t| < 2^j\} \quad (j \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

$\chi_{\Omega_j}(t)$ を集合 $\Omega_j \subset \mathbb{R}^1$ の特性関数とする. 局所 2 乗可積分関数 $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して, ノルム $\|f\|_{B(\mathbb{R}^n)}$ を以下で定義する.

$$\|f\|_{B(\mathbb{R}^n)} := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2}\|\chi_{\Omega_j}(|x|)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

ここで,

$$B(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{B(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$$

とおくと, ノルム空間 $(B(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{B(\mathbb{R}^n)})$ は Banach 空間となる. このとき, 双対空間 $B(\mathbb{R}^n)^*$ は双線形形式 $(u, f) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)f(x)dx$ により, $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間として, 以下のように実現される. 局所 2 乗可積分関数 $u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して, ノルム $\|u\|_{B(\mathbb{R}^n)^*}$ を以下で定義する.

$$\|u\|_{B(\mathbb{R}^n)^*} := \sup_{j\in\mathbf{Z}_{\geqslant 0}} \{2^{-j/2}\|\chi_{\Omega_j}(|x|)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\}.$$

ここで,

$$B(\mathbb{R}^n)^* := \{u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n); \|u\|_{B(\mathbb{R}^n)^*} < \infty\}$$

とおくと, ノルム空間 $(B(\mathbb{R}^n)^*, \|\cdot\|_{B(\mathbb{R}^n)^*})$ は Banach 空間となる. Banach 空間 $B(\mathbb{R}^n)^*$ に対して, ある正定数 C が存在して以下のノルムの同値性が成り立つ.

$$C^{-1}\|u\|_{B(\mathbb{R}^n)^*} \leqslant \left(\sup_{R>1} \frac{1}{R}\int_{|x|<R} |u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C\|u\|_{B(\mathbb{R}^n)^*}.$$

Banach 空間 $B(\mathbb{R}^n)^*$ に同値関係 $\simeq$ を次のように定める.

$$u_1 \simeq u_2 :\Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_{|x|<R} |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx = 0.$$

上述の同値関係の定義において, 積分領域 $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$ を, 円環領域 $\{x \in \mathbb{R}^n; aR < |x| < bR\}$ $(0 < a < b < \infty)$ に置き換えても同じ同値関係が得られる. つまり, $u \simeq 0$ とは, u が平均 L^2-ノルムの意味で無限遠において境界値 0 を持つ事と解釈できる.

$x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対して, Euclid 空間上の標準内積を $\langle x, \xi \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ により定義する. Euclid 空間上の Fourier 変換を以下で定義する.

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} u(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x) dx, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$ を Euclid 空間上の Laplace 作用素とし, $H_{00} = -\Delta_{\mathbb{R}^n}$ を $\mathcal{D}(H_{00}) = H^2(\mathbb{R}^n)$ を定義域とする $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の自己共役作用素とする. ここで, $H^2(\mathbb{R}^n)$ は Euclid 空間における 2 階の Sobolev 空間である. $\mathbb{R}_\pm := \pm(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ とおく. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度 dx から誘導される, 単位球面 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の標準測度を $d\sigma(\omega)$ とおく. また, $L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}) := L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}, d\sigma)$ とおく. このとき, 自己共役作用素 H_{00} のスペクトル表示

$$\gamma_{00} : L^2(\mathbb{R}^n) \tilde{\to} L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}), d\tau)$$

が Fourier 変換を用いて以下で与えられる.

$$\gamma_{00} f(\tau) := 2^{-1/2} \tau^{(n-2)/4} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f(\sqrt{\tau}\cdot), \quad a.e.\ \tau \in \mathbb{R}_+.$$

また, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\tau > 0$ に対して

$$\gamma_{00}(\tau) f(\omega) := 2^{-1/2} \tau^{(n-2)/4} \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f(\sqrt{\tau}\omega), \quad \omega \in \boldsymbol{S}^{n-1}$$

と定義する. このとき, $\gamma_{00}(\tau)$ は Banach 空間 $B(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\boldsymbol{S}^{n-1})$ への有界線形作用素に一意的に拡張され, $f \in B(\mathbb{R}^n)$ に対して以下が成り立つ.

$$(\gamma_{00} f)(\tau) = \gamma_{00}(\tau) f, \quad \text{a.e. } \tau \in \mathbb{R}_+.$$

共役作用素 $\gamma_{00}(\tau)^* : L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}) \to B(\mathbb{R}^n)^*$ は Poisson 変換を用いて

$$\gamma_{00}(\tau)^* \varphi(x) = 2^{-1/2} \tau^{(n-2)/4} (2\pi)^{-n/2} \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} e^{i\sqrt{\tau}\langle x,\omega\rangle} \varphi(\omega) d\sigma(\omega)$$

と表わされる.

Agmon-Hörmander により以下の結果が得られている.

定理 1.1 ([2]). 任意の $\tau > 0$ に対して, 以下の *Banach* 空間としての同型が成り立つ.

$$\gamma_{00}(\tau)^* : L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}) \tilde{\to} \Big\{ u \in B(\mathbb{R}^n)^*; (-\Delta_{\mathbb{R}^n} - \tau) u = 0 \Big\}.$$

さらに, $\tau > 0$, $\varphi \in L^2(\boldsymbol{S}^{n-1})$ に対して一般化固有関数 $\gamma_{00}(\tau)^*\varphi$ は以下の漸近展開を満たす.

$$\begin{aligned} \gamma_{00}(\tau)^* \varphi(x) \simeq\ & C(\tau) |x|^{-(n-1)/2} e^{+i\sqrt{\tau}|x|} \varphi(+x/|x|) \\ & + \overline{C(\tau)} |x|^{-(n-1)/2} e^{-i\sqrt{\tau}|x|} \varphi(-x/|x|). \end{aligned}$$

ただし, $C(\tau) = 2^{-1} \pi^{-1/2} e^{-(n-1)\pi i/4} \tau^{-1/4}$.

この定理により, Banach 空間 $B(\mathbb{R}^n)^*$ に属し, 自己共役作用素 $H_{00} = -\Delta_{\mathbb{R}^n}$ の正のスペクトルに対応する一般化固有関数は, Poisson 変換による $\varphi \in L^2(S^{n-1})$ の像として与えられることが分かる. そして, 一般化固有関数 $\gamma_{00}(\tau)^*\varphi$ は無限遠において, 外向き, 内向きの球面波で近似されることが分かる.

$s \in \mathbb{R}$ に対して, 重み付き L^2-空間 $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$ を $L^{2,s}(\mathbb{R}^n) := (1+|x|^2)^{-s/2}L^2(\mathbb{R}^n)$ と定義する. また, Banach 空間 $B(\mathbb{R}^n)^*$ の閉部分空間 $\mathring{B}(\mathbb{R}^n)^*$ を以下で定義する.

$$\mathring{B}(\mathbb{R}^n)^* := \{u \in B(\mathbb{R}^n)^*; u \simeq 0\}.$$

このとき, 任意の $s > 1/2$ に対して以下の包含関係が成り立つ事に注意する.

$$L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^{2,-1/2}(\mathbb{R}^n) \subset \mathring{B}(\mathbb{R}^n)^* \subset B(\mathbb{R}^n)^* \subset L^{2,-s}(\mathbb{R}^n).$$

以下の Rellich 型の定理から, Banach 空間 $B(\mathbb{R}^n)^*$ は次の意味で, 自己共役作用素 $H_{00} = -\Delta_{\mathbb{R}^n}$ の正のスペクトルに対応する最小の解空間となることが分かる.

系 1.2 (Rellich 型定理). $\tau > 0$ に対して, $u \in B(\mathbb{R}^n)^*$ が以下を満たすと仮定する.

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^n} - \tau)u = 0,$$
$$u \simeq 0.$$

このとき, $u = 0$ が成り立つ.

2 実双曲空間上の Helgason Fourier 変換

この節では, 実双曲空間上の Helgason Fourier 変換を導入する. 詳細については [5] を参照のこと.

$\boldsymbol{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ とおく. 単位開球 $\boldsymbol{B}^n$ $(n \geqslant 2)$ 上で以下の Poincaré 計量を考える.

$$g_P = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}(dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n).$$

このとき, Riemann 多様体 $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}} = (\boldsymbol{B}^n, g_P)$ は, 連結, 単連結, 非コンパクト, 完備 Riemann 多様体となり, 断面曲率 $K_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}$ は $K_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} \equiv -1$ を満たす. $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}} = (\boldsymbol{B}^n, g_P)$ は実双曲空間の Poincaré ball model と呼ばれる. $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ 上の Riemann 測度 $d\mu(x)$ は

$$d\mu(x) = \left(\frac{2}{1-|x|^2}\right)^n dx$$

で与えられる. $d(x,y)$ を $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ 上の測地距離とする. 特に, 原点 o と $x \in \boldsymbol{B}^n$ の測地距離は以下で与えられる.

$$d(x,o) = \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right).$$

ここで, $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}} \times S^{n-1}$ 上の C^∞-級関数 $A(x,b)$ を以下で定める.

$$A(x,b) := \log\left(\frac{1-|x|^2}{|x-b|^2}\right). \tag{2.1}$$

$\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}$ を実双曲空間 $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素とする. $\rho := (n-1)/2$ とおく. このとき, Poisson 核の複素冪

$$e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)} = \left(\frac{1-|x|^2}{|x-b|^2}\right)^{(i\lambda+\rho)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

は以下を満たす.

$$-\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)} = (\lambda^2+\rho^2)e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)}.$$

実双曲空間上においては, Poisson 核の複素冪 $e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)}$ が Euclid 空間上の波動関数 $e^{i\langle x,\xi\rangle}$ に対応している. 実双曲空間上において, $f \in C_0^\infty(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対する Helgason Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ が以下で定義される.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b) = \int_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} e^{(-i\lambda+\rho)A(x,b)} f(x)d\mu(x), \ (\lambda,b) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}.$$

実双曲空間上の Helgason Fourier 変換に対して, 以下が成り立つことが知られている:

(i) (Fourier 反転公式) 任意の $f \in C_0^\infty(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対して, 以下の反転公式が成り立つ.

$$f(x) = 2^{-1}c_n^2 \int_{\mathbb{R}\times S^{n-1}} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)}\mathcal{F}f(\lambda,b)|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\sigma(b).$$

ここで $\omega_{n-1} := vol(S^{n-1})$, $c_n := (2\pi)^{-1/2}2^\rho\omega_{n-1}^{-1}$. また, $c(\lambda)$ は Harish-Chandra c-関数とよばれ, 以下で定義される (命題 3.1 を参照).

$$c(\lambda) = \frac{2^{2\rho-1}\Gamma(\rho+\frac{1}{2})\Gamma(i\lambda)}{\pi^{1/2}\Gamma(i\lambda+\rho)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ここで, $\Gamma(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ はガンマ関数である.

(ii) (Plancherel の定理) $L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}) := L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}, d\mu)$, $dp(\lambda,b) = c_n^2|c(\lambda)|^{-2}d\lambda d\sigma(b)$ とおく. Helgason Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は, $L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ から $L^2_W(\mathbb{R}\times S^{n-1}, 2^{-1}dp)$ へのユニタリ同型へ一意的に拡張される.

$$\mathcal{F} : L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}) \tilde{\to} L^2_W(\mathbb{R}\times S^{n-1}, 2^{-1}dp).$$

ここで, $\psi \in L^2_W(\mathbb{R}\times S^{n-1}, 2^{-1}dp)$ とは, $\psi \in L^2(\mathbb{R}\times S^{n-1}, 2^{-1}dp)$ かつ, ほとんど至る所の $(\lambda,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ に対して

$$\int_{S^{n-1}} e^{(-i\lambda+\rho)A(x,b)}\psi(-\lambda,b)db = \int_{S^{n-1}} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)}\psi(\lambda,b)db \tag{2.2}$$

を満たすことである.

また, Helgason Fourier 変換による像が満たす対称性 (2.2) を用いると, 値域の関数空間の定義域を制限した場合に, 以下のユニタリ同型が成り立つことが分かる.

$$\mathcal{F} : L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}) \tilde{\to} L^2(\mathbb{R}_\pm \times S^{n-1}, dp).$$

ここで, $|c(\lambda)|^{-2}$ は空間次元の偶奇に依存して以下で与えられることに注意する.

(i) $n = 2k+1$ のとき,

$$|c(\lambda)|^{-2} = 2^{-2(k-1)}\{(2k-1)!!\}^{-2}\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda^2+j^2).$$

ここで $(2k-1)!! := (2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$.

(ii) $n = 2k$ のとき,

$$|c(\lambda)|^{-2} = 2^{-2(k-1)}\{(2k-2)!!\}^{-2}\frac{\pi\lambda\tanh(\pi\lambda)}{\lambda^2+2^{-2}}\prod_{j=0}^{k-1}\left\{\lambda^2+(\frac{2j-1}{2})^2\right\}.$$

ここで $(2k-2)!! := (2k-2)\cdot(2k-4)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2$ $(k \geqslant 2)$. また $0!! := 1$ とする.

次に, ホロ球と呼ばれる実双曲空間の部分多様体を定義する. $(t,b) \in \mathbb{R}\times \boldsymbol{S}^{n-1}$ に対して, ホロ球 $\xi(t,b)$ を以下で定義する.

$$\xi(t,b) = \{x \in \mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}; A(x,b) = t\}.$$

このとき, ホロ球に対する (修正) Radon 変換が以下で定義される.

$$\mathcal{R}f(t,b) := e^{\rho t}\int_{x\in\xi(t,b)} f(x)d\sigma_{\xi(t,b)}(x), \quad (t,b)\in\mathbb{R}\times\boldsymbol{S}^{n-1}.$$

ただし, $d\sigma_{\xi(t,b)}$ は $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ 上の Riemann 測度 $d\mu(x)$ から誘導される $\xi(t,b)$ 上の測度である. この時, 以下の Fourier slice 定理が成り立つ.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\mathcal{R}f(t,b)dt. \tag{2.3}$$

つまり, 実双曲空間上の Helgason Fourier 変換は, Radon 変換と一次元 Euclid 空間上の Fourier 変換の合成として表される. この表示式を用いることで, 実双曲空間上での Fourier 解析に Euclid 空間上の調和解析の理論を援用することができる.

3 実双曲空間上の一般化球関数

この節では, 実双曲空間上の一般化球関数を導入する. $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して, 初等球関数 $\varphi_\lambda(x)$ を以下で定義する.

$$\varphi_\lambda(x) := \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)}d\sigma(b). \tag{3.1}$$

$SO(n)$ を n 次特殊直交群とする. $SO(n)$ の $\mathbb{R}^n$ への自然な作用は, $SO(n)$ の $\boldsymbol{B}^n$ への作用を誘導する:

$$SO(n)\times\boldsymbol{B}^n \ni (T,x)\mapsto Tx\in\boldsymbol{B}^n.$$

このとき, 以下が成り立つことに注意する.

$$\varphi_\lambda(Tx) = \varphi_\lambda(x), \quad x\in\boldsymbol{B}^n, T\in SO(n).$$

初等球関数 $\varphi_\lambda(x)$ は, $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ 上の原点 o を中心とした球対称な関数で, $\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}u = -(\lambda^2+\rho^2)u$ かつ $u(0)=1$ を満たす関数として特徴付けられることが知られている.

実双曲空間上の極座標

$$\iota : \mathbb{R}_+\times\boldsymbol{S}^{n-1}\ni(r,b)\mapsto\tanh(r/2)\cdot b\in\boldsymbol{B}^n\setminus\{o\}$$

を用いると, 実双曲空間上の Riemann 測度, Laplace-Beltrami 作用素はそれぞれ以下のように表わされる.

$$d\mu(x) = (\sinh r)^{n-1}drd\sigma(b),$$
$$\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\coth r\frac{\partial}{\partial r} + (\sinh r)^{-2}\Delta_{\boldsymbol{S}^{n-1}}.$$

$t \in \mathbb{R}$ に対して, $x_t := (\tanh(t/2), 0, \dots, 0) \in \boldsymbol{B}^n$ とおく. この時, $\varphi_\lambda(x_t)$ は次を満たす.

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2} + (n-1)\coth t \frac{d}{dt} + (\lambda^2 + \rho^2)\right\} \varphi_\lambda(x_t) = 0.$$

$s = -\sinh^2(t/2)$ と変数変換し, $f_\lambda(s) := \varphi_\lambda(x_t)$ とおくと, $f_\lambda(s)$ は以下の 2 階の Fuchs 型方程式を満たす.

$$\left\{s(1-s)\frac{d^2}{ds} + (\frac{n}{2} - ns)\frac{d}{ds} - (\lambda^2 + \rho^2)\right\} f_\lambda(s) = 0.$$

従って, 超幾何関数 $F(a,b,c;z)$ を用いることで, 初等球関数 φ_λ は

$$\varphi_\lambda(x_t) = F(i\lambda + \rho, -i\lambda + \rho, n/2; -\sinh^2(t/2))$$

とあらわせる.

一方, (2.1), (3.1) を用いることで, 以下の積分表示が得られる.

$$\varphi_\lambda(x_t) = \frac{2^{2\rho}\Gamma(\rho + \frac{1}{2})}{\pi^{1/2}\Gamma(\rho)} e^{(i\lambda - \rho)t} \int_0^\infty (1 + e^{-2t}s^2)^{i\lambda - \rho}(1 + s^2)^{-(i\lambda + \rho)} s^{2\rho - 1} ds.$$

この積分表示から, 初等球関数 φ_λ に対する以下の漸近挙動が従う.

命題 3.1. $\mathrm{Re}(i\lambda) > 0$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} e^{(-i\lambda + \rho)t} \varphi_\lambda(x_t) = \boldsymbol{c}(\lambda).$$

また, 以下の Harish-Chandra 級数展開が成り立つことが知られている.

$$\varphi_\lambda(x_t) = \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} \boldsymbol{c}(\varepsilon\lambda) e^{(i\varepsilon\lambda - \rho)t} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \Gamma_\mu(\varepsilon\lambda) e^{-\mu t}. \tag{3.2}$$

ただし, $\Gamma_\mu(\lambda)$ は以下で帰納的に定義される $\mathbb{C}$ 上の有理関数である.

$$\Gamma_0(\lambda) \equiv 1,$$
$$(\mu^2 - 2i\mu\lambda)\Gamma_\mu(\lambda) = 2(n-1) \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_{>0} \\ \mu - 2k \geqslant 0}} \Gamma_{\mu - 2k}(\lambda)\{(\mu + \rho - 2k) - i\lambda\}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

次に, 実双曲空間上の一般化球関数を導入する. $\{Y_{l,j}(b); l = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, N(n,l)\}$ を球面 $\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の球面調和関数からなる, $L^2(\boldsymbol{S}^{n-1})$ の正規直交基底とする. この時, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して実双曲空間上の一般化球関数 $f_{\lambda,l,j}(x)$ を以下で定義する.

$$f_{\lambda,l,j}(x) := \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} e^{(i\lambda + \rho)A(x,b)} Y_{l,j}(b) d\sigma(b).$$

定理 3.2 ([3]). $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i(\mathbb{Z}_{\geqslant 0} + \rho)$ に対して, $f(x)$ が $\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} f = -(\lambda^2 + \rho^2) f(x)$ を満たすと仮定する. このとき, $\boldsymbol{S}^{n-1}$ 上の解析的汎関数 $T \in \mathcal{A}'(\boldsymbol{S}^{n-1})$ が存在して,

$$f(x) = \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} e^{(i\lambda + \rho)A(x,b)} dT(b)$$

と表わせる. また, 以下の一般化球関数による展開式が成り立つ.

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(n,l)} h_{l,j} \cdot f_{\lambda,l,j}(x) \quad in \ \mathcal{E}(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}).$$

ここで,

$$h_{l,j} = \int_{S^{n-1}} \overline{Y_{l,j}(b)} dT(b).$$

以下では, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, T \in L^2(S^{n-1})$ に対応する解について考察する.

4 実双曲空間上の Laplace-Beltrami 作用素に対する散乱理論

この節では, 実双曲空間上の Laplace-Beltrami 作用素に対する散乱理論について考察する. 本節で述べる事柄は本質的には新しいものではない (例えば, [1], [7], [10], [12] などを参照のこと). ただし, 非コンパクト型対称空間上の調和解析の理論を用いることで, 対応する結果を統一的な手法により一般化することができる.

始めに, 実双曲空間上の Agmon-Hörmander 型の空間 $B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}), B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*$ を導入する. Euclid 空間の場合と同様に, 原点からの距離関数 $d(x, o)$ を用いて以下のように定義する.

$$\|f\|_{B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})} := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2} \|\chi_{\Omega_j}(d(x,o)) f\|_{L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})},$$

$$B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}); \|f\|_{B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})} < \infty\}.$$

$$\|u\|_{B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*} := \sup_{j \in \mathbf{Z}_{\geqslant 0}} 2^{-j/2} \|\chi_{\Omega_j}(d(x,o)) u\|_{L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})},$$

$$B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^* := \{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}); \|u\|_{B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*} < \infty\}.$$

また, Banach 空間 $B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*$ に同値関係 $\simeq$ を次のように定める.

$$u_1 \simeq u_2 :\Longleftrightarrow \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{d(x,o)<R} |u_1(x) - u_2(x)|^2 d\mu(x) = 0.$$

次に, Laplace-Beltrami 作用素に対するスペクトル表示を定義する. $H_0 = -\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} - \rho^2$ を $\mathcal{D}(H_0) = W^{2,2}(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ を定義域とする, Hilbert 空間 $L^2(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ 上の自己共役作用素とする. このとき, $\sigma(H_0) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H_0) = [0, \infty)$ となる. 原点 o における指数写像 $\exp_o : T_o\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}} \to \mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ に対して,

$$\mathcal{J}(x) := \det(d\exp_o)_{\exp_o^{-1}(x)}$$

と定義すると, $\mathcal{J}(x)$ は以下で与えられる.

$$\mathcal{J}(x) = \left(\frac{\sinh d(x,o)}{d(x,o)} \right)^{n-1}.$$

このとき, 実双曲空間上の極座標を用いると以下が成り立つ.

$$\int_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}} (f \circ \iota)(r,b) (\mathcal{J} \circ \iota)(r,b) r^{n-1} dr d\sigma(b).$$

また, 相空間 $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ 上の Plancherel 測度に対して, 以下が成り立つことに注意する.

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}} \varphi(\lambda, b) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda d\sigma(b) = \int_{\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}} \varphi(\lambda, b) \mathcal{J}_*(\lambda) \lambda^{n-1} d\lambda d\sigma(b).$$

ただし, $\mathcal{J}_*(\lambda) := |c(\lambda)|^{-2}\lambda^{-(n-1)}$. 自己共役作用素 H_0 に対するスペクトル表示

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)} : L^2(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n) \tilde{\to} L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}), d\tau)$$

を Helgason Fourier 変換を用いて以下のように定める.

$$(\mathcal{F}_0^{(\pm)} f)(\tau) := c_n 2^{-1/2}\tau^{(n-2)/4}\mathcal{J}_*^{1/2}(\sqrt{\tau})\mathcal{F}f(\pm\sqrt{\tau}, \cdot), \quad \text{a.e. } \tau \in \mathbb{R}_+.$$

また, $f \in C_0^\infty(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n)$, $\tau > 0$ に対して,

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau) f(b) := c_n 2^{-1/2}\tau^{(n-2)/4}\mathcal{J}_*^{1/2}(\sqrt{\tau})\mathcal{F}f(\pm\sqrt{\tau}, b) \quad \text{in } L^2(\boldsymbol{S}^{n-1})$$

と定義する.

J を $c(\lambda)^{-1}$ を表象とする一次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^1$ 上の Fourier マルチプライアーとする:

$$JF(t) := (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^1} e^{it\lambda} c(\lambda)^{-1}\mathcal{F}_{\mathbb{R}^1}F(\lambda)d\lambda.$$

この時, (修正) Radon 変換に対して, 以下の重み付き評価が成り立つ.

補題 4.1. ある正定数 C が存在して,

$$\left(\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} \|J\mathcal{R}f(\cdot, b)\|_{B(\mathbb{R}^1)}^2 d\sigma(b)\right)^2 \leqslant C\,\|f\|_{B(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n)}.$$

補題 4.1 と Fourier slice 定理 (2.3) を用いることで以下が従う.

命題 4.2. 任意の $\tau > 0$ に対して, $\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau)$ は, *Banach* 空間 $B(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n)$ から $L^2(\boldsymbol{S}^{n-1})$ への有界線形作用素に一意的に拡張され, 次の評価が成り立つ.

$$\left\|\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau) f\right\|_{L^2(\boldsymbol{S}^{n-1})} \leqslant C\tau^{-1/4}\,\|f\|_{B(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n)}.$$

また, $f \in B(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n)$ に対して,

$$(\mathcal{F}_0^{(\pm)} f)(\tau) = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau) f, \ \text{a.e. } \tau > 0.$$

実双曲空間上の散乱作用素 $\hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n}$ を以下で定義する.

$$\hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n} := \mathcal{F}_0^{(+)} \circ (\mathcal{F}_0^{(-)})^*.$$

定義の仕方から, $\hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n}$ は Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}), d\tau)$ 上のユニタリ作用素となる. この時, 実双曲空間上の Helgason Fourier 変換の像の持つ対称性,

$$\int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} e^{(-i\lambda+\rho)A(x,b)}\psi(-\lambda, b)db = \int_{\boldsymbol{S}^{n-1}} e^{(i\lambda+\rho)A(x,b)}\psi(\lambda, b)db$$

に注意すると, 以下が成り立つことがわかる.

命題 4.3. 任意の $\tau > 0$ に対して, 以下を満たす $L^2(S^{n-1})$ 上のユニタリ作用素 $\hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n}(\tau)$ が一意的に存在する.

$$\hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n}(\tau)[e^{(i\sqrt{\tau}+\rho)(A(x_0,b))}] = e^{(-i\sqrt{\tau}+\rho)(A(x_0,b))}, \quad x_0 \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n.$$

さらに, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\boldsymbol{S}^{n-1}), d\tau)$ に対して,

$$(\hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n}\hat{f})(\tau) = \hat{S}_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^n}(\tau)\hat{f}(\tau), \quad \text{a.e. } \tau > 0.$$

次に, 斉次 Helmholtz 方程式

$$(-\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} - \rho^2 - \tau)u = 0, \quad \tau > 0, \tag{4.1}$$

の解空間について考察する. 任意の $\varphi \in L^2(S^{n-1})$ に対して, その (修正) Poisson 変換 $\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau)^*\varphi \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ は以下で与えられる.

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau)^*\varphi(x) = c_n 2^{-1/2}\tau^{(n-2)/4}\mathcal{J}_*^{1/2}(\sqrt{\tau})\int_{S^{n-1}} e^{(\pm i\sqrt{\tau}+\rho)A(x,b)}\varphi(b)d\sigma(b).$$

Euclid 空間の場合と同様に, $\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau)^*\varphi$ は $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素に対する一般化固有関数となる. 特に, $\varphi(b) \equiv 1$ とすると

$$\mathcal{F}_0^{(+)}(\tau)^*[1](x) = c_n\omega_{n-1}2^{-1/2}\tau^{(n-2)/4}\mathcal{J}_*^{1/2}(\sqrt{\tau})\varphi_{\sqrt{\tau}}(x)$$

が得られる. この時, (3.2) より以下の漸近展開が直ちに従う.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0^{(+)}(\tau)^*[1](x) &\simeq 2^{-1}\pi^{-1/2}\tau^{-1/4}\mathcal{J}^{-1/2}(x)r^{-(n-1)/2} \\ &\quad \times \left\{e^{+i\sqrt{\tau}r}e^{-i\xi(\sqrt{\tau})} + e^{-i\sqrt{\tau}r}e^{+i\xi(\sqrt{\tau})}\right\}.\end{aligned}$$

ただし, $e^{i\xi(\lambda)} := \overline{\boldsymbol{c}(\lambda)}/|\boldsymbol{c}(\lambda)|$. 一般の $\varphi \in L^2(S^{n-1})$ に対する $\mathcal{F}_0^{(+)}(\tau)^*\varphi$ の無限遠での漸近展開は, 散乱行列 $\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)$ を用いて以下のように表わされる.

命題 4.4. $x \in \boldsymbol{B}^n \setminus \{o\}$ に対して, $(r, \hat{x}) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ を $x = \tanh(r/2)\hat{x}$ により一意的に定義する (特に $r = d(x, o)$). このとき, 任意の $\tau > 0$, $\varphi \in L^2(S^{n-1})$ に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0^{(+)}(\tau)^*\varphi(x) &\simeq 2^{-1}\pi^{-1/2}\tau^{-1/4}\mathcal{J}^{-1/2}(x)r^{-(n-1)/2} \\ &\quad \times \left\{e^{+i\sqrt{\tau}r}e^{-i\xi(\sqrt{\tau})}\varphi(\hat{x}) + e^{-i\sqrt{\tau}r}e^{+i\xi(\sqrt{\tau})}\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)^*\varphi(\hat{x})\right\}.\end{aligned}$$

また, $\mathcal{F}_0^{(-)}(\tau)^* = \mathcal{F}_0^{(+)}(\tau)^* \circ \hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)$ より,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0^{(-)}(\tau)^*\varphi(x) &\simeq 2^{-1}\pi^{-1/2}\tau^{-1/4}\mathcal{J}^{-1/2}(x)r^{-(n-1)/2} \\ &\quad \times \left\{e^{+i\sqrt{\tau}r}e^{-i\xi(\sqrt{\tau})}\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)\varphi(\hat{x}) + e^{-i\sqrt{\tau}r}e^{+i\xi(\sqrt{\tau})}\varphi(\hat{x})\right\}.\end{aligned}$$

命題 4.4 から, 直ちに以下が得られる.

系 4.5. 任意の $\tau > 0$, $\varphi \in L^2(S^{n-1})$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_{d(x,o)<R}|\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau)^*\varphi(x)|^2 d\mu(x) = (2\pi)^{-1}\tau^{-1/2}\|\varphi\|^2_{L^2(S^{n-1})}.$$

Euclid 空間上の Agmon-Hörmander の結果と同様に, 斉次 Helmholtz 方程式 (4.1) の解空間は以下のように (修正) Poisson 変換により特徴付けられる.

定理 4.6. 任意の $\tau > 0$ に対して, 以下の *Banach* 空間としての同型が成り立つ.

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau)^* : L^2(S^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \left\{u \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*; (-\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} - \rho^2 - \tau)u = 0\right\}.$$

次に, レゾルベントの諸性質について述べる. $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ に対して, $R_0(z) := (H_0 - z)^{-1}$ とおく. このとき, Plancherel の公式と Fourier slice 定理 (2.3) により以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&(R_0(z)f_1, f_2)_{L^2(X)} \\
&= \pi c_n^2 \int_{S^{n-1}} \left((-\Delta_{\mathbb{R}^1} - z)^{-1} J\mathcal{R}f_1(\cdot, b), J\mathcal{R}f_2(\cdot, b) \right)_{L^2(\mathbb{R}^1)} d\sigma(b).
\end{aligned}
$$

(修正) Radon 変換に対する重み付き評価 (補題 4.1) と, 1 次元 Euclid 空間上のレゾルベント $(-\Delta_{\mathbb{R}^1} - z)^{-1}$ に対する極限吸収原理を組み合わせることで以下が得られる.

命題 4.7. $\mathbb{C}_\pm := \{z \in \mathbb{C}; \pm \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ とおく. 任意の $f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対して, $R_0(z)f$ は $\mathbb{C}^\pm \setminus \{0\}$ 上の $B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*$-値汎弱連続関数に一意的に拡張される. 任意の $\tau > 0$ に対して,

$$
R_0(\tau \pm i0)f := \text{w}^*\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} R_0(\tau \pm i\varepsilon)f \quad \textit{in } B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*
$$

とおく. このとき, 任意のコンパクト集合 $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}^\pm \setminus \{0\}$ に対して, 正定数 $C_{\mathcal{K}}$ が存在して,

$$
\|R_0(z)f\|_{B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*} \leqslant C_{\mathcal{K}} \|f\|_{B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})}, \quad z \in \mathcal{K}, f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*
$$

が成り立つ.

さらに, レゾルベントの境界値 $R_0(\tau \pm i0)$ に対して, 以下の漸近展開が成り立つ.

定理 4.8. 任意の $\tau > 0$, $f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対して, 以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&R_0(\tau \pm i0)f(x) \\
&\simeq \pm i\sqrt{\pi}\tau^{-1/4} \mathcal{J}^{-1/2}(x) r^{-(n-1)/2} e^{\pm i\sqrt{\tau}r} e^{\mp i\xi(\sqrt{\tau})} \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau) f(\hat{x}).
\end{aligned}
$$

系 4.9. $\tau > 0$, $f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対して

$$
\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{d(x,o)<R} |R_0(\tau \pm i0)f(x)|^2 d\mu(x) = \pi\tau^{-1/2} \left\| \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\tau) f \right\|^2_{L^2(S^{n-1})}.
$$

次に, 非斉次 Helmholtz 方程式

$$
(-\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} - \rho^2 - \tau)u = f, \quad f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}), \tau > 0, \tag{4.2}
$$

の解について考察する. 任意の $f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対して, Banach 空間 $B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*$ に属する一般解 $u_\pm$ は以下で与えられる.

$$
u_\pm = R_0(\tau \pm i0)f + \mathcal{F}_0^{(\mp)}(\tau)^* \varphi_\mp, \quad \varphi_\mp \in L^2(S^{n-1}).
$$

命題 4.4 と定理 4.8 により, 非斉次 Helmholtz 方程式 (4.2) の $B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*$ における一般解は, 無限遠で外向き, 内向きの球面波で近似される. 非斉次 Helmholtz 方程式の解 u が, 無限遠で外向き (resp. 内向き) の球面波のみで近似されるための必要十分条件は, $u = R_0(\tau + i0)f$ (resp. $u = R_0(\tau - i0)f$) となることである. このとき, 以下が成り立つ.

$$
(\partial_r \mp i\sqrt{\tau} + \rho) R_0(\tau \pm i0) \simeq 0. \tag{4.3}
$$

ここで, ∂_r は以下で定義される $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}} \setminus \{o\}$ 上のベクトル場である:

$$
\partial_r := \operatorname{grad}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(d(x, o)).
$$

以下に見るように, 条件 (4.3) (放射条件) が非斉次 Helmholtz 方程式の解が, 無限遠で外向き, または内向きの球面波のみで近似されるための必要十分条件を与える.

命題 4.10 (放射条件). $\tau > 0$, $f \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ に対して, $u \in B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*$ が非斉次 *Helmholtz* 方程式

$$(-\Delta_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}} - \rho^2 - \tau)u = f$$

を満たすと仮定する. このとき, 以下の条件は同値となる.

(i) $u = R_0(\tau + i0)f$ (*resp.* $u = R_0(\tau - i0)f$).

(ii) $(\partial_r - i\sqrt{\tau} + \rho)u \simeq 0$ (*resp.* $(\partial_r + i\sqrt{\tau} + \rho)u \simeq 0$).

以下では, Euclid 空間における Laplace 作用素に対する散乱との違いを述べる. Euclid 空間の場合, 散乱作用素 $\hat{S}_{\mathbb{R}^n}(\tau)$ は以下で与えられる.

$$\hat{S}_{\mathbb{R}^n}(\tau)\varphi(\omega) = \varphi(-\omega).$$

従って, Euclid 空間の場合には散乱作用素 $\hat{S}_{\mathbb{R}^n}(\tau)$ は エネルギー τ に依らない. また, $\hat{S}_{\mathbb{R}^n}$ は単位球面 S^{n-1} 上の Fourier 積分作用素を定めることが分かる. (擬微分作用素にはならないことに注意.) 一方, 実双曲空間の場合には, 散乱行列 $\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)$ は具体的に以下で与えられることが知られている (例えば [1] を参照).

$$\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)\varphi(b) = \int_{S^{n-1}} \hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(b, b'; \tau)\varphi(b')d\sigma(b'),$$
$$\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(b, b'; \tau) := \omega_{n-1}^{-1} c(\sqrt{\tau})^{-1} \left(\frac{|b - b'|}{2}\right)^{2(i\sqrt{\tau}-\rho)}.$$

この表示式から, 散乱行列 $\hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)$ はエネルギー τ に依存し, 単位球面 S^{n-1} 上の擬微分作用素を定めることが分かる. $L^2(S^{n-1})$ 上のユニタリ作用素 $\hat{S}_o$ を $\hat{S}_o\varphi(b) := \varphi(-b)$ により定義する. このとき, 高エネルギー極限 ($\tau \to \infty$) と低エネルギー極限 ($\tau \downarrow 0$) において以下が成り立つ:

$$\text{s-}\lim_{\tau\to\infty} \hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau) = \hat{S}_o \quad \text{in } L^2(S^{n-1}),$$
$$\text{s-}\lim_{\tau\downarrow 0} \hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau) = \mathrm{Id}_{S^{n-1}} \quad \text{in } L^2(S^{n-1}).$$

次に, 命題 4.4 における (修正) Poisson 変換に対する漸近展開公式の主要部について考察する. $\varphi \in L^2(S^{n-1})$, $\tau > 0$ に対して, (修正) Poisson 変換 $\mathcal{F}_0^{(+)}(\tau)^*\varphi$ の主要部 $L(x, \tau; \varphi)$ を以下で定義する.

$$L(x, \tau; \varphi) := \mathcal{J}^{-1/2}(x) r^{-(n-1)/2} \times \left\{ e^{i\sqrt{\tau}r} e^{-i\xi(\sqrt{\tau})}\varphi(\hat{x}) + e^{-i\sqrt{\tau}r} e^{i\xi(\sqrt{\tau})} \hat{S}_{\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}}(\tau)^*\varphi(\hat{x}) \right\}.$$

ここで, 相空間上の Plancherel 測度に対して次が成り立つことに注意する.

$$C^{-1}r^n \leqslant \int_{0<\lambda<r} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \leqslant Cr^n, \quad r > 1,$$
$$C^{-1}r^3 \leqslant \int_{0<\lambda<r} |c(\lambda)|^{-2} d\lambda \leqslant Cr^3, \quad 0 < r < 1.$$

つまり, 実双曲空間上の Fourier 変換に対する Plancherel 測度は, 無限遠 (高エネルギー) と原点近傍 (低エネルギー) では一般に異なる漸近挙動を持つ. このとき, 主要部は高エネルギー極限, 低エネルギー極限で以下の漸近挙動を持つ.

命題 4.11. (i) $\tau \to \infty$ のとき, 次の漸近評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} L(x,\tau;\varphi) =& \mathcal{J}^{-1/2}(x) r^{-(n-1)/2} \\ & \times \left\{ e^{i\sqrt{\tau}r} e^{-(n-1)\pi i/4} \varphi(\hat{x}) + e^{-i\sqrt{\tau}r} e^{(n-1)\pi i/4} \varphi(-\hat{x}) \right\} + o(1) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{in } B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*. \end{aligned}$$

(ii) $\tau \downarrow 0$ のとき, 次の漸近評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} L(x,\tau;\varphi) =& \mathcal{J}^{-1/2}(x) r^{-(n-1)/2} \\ & \times \left\{ e^{i\sqrt{\tau}r} e^{-(3-1)\pi i/4} \varphi(\hat{x}) + e^{-i\sqrt{\tau}r} e^{(3-1)\pi i/4} \varphi(\hat{x}) \right\} + o(1) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{in } B(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})^*. \end{aligned}$$

これらの漸近挙動により, 高エネルギー極限では, 測度の正規化 $\mathcal{J}^{-1/2}(x)$ を除いて, Euclid 空間の場合の主要項に漸近することが分かる. 一方, 低エネルギー極限では主要部は Euclid 空間の場合とは, まったく異なる挙動を示す. 特に, 低エネルギー極限では, 遠方から入射する球面波が, 透過して反転せずに, 完全に反射されることが分かる.

5 対称空間上の Laplace-Beltrami 作用素に対する散乱理論

始めに, 実双曲空間 $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ の等長変換群について復習する. $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の二次形式 $Q_{n,1}(\cdot,\cdot)$ を

$$Q_{n,1}(v,w) := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n - v_{n+1} w_{n+1}, \quad v, w \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

と定義する. この時, 実線型 Lie 群 $O(n,1), O_+(n,1), SO(n,1), SO_o(n,1)$ をそれぞれ以下で定義する.

$$\begin{aligned} O(n,1) &= \{ g = (g_{ij}) \in GL(n+1,\mathbb{R}); \\ & \qquad\qquad Q_{n,1}(gv, gw) = Q_{n,1}(v,w), v, w \in \mathbb{R}^{n+1} \}, \\ O_+(n,1) &= \{ g = (g_{ij}) \in O(n,1); g_{n+1,n+1} > 0 \}, \\ SO(n,1) &= \{ g = (g_{ij}) \in O(n,1); \det g = 1 \}, \\ SO_o(n,1) &= \{ g = (g_{ij}) \in SO(n,1); g_{n+1,n+1} > 0 \}. \end{aligned}$$

この時, Lie 群 $O_+(n,1)$ の $\boldsymbol{B}^n$ への作用

$$O_+(n,1) \times \boldsymbol{B}^n \ni (g,x) \mapsto g \cdot x \in \boldsymbol{B}^n$$

が以下で定義される.

$$(g \cdot x)_j := \frac{g_{j,n+1}(1+|x|^2) + \sum_{k=1}^n 2 g_{jk} x_k}{(1-|x|^2) + g_{n+1,n+1}(1+|x|^2) + \sum_{k=1}^n 2 g_{n+1,k} x_k}, \quad j = 1, \dots, n.$$

$\mathrm{Isom}(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ を $\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}$ の等長変換群とすると, 上の作用に関して $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}) \simeq O_+(n,1)$ が成り立つ. とくに, $\mathrm{Isom}_o(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}})$ を恒等変換を含む連結成分とすると, $\mathrm{Isom}_o(\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}}) \simeq SO_o(n,1)$ が成り立つ. $G := SO_o(n,1)$ とおく. K を G の 原点 o における等方群とする:

$$K = \{ k \in G; k \cdot o = o \}.$$

このとき,

$$K = \begin{pmatrix} SO(n) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \cdot x = Tx, \quad k = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K.$$

さらに, 商空間 G/K に C^∞-級微分構造が入り以下の C^∞-級微分同相写像が得られる:

$$G/K \ni gK \mapsto g \cdot o \in \boldsymbol{B}^n.$$

一般の非コンパクト型対称空間 X についても, $G = \mathrm{Isom}_o(X)$ とおくと G は Lie 群となり, K をある点 $o \in X$ における等方群とすると, C^∞-級微分同相 $X \simeq G/K$ が成り立つ.

ここで, 非コンパクト型対称空間の具体例をいくつか挙げる.

(i) (ランク 1 の非コンパクト型対称空間) ランク 1 の非コンパクト対称空間は以下の 4 種類の双曲空間である:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d_{\mathbb{R}} &= SO_o(d,1)/SO(d), & \dim \mathcal{H}^d_{\mathbb{R}} &= d,\\
\mathcal{H}^d_{\mathbb{C}} &= SU(d,1)/S(U_d \times U_1), & \dim \mathcal{H}^d_{\mathbb{C}} &= 2d,\\
\mathcal{H}^d_{\mathbb{H}} &= Sp(d,1)/Sp(d) \times Sp(1), & \dim \mathcal{H}^d_{\mathbb{H}} &= 4d,\\
\mathcal{H}^2_{\mathbb{O}} &= F_{4(-20)}/Spin(9), & \dim \mathcal{H}^2_{\mathbb{O}} &= 8 \cdot 2 = 16.
\end{aligned}$$

それぞれ, 実, 複素, 四元数双曲空間, そして八元数双曲平面である.

(ii) (非コンパクト型 Hermite 対称空間) 非コンパクト型 Hermite 対称空間は有界対称領域と自然に同一視される. "規約" な有界対称領域は 6 種類ある: 4 種の古典型 $\mathrm{I}_{m,m'}$, II_m, III_m, IV_m と 2 種の例外型 V, VI.

(iii) (複素型) $X = K_{\mathbb{C}}/K$, ただし K は単連結, 単純コンパクト Lie 群, $K_{\mathbb{C}}$ は Lie 群 K の複素化である (例えば $SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$, $SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$, $Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$ 等).

一般の非コンパクト型対称空間上において, 調和解析の理論と Helgason Fourier 変換, Radon 変換, 一般化球関数に対する詳細な解析を用いることで, 実双曲空間上の散乱に関する結果を一般化することができる. 一般の場合の結果については, [11] において述べる予定である.

参考文献

[1] S. Agmon, *On the spectral theory of the Laplacian on noncompact hyperbolic manifolds*, Journées "Équations aux derivées partielles" (Saint Jean de Monts, 1987), École Polytech., Palaiseau, 1987, pp. Exp. No. XVII, 16.

[2] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. Analyse Math. **30** (1976), 1–38.

[3] S. Helgason, *Eigenspaces of the Laplacian; integral representations and irreducibility*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 328–353.

[4] ______, "Groups and geometric analysis", Pure and Applied Mathematics, vol. 113, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.

[5] ______, "Geometric analysis on symmetric spaces", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[6] ______, "Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces", Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[7] P. D. Hislop, *The geometry and spectra of hyperbolic manifolds*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), no. 4, 715–776. Spectral and inverse spectral theory (Bangalore, 1993).

[8] L. Hörmander, "The analysis of linear partial differential operators. II", Vol. 257, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[9] ______, "The analysis of linear partial differential operators. III", Vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[10] H. Isozaki and Y. Kurylev, *Spectral theory and inverse problems on asymptotically hyperbolic manifolds*, Spectral and scattering theory and related topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B16, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010, pp. 29–73.

[11] K. Kaizuka, *Scattering theory of the Laplacian on symmetric spaces of noncompact type*, in preparation.

[12] R. S. Strichartz, *Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians*, J. Funct. Anal. **87** (1989), no. 1, 51–148.