

六角格子上のシュレーディンガー作用素の逆散乱問題について

筑波大学大学院数理物質科学研究科 安藤 和典 (Kazunori Ando)

1 はじめに

2009 年度の本研究集会において、六角格子上の離散シュレーディンガー作用素のスペクトルについての結果を報告させていただいた。ここでは、六角格子上の離散ラプラシアンについての基本的なスペクトルの性質を Fourier 変換を用いて論じ、Mourre 評価を出発点として、ポテンシャルの台が有限な場合の離散シュレーディンガー作用素のスペクトルの性質とスペクトル表示を示した。さらに、trace class に対する摂動理論を用いて、波動作用素の存在と完全性を述べた後、散乱作用素をスペクトル表示を用いて S -行列に分解し、散乱振幅の積分核の表示を求めた。

さらに、六角格子上の離散シュレーディンガー作用素に対する逆散乱問題の展望について、正方格子上で Isozaki, Korotyaev [11] が論じているようなポテンシャルの再構成を行うに当たり、いくつかの問題点を述べた：

- エネルギーを複素数に解析接続した時の $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^2$ の漸近挙動、
- レゾルベント $\hat{R}(z)$ を $z \rightarrow \infty$ とした時の減衰評価。

以降の節にて、それらの問題点の解決について Isozaki, Korotyaev [11] の正方格子の場合と比較しながら、六角格子上でのポテンシャルの再構成について論じる。

ここで、簡単にシュレーディンガー作用素の逆散乱問題の歴史を見ると、1950 年代に \mathbb{R} 上で Gel'fand, Levitan, [8] および Marčenko [17] によって解決された。その後、1970 年代に Faddeev [7] および Newton [18] により Faddeev のグリーン作用素を用いた Gel'fand-Levitan 理論の多次元版が研究された。1980 年代には、 $\bar{\partial}$ -approach によりシュレーディンガー作用素の逆散乱問題は積極的に研究された (Beals and Coifman [3], Nachman and Ablowitz [1], Khenkin and Novikov [14])。さらに詳しくは、Isozaki [10] を参照されたい。

離散シュレーディンガー作用素の逆散乱問題については、1960 年代に Èskina [6] による \mathbb{Z}^d 上の結果がある。1970 年代に Case と Kac により Gel'fand-Levitan-Marčenko 理論の離散版が \mathbb{Z} 上でも展開できることが指摘された。最近になって、Isozaki, Korotyaev [11] により複素 Born 近似を用いて正方格子上で有限な台を持つポテンシャルに対する再構成手続きが研究された。本稿における六角格子上の離散シュレーディンガー作用素に対するポテンシャルの再構成手続きは、本質的に [11] にしたがっている。さらに最近になって、正方格子上で有限な台を持つポテンシャルに対して、固定エネルギーの散乱振幅の観測に基づく再構成方法が Isozaki, Morioka [12] により研究されている。

図 1 に六角格子を图示する。六角格子はグラフェンの離散モデルと考えられる。グラフェンは炭素原子が二次元的に蜂の巣状に配置された、原子一個分の厚さのシート状の物質である。グラフェンは 2004 年に発見

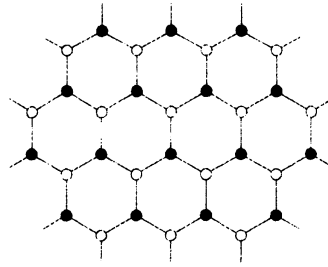


図1 六角格子は、白丸と黒丸が頂点、それらの間の線分を辺としてグラフの構造を持つ

されて以来、その特異な物性により注目され (Neto, Guinea, Peres, Novoselov and Geim [4]), さまざまな応用が考えられている。

我々は六角格子をグラフと見て、グラフ上の離散シュレーディンガー作用素を考える。そのために、簡単にグラフ理論の用語を説明しよう。グラフ $G = (V(G), E(G))$ は高々可算個の頂点集合 $V(G)$ と、辺集合 $E(G)$ とからなる。 $E(G)$ の元 e はある二つの頂点 $u, v \in V(G)$ との間の隣接関係 ($u \sim v$ と書く) を定めるものとする。ここで考えるグラフ G は多重辺 (二つの頂点を結ぶ二つ以上の辺)、及び自己ループ (同一頂点を結ぶ辺) はないものとする。頂点 v の近傍 $N_v(G) = \{u \in V(G); u \sim v\}$ を用いて、 v の次数 $\deg v = \#N_v(G)$ を定義する。ここではさらに、グラフ G は連結で局所有限であるとする: $0 < \deg v < \infty$. グラフ G 上の離散ラプラシアン Δ_{disc}^G は、 $\hat{f}: V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ に対して以下で定義される:

$$\Delta_{disc}^G \hat{f}(v) = \frac{1}{\deg v} \sum_{u \in N_v(G)} \hat{f}(u) - \hat{f}(v), \quad v \in V(G). \quad (1)$$

$-\Delta_{disc}^G$ は $l^2(G) = \{\hat{f}: V(G) \rightarrow \mathbb{C}; \|\hat{f}\|_{l^2(G)}^2 = \sum_{v \in V(G)} |\hat{f}(v)|^2 \deg v < \infty\}$ 上で有界な自己共役作用素であり、 $\sigma(-\Delta_{disc}^G) \subset [0, 2]$ となることが知られている (例えば、 Chung [5] を参照)。

以下、グラフ G は六角格子とする。ここでは簡単のため、自由ハミルトニアン \hat{H}_0 を隣接行列とする:

$$\hat{H}_0 = 3(\Delta_{disc}^G + 1). \quad (2)$$

次の命題は、次節でフーリエ変換と行列の対角化を用いて示す:

命題 1.1. $\sigma(\hat{H}_0) = \sigma_{ac}(\hat{H}_0) = [-3, 3]$, $\sigma_{pp}(\hat{H}_0) = \sigma_{sc}(\hat{H}_0) = \emptyset$.

ポテンシャル \hat{q} は実数値掛け算作用素とする:

$$\hat{q}\hat{f}(v) = \hat{q}(v)\hat{f}(v), \quad v \in V(G). \quad (3)$$

離散シュレーディンガー作用素 \hat{H} は、自由ハミルトニアン \hat{H}_0 とポテンシャル \hat{q} の和とする:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{q}. \quad (4)$$

ポテンシャルに以下の仮定を置く:

(A). \hat{q} は有限な台を持つ、すなわち、有限個の $v \in V(G)$ を除き $\hat{q}(v) = 0$ とする。

仮定 (A) によりポテンシャルはコンパクトな摂動になるので、本質的スペクトルは不変である (ワイルの定理):

命題 1.2. $\sigma_{ess}(\hat{H}) = \sigma_{ess}(\hat{H}_0) = [-3, 3]$.

また、ポテンシャルは trace class の摂動になるので、波動作用素

$$\hat{W}_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0} \quad (5)$$

が存在し、完全である (例えば, Reed-Simon [20], Theorem XI.8). 散乱作用素を

$$\hat{S} = \hat{W}_{+}^* \hat{W}_{-} \quad (6)$$

で定義する. この後の節で説明するスペクトル表示 $\hat{\mathcal{F}}_0$ を使って

$$S = \hat{\mathcal{F}}_0 \hat{S} \hat{\mathcal{F}}_0^* \quad (7)$$

とおくと, \hat{S} は S -行列に分解される:

$$S = \int_{-3}^3 \oplus S(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

散乱振幅 $A(\lambda)$ を以下で定義する:

$$S(\lambda) = 1 - 2\pi i A(\lambda). \quad (9)$$

主定理を述べる.

定理 1.1 (A. [2], 2012). 有限個の $v \in V(G)$ を除き $\hat{q}(v) = 0$ とする. この時, すべての本質的スペクトルの $\lambda \in \sigma_{ess}(\hat{H})$ に対する散乱振幅 $A(\lambda)$ からポテンシャル $\{\hat{q}(v)\}_{v \in V(G)}$ が一意的に計算できる.

本稿の構成は以下のようにになっている: 第二節でまず, 六角格子上の自由ハミルトニアンのスペクトルの性質を概観する. Mourre 評価を出発点として, 極限吸収原理およびトレース作用素の連続性を述べる. その後, 離散シュレーディンガー作用素のスペクトル表示を構成して, 散乱振幅の積分核をスペクトル表示を用いて表す. 詳しくは, [22] あるいは [2] を参照されたい. 第三節では, 主定理の証明の概略を説明する. その際に重要となる二つの補題を述べる. 一つは, 解析接続の補題である. もう一つは, レゾルベント評価の補題である. それら二つの補題を使いながら, 散乱振幅の積分核の漸近挙動から帰納的にポテンシャルを再構成する.

2 六角格子上の離散シュレーディンガー作用素の散乱理論について

2.1 準備

六角格子の頂点に座標を入れよう. 頂点間の隣接関係だけに注目すると, 六角格子は図 2.1 のように図示できる. ここで, 頂点はすべて \mathbb{Z}^2 上に配置しているものとする. すなわち, 頂点集合と辺集合は以下のようになる:

$$V(G) = \mathbb{Z}^2, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E(G) = & \{[m, n]; m, n \in \mathbb{Z}^2, n_1 = m_1 + 1, m_2 = n_2\} \\ & \cup \{[m, n]; m, n \in \mathbb{Z}^2, m_1 = n_1, m_2 \in 2\mathbb{Z} + 1, n_2 = m_2 + 1\} \\ & \cup \{[m, n]; m, n \in \mathbb{Z}^2, m_1 = n_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}, n_2 = m_2 + 1\}. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, $m, n \in \mathbb{Z}^2$ を結ぶ線分を $[m, n]$ と表した. 六角格子の任意の頂点次数は 3 であることを考慮すると, $l^2(G)$ はノルム $\|\hat{f}\|_{l^2(G)}^2 = 3 \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} |\hat{f}(m)|^2$ が入った \mathbb{Z}^2 上の l^2 -空間である.

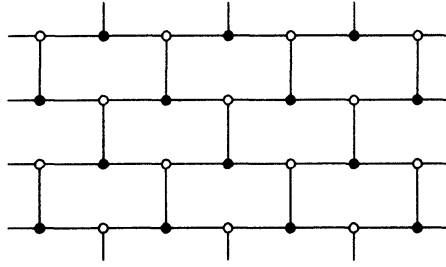


図2 白丸, 及び黒丸はそれぞれ \vec{e}_1, \vec{e}_2 を基底として \mathbb{Z}^2 の構造をなす.

\mathbb{Z}^2 に六角格子の構造を入れよう: $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}_e^2 \cup \mathbb{Z}_o^2$. ここで, \mathbb{Z}_e^2 と \mathbb{Z}_o^2 は, 図 2.1 でそれぞれ黒丸と白丸で表される集合である:

$$\mathbb{Z}_e^2 = \{(n_1, n_2); n_1 + n_2 \in 2\mathbb{Z}\}, \quad (12)$$

$$\mathbb{Z}_o^2 = \{(n_1, n_2); n_1 + n_2 - 1 \in 2\mathbb{Z}\}. \quad (13)$$

\mathbb{Z}_e^2 と \mathbb{Z}_o^2 には, $\vec{e}_1 = (1, 1)$ と $\vec{e}_2 = (-1, 1)$ を基底とした \mathbb{Z}^2 の構造が入る. 詳しくは, 以下のような標準的な同型写像が両者の間にそれぞれ存在する:

$$\mathbb{Z}_e^2 \ni (n_1, n_2) \mapsto (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad n_1 = m_1 - m_2, n_2 = m_1 + m_2, \quad (14)$$

$$\mathbb{Z}_o^2 \ni (n_1, n_2) \mapsto (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad n_1 = m_1 - m_2, n_2 = 1 + m_1 + m_2. \quad (15)$$

\mathbb{Z}_e^2 と \mathbb{Z}_o^2 は六角格子において最小の二次元繰り返し構造であることに注意すると, 六角格子上の離散ラプラスリアンの解析には差分作用素のシステムを用いるのが有効である.

次のような自然なユニタリ写像 $\mathcal{J}: l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow l^2(G)$ が定義できる:

$$\mathcal{J}: l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2) \ni \hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2) \mapsto \hat{g} \in l^2(G), \quad (16)$$

$$\hat{g}(n_1, n_2) = (\mathcal{J}\hat{f})(n_1, n_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{f}_1(m_1, m_2), & \text{if } (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_e^2, \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{f}_2(m_1, m_2), & \text{if } (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_o^2. \end{cases} \quad (17)$$

ここで, (m_1, m_2) はそれぞれ式 (14) および (15) で定義されたものである. $\sqrt{3}$ は六角格子の頂点次数に由来するもので, $l^2(G)$ のノルムの重みに寄与していた.

$(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_e^2$ の隣接頂点は $(n_1 \pm 1, n_2)$, $(n_1, n_2 + 1)$ であり, $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_o^2$ の隣接頂点は $(n_1 \pm 1, n_2)$, $(n_1, n_2 - 1)$ である. したがって, \hat{H}_0 は以下のように表せる: $\hat{g} \in l^2(G)$ に対して,

$$(\hat{H}_0\hat{g})(n_1, n_2) = \begin{cases} \hat{g}(n_1, n_2 + 1) + \hat{g}(n_1 - 1, n_2) + \hat{g}(n_1 + 1, n_2), & \text{if } (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_e^2, \\ \hat{g}(n_1, n_2 - 1) + \hat{g}(n_1 - 1, n_2) + \hat{g}(n_1 + 1, n_2), & \text{if } (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}_o^2. \end{cases} \quad (18)$$

したがって, \mathcal{J} を使うと \hat{H}_0 は $l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2)$ 上で以下のように表すことができる: $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2) \in l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2)$ に対して,

$$(\mathcal{J}^*\hat{H}_0\mathcal{J}\hat{f})_1(m_1, m_2) = \hat{f}_2(m_1, m_2) + \hat{f}_2(m_1 - 1, m_2) + \hat{f}_2(m_1, m_2 - 1), \quad (19)$$

$$(\mathcal{J}^*\hat{H}_0\mathcal{J}\hat{f})_2(m_1, m_2) = \hat{f}_1(m_1, m_2) + \hat{f}_1(m_1 + 1, m_2) + \hat{f}_1(m_1, m_2 + 1). \quad (20)$$

以下のヒルベルト空間を導入しよう：

$$l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) = \left\{ \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(m) \\ \hat{f}_2(m) \end{pmatrix}_{m \in \mathbb{Z}^2}; \|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} (|\hat{f}_1(m)|^2 + |\hat{f}_2(m)|^2) < \infty \right\}. \quad (21)$$

$l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ と $l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2)$ の間には以下のような自然なユニタリ同型な写像 \mathcal{I} が存在する：

$$\mathcal{I} : l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) \ni \begin{pmatrix} \hat{f}_1(m) \\ \hat{f}_2(m) \end{pmatrix}_{m \in \mathbb{Z}^2} \mapsto ((\hat{f}_1(m))_{m \in \mathbb{Z}^2}, (\hat{f}_2(m))_{m \in \mathbb{Z}^2}) \in l^2(\mathbb{Z}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}^2). \quad (22)$$

\mathcal{I} と \mathcal{J} を用いて \hat{H}_0 を $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ 上で表すと以下のようになる：

$$(\mathcal{I}^* \mathcal{J}^* \hat{H}_0 \mathcal{J} \mathcal{I}) = \begin{pmatrix} \hat{f}_2(m_1, m_2) + \hat{f}_2(m_1 - 1, m_2) + \hat{f}_2(m_1, m_2 - 1) \\ \hat{f}_1(m_1, m_2) + \hat{f}_1(m_1 + 1, m_2) + \hat{f}_1(m_1, m_2 + 1) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(m) \\ \hat{f}_2(m) \end{pmatrix}_{m \in \mathbb{Z}^2} \in l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2). \quad (23)$$

記号が煩雑になるで、 $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ 上の作用素 $\mathcal{I}^* \mathcal{J}^* \hat{H}_0 \mathcal{J} \mathcal{I}$ を以降では改めて \hat{H}_0 と書くことにする。

$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2 \simeq [-\pi, \pi)^2$ とし、ヒルベルト空間

$$L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2) = \left\{ f(\xi) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix}; \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)}^2 = \int_{\mathbb{T}^2} (|f_1(\xi)|^2 + |f_2(\xi)|^2) d\xi < \infty \right\} \quad (24)$$

を導入する。 $\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ を成分ごとにフーリエ級数をとる作用素とする：

$$\mathcal{F} \hat{f}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_1(n) e^{in\xi} \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}_2(n) e^{in\xi} \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(n) \\ \hat{f}_2(n) \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{Z}^2} \in l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2). \quad (25)$$

\mathcal{F} はユニタリ作用素を定める。 \mathcal{F} の共役作用素 $\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ は、成分ごとにフーリエ係数と取る作用素である。

$H_0 = \mathcal{F} \hat{H}_0 \mathcal{F}^*$ とおくと、 H_0 は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上の 2×2 対称行列の掛け算作用素となる：

$$(H_0 f)(\xi) = H_0(\xi) f(\xi), \quad f = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2). \quad (26)$$

ここで、

$$H_0(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(\xi) \\ \bar{\alpha}(\xi) & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\alpha(\xi) = 1 + e^{i\xi_1} + e^{i\xi_2}, \quad \bar{\alpha}(\xi) = \overline{\alpha(\xi)}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^2, \quad (28)$$

である。

ユニタリ行列 $U(\xi)$ から誘導される $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上のユニタリ作用素 \mathcal{U} を定義しよう：

$$(\mathcal{U} f)(\xi) = U(\xi) f(\xi), \quad U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha(\xi)/|\alpha(\xi)| \\ 1 & -\alpha(\xi)/|\alpha(\xi)| \end{pmatrix}. \quad (29)$$

$U(\xi)$ により $H_0(\xi)$ は対角化される。 $\tilde{H}_0 = \mathcal{U} H_0 \mathcal{U}^*$ とおくと、 \tilde{H}_0 は 2×2 対角行列による掛け算作用素となる：

$$(\tilde{H}_0 f)(\xi) = \tilde{H}_0(\xi) f(\xi), \quad f = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2). \quad (30)$$

ここで,

$$\tilde{H}_0(\xi) = U(\xi)H_0(\xi)U(\xi)^* = \begin{pmatrix} p(\xi) & 0 \\ 0 & -p(\xi) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$p(\xi) = |\alpha(\xi)| = \sqrt{3 + 2\cos\xi_1 + 2\cos\xi_2 + 2\cos(\xi_1 - \xi_2)}, \quad (32)$$

である.

$\xi_{0,j}$, $j = 1, 2$ を以下のようにおく :

$$\xi_{0,1} = \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right), \quad \xi_{0,2} = \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \in \mathbb{T}^2. \quad (33)$$

$p(\xi)$ の性質を以下にまとめる. 証明は直接計算することにより示すことができるので省略する.

命題 2.1. $p(\xi)$ は \mathbb{T}^2 上の連続関数であり, 0 から 3 まですべての値をとる. さらに, 以下の性質をもつ :

1. $p(\xi) = 0 \iff \xi = \xi_{0,1}$ または $\xi_{0,2}$.
2. $p(\xi) = 3 \iff \xi = (0, 0)$.
3. $p(\xi)$ は $\mathbb{T}^2 \setminus \{\xi_{0,1}, \xi_{0,2}\}$ 上で解析的である.

この命題と \tilde{H}_0 が対角行列 $\text{diag}(p(\xi), -p(\xi))$ の掛け算作用素になっていることから, 命題 1.1 が示される. $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ 上でのポテンシャルをまた, 記号の簡単のために \hat{q} と書く. \hat{q} は, 2×2 実数値対角行列 $\hat{q}(n)$ の掛け算作用素となる :

$$(\hat{q}\hat{f})(n) = \begin{pmatrix} \hat{q}_1(n) & 0 \\ 0 & \hat{q}_2(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_1(n) \\ \hat{f}_2(n) \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \left(\begin{pmatrix} \hat{f}_1(n) \\ \hat{f}_2(n) \end{pmatrix}\right)_{n \in \mathbb{Z}^2} \in l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2). \quad (34)$$

q と \bar{q} を以下のようにおく :

$$q = \mathcal{F}\hat{q}\mathcal{F}^*, \quad \bar{q} = \mathcal{U}q\mathcal{U}^*. \quad (35)$$

q と \bar{q} は, $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上において, 合成積で書ける作用素である :

$$(qf)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{T}^2} q_1(\xi - \zeta) f_1(\zeta) d\zeta \\ \int_{\mathbb{T}^2} q_2(\xi - \zeta) f_2(\zeta) d\zeta \end{pmatrix}, \quad f(\xi) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2), \quad (36)$$

$$(\bar{q}f)(\xi) = \begin{pmatrix} (\bar{q}f)_1(\xi) \\ (\bar{q}f)_2(\xi) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2). \quad (37)$$

ここで, 以下のようにおいた :

$$q_j(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \hat{q}_j(n) e^{in\xi}, \quad j = 1, 2, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (\bar{q}f)_1(\xi) &= \frac{1}{2(2\pi)} \int_{\mathbb{T}^2} \left(q_1(\xi - \zeta) + \frac{\alpha(\xi)}{p(\xi)} q_2(\xi - \zeta) \frac{\bar{\alpha}(\zeta)}{p(\zeta)} \right) f_1(\zeta) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2(2\pi)} \int_{\mathbb{T}^2} \left(q_1(\xi - \zeta) - \frac{\alpha(\xi)}{p(\xi)} q_2(\xi - \zeta) \frac{\bar{\alpha}(\zeta)}{p(\zeta)} \right) f_2(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} (\bar{q}f)_2(\xi) &= \frac{1}{2(2\pi)} \int_{\mathbb{T}^2} \left(q_1(\xi - \zeta) - \frac{\alpha(\xi)}{p(\xi)} q_2(\xi - \zeta) \frac{\bar{\alpha}(\zeta)}{p(\zeta)} \right) f_1(\zeta) d\zeta \\ &\quad + \frac{q}{2(2\pi)} \int_{\mathbb{T}^2} \left(q_1(\xi - \zeta) + \frac{\alpha(\xi)}{p(\xi)} q_2(\xi - \zeta) \frac{\bar{\alpha}(\zeta)}{p(\zeta)} \right) f_2(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (40)$$

H と \hat{H} を以下のおく :

$$H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^* = H_0 + q, \quad (41)$$

$$\tilde{H} = \mathcal{U}H\mathcal{U}^* = \tilde{H}_0 + \tilde{q}. \quad (42)$$

2.2 Mourre 評価

ソボレフ空間 \mathcal{H}^s , $s \in \mathbb{R}$, を以下のように定義する :

$$\mathcal{H}^s = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2); \|f\|_s^2 = \|(1 - \Delta)^{s/2} f_1\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \|(1 - \Delta)^{s/2} f_2\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 < \infty\}. \quad (43)$$

ここで, $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2) = \{\mathbb{T}^2 \text{ 上の } \mathbb{C}^2\text{-値の超関数}\}$, $-\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$ は \mathbb{T}^2 上で周期的境界条件をつけた自己共役作用素とする. 格子上では

$$\hat{\mathcal{H}}^s = \mathcal{F}^* \mathcal{H}^s \quad (44)$$

とおく. また, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 = L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$, $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^0 = l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ とおく. Parseval の式から従う \mathcal{H}^s の特徴付けを以下に記す.

命題 2.2. $f \in \mathcal{H}^s$ の必要十分条件は, $\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (1 + |n|^2)^s \|f(n)\|_{\mathbb{C}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} (|\hat{f}_1(n)|^2 + |\hat{f}_2(n)|^2) < \infty$ である. ここで, $f = \mathcal{F}\hat{f}$ とする.

Mourre 評価を導こう. $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ に作用する一階微分作用素 A を以下のように定義する :

$$A = i \begin{pmatrix} \nabla p \cdot \nabla + \nabla \cdot \nabla p & 0 \\ 0 & -(\nabla p \cdot \nabla + \nabla \cdot \nabla p) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

ここで, $p(\xi)$ は式 (32) で定義された \mathbb{T}^2 上の関数である. 簡単な計算により, \tilde{H}_0 と A の交換子は以下のようになる :

$$i[\tilde{H}_0, A] = 2|\nabla p(\xi)|^2 I_2. \quad (46)$$

ここで, I_2 は 2×2 単位行列である. ここで, $\nabla p(\xi) = 0$ となる \mathbb{T}^2 上の点は以下のようになる :

$$\{\xi \in \mathbb{T}^2; \nabla p(\xi) = 0\} = \{(0, 0), (0, -\pi), (-\pi, 0), (-\pi, -\pi)\}. \quad (47)$$

さらに, $p(\xi) = 1$ となる \mathbb{T}^2 上の集合は以下のようになる :

$$\{\xi \in \mathbb{T}^2; p(\xi) = 1\} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^2; \xi_1 = -\pi \text{ または } \xi_2 = -\pi \text{ または } \xi_2 = \xi_1 \pm \pi\}. \quad (48)$$

式 (47) と (48) は, 簡単な計算により確かめることができる. 式 (48) の右辺は式 (47) を原点を除いて含んでいることに注意する.

$p(\xi)$ の等高線集合 M_E を定義しよう :

$$M_E = \{\xi \in \mathbb{T}^2; p(\xi) = E\}. \quad (49)$$

図 3 において, $p(\xi)$ の三次元グラフと等高線を示した. 図 3 の右図の各曲線が M_E を表している.

命題 2.1 と式 (47), および (48) より, 次の命題がわかる :

命題 2.3. $E \in (0, 3) \setminus \{1\}$ に対して, M_E は一次元の解析的な多様体である.

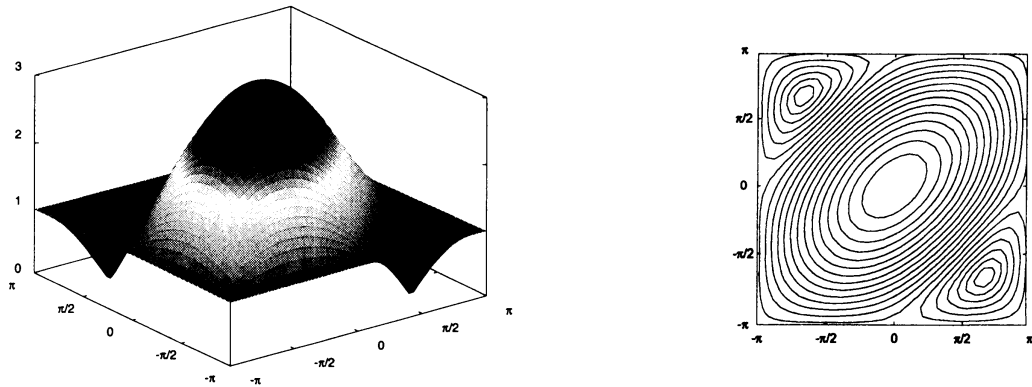


図3 $p(\xi)$ の三次元グラフ (左) と等高線 (右)

M_E 上に \mathbb{T}^2 上のルベーク測度から誘導される測度 $dM_E(\omega)$ を入れよう :

$$d\xi_1 d\xi_2 = dM_E(\omega) dE = J(\omega, E) d\omega dE. \quad (50)$$

ここで, ω は M_E の局所座標であり, $E \in (0, 3) \setminus \{1\}$ と $\omega \in M_E$ に対して $J(\omega, E)$ は解析的な関数である.

$C_0(E) = 2 \inf_{\xi \in M_E} |\nabla p(\xi)|^2$ とおくと, $E \in (0, 3) \setminus \{1\}$ に対して $C_0(E) > 0$ である. したがって, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $p^{-1}([E - \delta, E + \delta])$ 上で

$$2|\nabla p(\xi)|^2 \geq C_0(E) - \varepsilon > 0 \quad (51)$$

が成り立つので, 次のような評価を得るであろう :

$$i[\tilde{H}_0, A] \geq C_0(E) - \varepsilon. \quad (52)$$

$p(\xi)$ は $\xi_{0,1}$ と $\xi_{0,2}$ に特異点を持っているので, それらの点の十分小さな近傍で 0 となるようなカットオフ関数 $\chi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ を導入する : 十分小さな $\mu > 0$ に対して,

$$\chi(\xi) = \chi_\mu(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{if } \xi \in B_\mu(\xi_{0,1}) \cup B_\mu(\xi_{0,2}), \\ 1, & \text{if } \xi \notin B_{2\mu}(\xi_{0,1}) \cup B_{2\mu}(\xi_{0,2}). \end{cases} \quad (53)$$

ここで, $B_\mu(\xi_0) = \{\xi \in \mathbb{T}^2; |\xi - \xi_0| < \mu\}$ である. 次の作用素

$$A_\chi = \chi A \chi \quad (54)$$

は, Nelson の交換子の定理により, $C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ 上で本質的自己共役な作用素である (Reed-Simon [19], Theorem X.37). $\varepsilon > 0$ に対して十分小さな $\mu > 0$ を選んでおくと, \tilde{H}_0 に対して次の Mourre 評価を得る : 任意の実数値関数 $f \in C^\infty((E - \delta, E + \delta))$ に対して,

$$f(\tilde{H}_0) i[\tilde{H}_0, A_\chi] f(\tilde{H}_0) \geq (C_0(E) - \varepsilon) f(\tilde{H}_0)^2. \quad (55)$$

今, ポテンシャル \hat{q} は有限な台を持っていることを考慮すると, \tilde{H} に対する以下の Mourre 評価を導くことができる (\hat{q} は元々, コンパクト作用素であることに注意) :

$$E_{\tilde{H}}(I) i[\tilde{H}, A_\chi] E_{\tilde{H}}(I) \geq (C_0(E) - \varepsilon) E_{\tilde{H}}(I) + K. \quad (56)$$

ここで, $I = (E - \delta/2, E + \delta/2)$ であり, $K = K_I$ はコンパクトな作用素である.

$\tilde{R}(z) = (\tilde{H} - z)^{-1}$ とする. X と Y をバナッハ空間とすると, $\mathbf{B}(X, Y)$ で X から Y への有界作用素全体のなす空間とする. $X = Y$ のときは $\mathbf{B}(X)$ と書く. A_x に付随するソボレフ空間を $\mathcal{H}_{A_x}^s$, $s \in \mathbb{R}$, とする. すなわち, $\mathcal{H}_{A_x}^s$ は作用素 $1 + |A_x|^s$ の定義域にグラフノルムを入れた空間である. 次の定理は Mourre 理論からの帰結である:

定理 2.1. $I_0 = (-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$ とする. このとき, 以下のことが成り立つ:

1. \tilde{H} の固有値は有限多重度である. さらに, 固有値の集積点は, あったとしても $\pm 3, \pm 1, 0$ である.
2. 特異連続スペクトルは存在しない:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp}(\tilde{H}) \oplus \mathcal{H}_{ac}(\tilde{H}). \quad (57)$$

3. $s > 1/2$, $\lambda \in I_0 \setminus \sigma_{pp}(\tilde{H})$ とする. 次の極限が $\mathbf{B}(\mathcal{H}_{A_x}^s, \mathcal{H}_{A_x}^{-s})$ で存在する: $\tilde{R}(\lambda \pm i0) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{R}(\lambda \pm i\epsilon)$. $I_0 \setminus \sigma_{pp}(\tilde{H}) \ni \lambda \mapsto \tilde{R}(\lambda \pm i0)$ は連続写像であり, さらに, $J \subset I_0 \setminus \sigma_{pp}(\tilde{H})$ をコンパクトな区間とすると, 以下がなりたつ:

$$\sup_{\lambda \in J} \|\tilde{R}(\lambda \pm i0)\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H}_{A_x}^s, \mathcal{H}_{A_x}^{-s})} < \infty. \quad (58)$$

$\mathcal{H}^s \subset \mathcal{H}_{A_x}^s$ の埋め込みが連続であることを考慮すると, 以下の極限吸収原理が導かれる:

系 2.1. $s > 1/2$ とすると, 以下の評価が成り立つ:

$$\sup_{\lambda \in J} \|\tilde{R}(\lambda \pm i0)\|_{\mathbf{B}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^{-s})} < \infty. \quad (59)$$

2.3 スペクトル表示

$\lambda \in (-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$ に対して, $\tilde{R}_0(z) = (\tilde{H}_0 - z)^{-1}$ は以下のように表せる:

$$\begin{aligned} (\tilde{R}_0(z)f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} &= \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f_1(\xi)\overline{g_1(\xi)}}{p(\xi) - z} d\xi + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{f_2(\xi)\overline{g_2(\xi)}}{-p(\xi) - z} d\xi \\ &= \int_0^3 \frac{h_1(\rho)}{\rho - z} d\rho + \int_{-3}^0 \frac{h_2(-\rho)}{\rho - z} d\rho \\ &= \int_{-3}^3 \frac{h(\rho)}{\rho - z} d\rho. \end{aligned} \quad (60)$$

ここで,

$$h(\rho) = \begin{cases} h_1(\rho), & \text{if } \rho \in (0, 3) \setminus \{1\}, \\ h_2(-\rho), & \text{if } \rho \in (-3, 0) \setminus \{-1\}, \end{cases} \quad (61)$$

$$h_j(\rho) = \int_{M_{|\rho|}} f_j(\xi(\rho, \omega)) \overline{g_j(\xi(\rho, l\omega))} dM_{|\rho|}(\omega), \quad j = 1, 2. \quad (62)$$

である. したがって, $\lambda \in (-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$ に対して, 以下が成り立つ:

$$(\tilde{R}_0(\lambda \pm i0)f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = \pm i\pi h(\lambda) + \text{p.v.} \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{h(\rho) - h(\lambda)}{\rho - \lambda} d\rho + \int_{|\lambda-\rho|} \frac{h(\rho)}{\rho - \lambda} d\rho. \quad (63)$$

ここで, f, g は十分滑らかとする. 式 (63) から

$$\frac{1}{2\pi} ((\tilde{R}_0(\lambda + i0) - \tilde{R}_0(\lambda - i0))f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = h(\lambda) \quad (64)$$

となる。

十分滑らかな $f(\xi) = (f_1(\xi), f_2(\xi))$, $\xi \in \mathbb{T}^2$, に対してトレース作用素 $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$, $\lambda \in (-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$, を以下のように定義する：

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)f = \begin{pmatrix} \chi_{(0,3)}(\lambda)f_1|_{M_\lambda} \\ \chi_{(-3,0)}(\lambda)f_2|_{M_\lambda} \end{pmatrix}. \quad (65)$$

ここで, χ_I は区間 $I \subset \mathbb{R}$ の特性関数である. $\tilde{R}_0(z) = (\tilde{H}_0 - z)^{-1}$ に対すると式 (64) より,

$$\frac{1}{2\pi}((\tilde{R}_0(\lambda + i0) - \tilde{R}_0(\lambda - i0))f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = (\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)f, \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)g)_{L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)} \quad (66)$$

である. この式と極限吸収原理 (系 2.1) により, トレース作用素 $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$ の連続性を示すことができる：

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}^s, L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)), \quad s > 1/2. \quad (67)$$

さらに, 定義から

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)(\tilde{H}_0 - \lambda) = 0 \quad (68)$$

である.

$\mathcal{U}_\lambda^\dagger$ を次のユニタリ行列 $U^\dagger(\lambda, \omega)$ から誘導される $L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ 上のユニタリ作用素とする：

$$(\mathcal{U}_\lambda^\dagger \phi)(\omega) = U^\dagger(\lambda, \omega)\phi(\omega), \quad \phi(\omega) = \begin{pmatrix} \phi_1(\omega) \\ \phi_2(\omega) \end{pmatrix} \in L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2), \quad (69)$$

ここで,

$$U^\dagger(\lambda, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ |\lambda|^{-1}\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \omega)) & -|\lambda|^{-1}\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \omega)) \end{pmatrix}, \quad (70)$$

ω は $M_{|\lambda|}$ の局所座標である. $\mathcal{F}_0(\lambda)$ を次で定義される作用素とする：

$$\mathcal{F}_0(\lambda) = \mathcal{U}^\dagger \tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda) \mathcal{U}. \quad (71)$$

トレース作用素 $\tilde{\mathcal{F}}_0(\lambda)$ の連続性は λ の近傍のみに依存する性質であるから, $\mathcal{F}_0(\lambda)$ の連続性が分かる：
 $\lambda \in (-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$ に対して,

$$\mathcal{F}_0(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}^s, L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)), \quad s > 1/2. \quad (72)$$

$\mathcal{F}_0(\lambda)$ の作用を以下に示す：

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)f)_1(\lambda) = \frac{1}{2}f_1(\xi(|\lambda|, \omega)) + \frac{1}{2}\lambda^{-1}\alpha(\xi(|\lambda|, \omega))f_2(\xi(|\lambda|, \omega)), \quad (73)$$

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)f)_2(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^{-1}\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \omega))f_1(\xi(|\lambda|, \omega)) + \frac{1}{2}f_2(\xi(|\lambda|, \omega)), \quad (74)$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^s, \quad s > 1/2. \quad (75)$$

$R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ とする. $\mathcal{U}_\lambda^\dagger$ と \mathcal{U} を使うと, 式 (64) から以下の補題が得られる：

補題 2.1. $f, g \in \mathcal{H}^s$, $s > 1/2$, に対して

$$\frac{1}{2\pi i}((R_0(\lambda + i0) - R_0(\lambda - i0))f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = (\mathcal{F}_0(\lambda)f, \mathcal{F}_0(\lambda)g)_{L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)} \quad (76)$$

さらに、式 (68) から

$$\mathcal{F}_0(\lambda)(H_0 - \lambda) = 0 \quad (77)$$

となることが分かる。

$\lambda \in (-3, 3) \setminus (\{\pm 1, 0\} \cup \sigma_{pp}(H))$ に対して、 $\mathcal{F}(\pm)(\lambda)$ を次のように定義する：

$$\mathcal{F}(\pm)U(\lambda) = \mathcal{F}_0(\lambda)(1 - qR(\lambda \pm i0)). \quad (78)$$

\hat{q} が有限な台を持つことより、 $q \in \mathbf{B}(\mathcal{H}^{-s}, \mathcal{H}^s)$, $s > 1/2$, が分かる。このことに注意すると、

$$\mathcal{F}(\pm)(\lambda) \in \mathbf{B}(\mathcal{H}^{-s}, \mathcal{H}^s), \quad s > 1/2, \quad (79)$$

である。

さらに、 $\mathcal{F}(\pm)(\lambda)$ の定義と式 (77) より

$$\mathcal{F}(\pm)(\lambda)(H - \lambda) = 0 \quad (80)$$

となることが分かる。

以下の補題は Theorem 3.3 ([11]) と同様にして示すことができる：

補題 2.2. $f, g \in \mathcal{H}^s$, $s > 1/2$, に対して、

$$\frac{1}{2\pi i} ((R(\lambda + i0) - R(\lambda - i0))f, g)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)} = (\mathcal{F}(\pm)(\lambda)f, \mathcal{F}(\pm)(\lambda)g)_{L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)}. \quad (81)$$

$\mathcal{F}_0(\lambda)$ の共役作用素 $\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ を以下で定義しよう：

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)f, \phi)_{L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)} = (f, \mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi)_{L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)}. \quad (82)$$

ここで、 $f \in \mathcal{H}^s$, $s > 1/2$, $\phi \in L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ である。定義より

$$\mathcal{F}_0(\lambda) \in \mathbf{B}(L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2), \mathcal{H}^s), \quad s > 1/2, \quad (83)$$

である。 $\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ の作用を以下に示す：

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi)_1(\xi(|\rho|, \omega)) = \frac{1}{2}\delta(p(\xi(|\rho|, \omega)) - |\lambda|)\phi_1(\omega) + \frac{1}{2}\frac{\alpha(\xi(|\rho|, \omega))}{\lambda}\delta(p(\xi(|\rho|, \omega)) - |\lambda|)\phi_2(\omega), \quad (84)$$

$$(\mathcal{F}_0(\lambda)^*\phi)_2(\xi(|\rho|, \omega)) = \frac{1}{2}\frac{\bar{\alpha}(\xi(|\rho|, \omega))}{\lambda}\delta(p(\xi(|\rho|, \omega)) - |\lambda|)\phi_1(\omega) + \frac{1}{2}\delta(p(\xi(|\rho|, \omega)) - |\lambda|)\phi_2(\omega), \quad (85)$$

$$\phi(\omega) = \begin{pmatrix} \phi_1(\omega) \\ \phi_2(\omega) \end{pmatrix} \in L^2(M_{|\lambda|, \omega}). \quad (86)$$

式 (77) の共役をとって、 $\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ は H_0 の固有作用素となる：

$$(H_0 - \lambda)\mathcal{F}_0(\lambda)^* = 0. \quad (87)$$

$\mathcal{F}(\pm)(\lambda)$ の共役作用素 $\mathcal{F}(\pm)(\lambda)^*$ を式 (82) と同様に定義すると、 $\mathcal{F}(\pm)(\lambda)^*$ は H の固有作用素となる：

$$(H - \lambda)\mathcal{F}(\pm)(\lambda)^* = 0. \quad (88)$$

作用素 \mathcal{F}_0 を以下で定義する： $f \in \mathcal{H}^s$, $s > 1/2$, に対して、

$$(\mathcal{F}_0 f)(\lambda, \omega) = (\mathcal{F}_0(\lambda)f)(\omega). \quad (89)$$

次の定理は、[11] の Theorem 3.2 と同様にして示すことができる。

定理 2.2. 1. \mathcal{F}_0 は $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ から $L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ へのユニタリ作用素に一意的に拡張できる。

2. \mathcal{F}_0 は H_0 を対角化する：

$$(\mathcal{F}_0 H_0 f)(\lambda) = \lambda(\mathcal{F}_0 f)(\lambda). \quad (90)$$

3. 任意のコンパクトな区間 $I \subset (-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$ に対して、

$$\int_I \mathcal{F}_0(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2), \quad g \in L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda). \quad (91)$$

さらに、次の反転公式が成り立つ： $f \in L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ に対して、

$$f = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \mathcal{F}_0(\lambda)^* (\mathcal{F}_0 f)(\lambda) d\lambda. \quad (92)$$

ここで、 I_N は $(-3, 3) \setminus \{\pm 1, 0\}$ 中の有限個のコンパクトな区間の和集合で、 $I_N \rightarrow (-3, 3)$ である。

作用素 $\mathcal{F}(\pm)$ を以下で定義する：

$$(\mathcal{F}(\pm) f)(\lambda, \omega) = (\mathcal{F}(\pm)(\lambda) f)(\omega). \quad (93)$$

次の定理は、[11] の Theorem 3.4 と同様に示すことができる。

定理 2.3. 1. $\mathcal{F}(\pm)$ は、始集合として $\mathcal{H}_{ac}(H)$ 、終集合として $L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ を持つ $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^2)$ から $L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ への部分等長作用素に一意的に拡張できる。

2. $\mathcal{F}(\pm)$ は H を対角化する：

$$(\mathcal{F}(\pm) H f)(\lambda) = \lambda(\mathcal{F}(\pm) f)(\lambda). \quad (94)$$

3. 任意のコンパクトな区間 $I \subset (-3, 3) \setminus (\{\pm 1, 0\} \cup \sigma_{pp}(H))$ に対して、

$$\int_I \mathcal{F}(\pm)(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda \in \mathcal{H}_{ac}(H), \quad g \in L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda). \quad (95)$$

さらに、次の反転公式が成り立つ： $f \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ に対して、

$$f = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \mathcal{F}(\pm)(\lambda)^* (\mathcal{F}(\pm) f)(\lambda) d\lambda. \quad (96)$$

ここで、 I_N は $(-3, 3) \setminus (\{\pm 1, 0\} \cup \sigma_{pp}(H))$ 中の有限個のコンパクトな区間の和集合で、 $I_N \rightarrow (-3, 3)$ である。

格子上的スペクトル表示を示そう。 $\omega \in M_\lambda$ に対して、超関数 $\delta_\omega \in \mathcal{D}'(M_\lambda)$ 、 $\lambda \in (0, 3) \setminus \{1\}$ 、を以下で定義する： $\phi \in C^\infty(M_\lambda)$ に対して、

$$\langle \delta_\omega, \phi, \rangle = \phi(\omega). \quad (97)$$

式 (84) と (85) より、 $\mathcal{F}_0(\lambda)^*$ の積分核 $\psi^{(0)}(\xi; \lambda, \theta) = \psi^{(0)}(\xi(|\rho|, \omega); \lambda, \theta)$ が次のように書ける：

$$\psi^{(0)}(\xi; \lambda, \theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} \alpha(\xi(|\rho|, \omega)) \\ \lambda^{-1} \bar{\alpha}(\xi(|\rho|, \omega)) & 1 \end{pmatrix} \delta(p(\xi(|\rho|, \omega)) - |\lambda|) \otimes \delta_\omega(\theta). \quad (98)$$

ここで、 $\omega \in M_{|\rho|}$ 、 $\theta \in M_{|\lambda|}$ である。

格子上では, $\psi^{(0)}(\xi; \lambda, \theta)$ のフーリエ係数 $\hat{\psi}^{(0)}(\lambda, \theta) = \{\hat{\psi}^{(0)}(n; \lambda, \theta)\}$ を考える :

$$\hat{\psi}^{(0)}(n; \lambda, \theta) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} \psi^{(0)}(\xi; \lambda, \theta) e^{-in\xi} d\xi \quad (99)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} J(|\lambda|, \theta) e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1}\alpha(\xi(|\rho|, \omega)) \\ \lambda^{-1}\bar{\alpha}(\xi(|\rho|, \omega)) & \end{pmatrix}. \quad (100)$$

ここで, $J(|\lambda|, \theta)$ は式 (50) により定義される \mathbb{T}^2 上の密度関数である. $\hat{\mathcal{F}}_0$ を次で定義する :

$$\hat{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 \mathcal{F}. \quad (101)$$

$\hat{\mathcal{F}}_0$ の作用は次のように書ける : $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2) \in \mathcal{H}^s$, $s > 1/2$, に対して,

$$(\hat{\mathcal{F}}_0 \hat{f})_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{f}_1(n) + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{f}_2(n), \quad (102)$$

$$(\hat{\mathcal{F}}_0 \hat{f})_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{f}_1(n) + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{f}_2(n). \quad (103)$$

また, $\hat{\mathcal{F}}_0^*$ の作用は次のように書ける : $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in L^2(M_{|\lambda|; \mathbb{C}^2})$ に対して,

$$\hat{\mathcal{F}}_0^* \phi(\lambda) = (\hat{\mathcal{F}}_0^* \phi(n; \lambda))_{n \in \mathbb{Z}^2}, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_0^* \phi(n; \lambda) &= (\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)(n) \\ &= \int_{M_{|\lambda|}} \hat{\psi}^{(0)}(n; \lambda, \theta) \phi(\theta) dM_{|\lambda|}(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} (\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)_1(n) \\ (\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)_2(n) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (105)$$

$$(\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{M_{|\lambda|}} \frac{1}{2} e^{-in\xi(|\lambda|, \theta)} \phi_1(\theta) dM_{|\lambda|}(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{M_{|\lambda|}} \frac{1}{2} \frac{\alpha(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} e^{-in\xi(|\lambda|, \theta)} \phi_2(\theta) dM_{|\lambda|}(\theta), \quad (106)$$

$$(\hat{\mathcal{F}}_0(\lambda)^* \phi)_2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{M_{|\lambda|}} \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} e^{-in\xi(|\lambda|, \theta)} \phi_1(\theta) dM_{|\lambda|}(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{M_{|\lambda|}} \frac{1}{2} e^{-in\xi(|\lambda|, \theta)} \phi_2(\theta) dM_{|\lambda|}(\theta). \quad (107)$$

作用素 $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ を以下で定義する :

$$\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} = \mathcal{F}^{(\pm)} \mathcal{F}. \quad (108)$$

フーリエ変換 \mathcal{F} を使って, 定理 2.3 より次の定理を得る :

定理 2.4. 1. $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は, 始集合として $\mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$, 終集合として $L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ を持つ $l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ から $L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda)$ への部分等長作用素に一意的に拡張できる. さらに, $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}$ は \hat{H} を対角化する :

$$(\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} \hat{H} \hat{f})(\lambda) = \lambda (\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} \hat{f})(\lambda). \quad (109)$$

2. 任意のコンパクトな区間 $I \subset (-3, 3) \setminus (\{\pm 1, 0\} \cup \sigma_{pp}(H))$ に対して,

$$\int_I \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* g(\lambda) d\lambda \in \mathcal{H}_{ac}(\hat{H}), \quad g \in L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda). \quad (110)$$

さらに、次の反転公式が成り立つ： $f \in \mathcal{H}_{ac}(\hat{H})$ に対して、

$$\hat{f} = s\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_N} \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* (\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)} \hat{f})(\lambda) d\lambda. \quad (111)$$

ここで、 I_N は $(-3, 3) \setminus (\{\pm 1, 0\} \cup \sigma_{pp}(\hat{H}))$ 中の有限個のコンパクトな区間の和集合で、 $I_N \rightarrow (-3, 3)$ である。

3. $\hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* \in \mathbf{B}(L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2), \hat{\mathcal{H}}^{-s})$, $s > 1/2$, は次の意味で \hat{H} に固有作用素である： $\phi \in L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ に対して、

$$(\hat{H} - \lambda) \hat{\mathcal{F}}^{(\pm)}(\lambda)^* \phi = 0. \quad (112)$$

2.4 散乱振幅

波動作用素 \hat{W}_{\pm} , および散乱作用素 \hat{S} は、第 1 節でそれぞれ式 (5), および式 (6) で定義されたことを思い出そう。作用素 S は $S = \hat{\mathcal{F}}_0 \hat{S} \hat{\mathcal{F}}_0^*$ で定義された。 \hat{S} は \hat{H}_0 と可換であり、 $\hat{\mathcal{F}}_0$ は \hat{H}_0 を対角化するから、 S は $L^2((-3, 3); L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2); d\lambda) = \int_{-3}^3 \oplus L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2) d\lambda$ 上で S 行列 $S(\lambda)$ に分解される (式 (8))。

式 (9) で定義した散乱振幅 $A(\lambda)$ は $L^2(M_{|\lambda|}; \mathbb{C}^2)$ 上で次のような積分核 $A(\lambda, \theta, \theta')$ を持つ積分作用素である：

$$A(\lambda, \theta, \theta') = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda, \theta, \theta') & A_{12}(\lambda, \theta, \theta') \\ A_{21}(\lambda, \theta, \theta') & A_{22}(\lambda, \theta, \theta') \end{pmatrix}. \quad (113)$$

散乱振幅 $A(\lambda)$ は抽象的な定常散乱理論 (Kato, Kuroda [13], Kuroda [15, 16]) により、次のように書ける：

$$A(\lambda) = \hat{\mathcal{F}}_0 \hat{q} \hat{\mathcal{F}}_0^* - \hat{\mathcal{F}}_0 \hat{q} \hat{R}(\lambda + i0) \hat{q} \hat{\mathcal{F}}_0^*. \quad (114)$$

式 (114) に注意すると、散乱振幅の積分核の成分 $A_{jj}(\lambda, \theta, \theta')$, $j = 1, 2$, は次のように書ける：

$$\begin{aligned} & A_{11}(\lambda, \theta, \theta') \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} J(|\lambda|, \theta) J(|\lambda|, \theta') \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in(\xi(|\lambda|, \theta) - \xi(|\lambda|, \theta'))} \\ & \quad \cdot \left(\hat{q}_1(n) + \frac{\alpha(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} \frac{\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \theta'))}{\lambda} \hat{q}_2(n) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} J(|\lambda|, \theta) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{q}_1(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{q} \hat{\psi}^{(0)}(\lambda, \theta'))_{11}(n) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{q}_2(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{q} \hat{\psi}^{(0)}(\lambda, \theta'))_{21}(n) \right), \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} & A_{22}(\lambda, \theta, \theta') \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^2} J(|\lambda|, \theta) J(|\lambda|, \theta') \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in(\xi(|\lambda|, \theta) - \xi(|\lambda|, \theta'))} \\ & \quad \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} \frac{\alpha(\xi(|\lambda|, \theta'))}{\lambda} \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} J(|\lambda|, \theta) \left(\frac{\bar{\alpha}(\xi(|\lambda|, \theta))}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{q}_1(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{q} \hat{\psi}^{(0)}(\lambda, \theta'))_{12}(n) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} e^{in\xi(|\lambda|, \theta)} \hat{q}_2(n) (\hat{R}(\lambda + i0) \hat{q} \hat{\psi}^{(0)}(\lambda, \theta'))_{22}(n) \right). \end{aligned} \quad (116)$$

$A_{ij}(\lambda, \theta, \theta')$, $i \neq j$, はポテンシャルの再構成に用いないので、ここでは省略する。

3 六角格子上の離散シュレーディンガー作用素の逆散乱問題について

3.1 主定理の証明の概略

ポテンシャル \hat{q} の再構成について述べる。議論は λ が正と負の場合で同様なので、 $\lambda > 0$ の場合を考える。散乱振幅の積分核式 (114) を次のようにおく：

$$\begin{aligned} B(k, \theta, \theta') &= 4(2\pi)^2 (J(k, \theta)J(k, \theta'))^{-1} A(k, \theta, \theta') \\ &= \begin{pmatrix} B_{11}(k, \theta, \theta') & B_{12}(k, \theta, \theta') \\ B_{21}(k, \theta, \theta') & B_{22}(k, \theta, \theta') \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (117)$$

ここで、 $\lambda = \sqrt{8k^2 + 1}$ とおいた。また、 $J(k, \theta)$ は式 (50) により定義される関数で、具体的に計算できる量である。仮定 (A) より、十分大きな $M \geq 0$, $M \in \mathbb{Z}$, を取ると、

$$|n|_{11} = |n_1| + |n_2| > M \implies \hat{q}_j(n) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (118)$$

である。 $n^{(M)} \in \mathbb{Z}^2$ を以下のようにおく：

$$n^{(M)} = (0, M). \quad (119)$$

次の小節で示すように、 $B(k, \theta, \theta')$ は k について、複素上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ への解析接続 $B(z, \theta, \theta')$, $z \in \mathbb{C}_+$, を持つ。 $z = 1 + iN$ とおき、 $N \rightarrow \infty$ とするとき、 $B(1 + iN, \theta, \theta')$ の漸近挙動から $\hat{q}_j(n)$, $n \in \mathbb{Z}^2$, $j = 1, 2$, を以下のように計算する：

1. まず、 $B_{22}(1 + iN, \theta, \theta')$ の漸近挙動から、 $\hat{q}_2(n^{(M)})$ の値を計算する。
2. 次に、 $\hat{q}_2(n^{(M)})$ を含んだ項の漸近挙動は既知としてよいので、 $B_{11}(1 + iN, \theta, \theta')$ の漸近挙動から $\hat{q}_1(n^{(M)})$ の値を計算する。
3. $\hat{q}_j(n)$, $n_2 \geq p + 1$, $j = 1, 2$, がすべて計算できたとする ($-M \leq p \leq M - 1$)。それらを含んだ項の漸近挙動は既知としてよいので、 $B_{22}(1 + iN, \theta, \theta')$ の漸近挙動から $\hat{q}_2(n)$, $n_2 = p$, の値を計算する。
4. $\hat{q}_1(n)$, $n_2 \geq p + 1$, と $\hat{q}_2(n)$, $n_2 \geq p$, を含んだ項の漸近挙動は既知としてよいので、 $B_{11}(1 + iN, \theta, \theta')$ の漸近挙動から $\hat{q}_1(n)$, $n_2 = p$, の値を計算する。

3.2 解析接続

解析接続について説明する。 $\xi \in M_\lambda$ とすると

$$\cos^2 \frac{\xi_1}{2} \cos^2 \frac{\xi_2}{2} + \sin \frac{\xi_1}{2} \sin \frac{\xi_2}{2} \cos \frac{\xi_1}{2} \cos \frac{\xi_2}{2} = \frac{1}{8}(\lambda^2 - 1) \quad (120)$$

となるから、書き直すと

$$\left(\cos \frac{\xi_1}{2} \cos \frac{\xi_2}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\xi_1}{2} \sin \frac{\xi_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\xi_1}{2} \sin \frac{\xi_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}(\lambda^2 - 1) \quad (121)$$

である。 $\theta \in \mathbb{R}$ として、以下のように媒介変数表示する： $\lambda = \sqrt{8k^2 + 1}$ として、

$$\cos \frac{\xi_1}{2} \cos \frac{\xi_2}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\xi_1}{2} \sin \frac{\xi_2}{2} = \pm k \cosh \theta, \quad (122)$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\xi_1}{2} \sin \frac{\xi_2}{2} = \pm k \sinh \theta. \quad (123)$$

注意 3.1. 正方格子の場合 ([11]) の自由ハミルトニアンは、フーリエ変換によって \mathbb{T}^d 上で、

$$\frac{1}{2}(d - \sum_{j=1}^d \cos \xi_j) = \sum_{j=1}^d \sin^2 \frac{\xi_j}{2} \quad (124)$$

の掛け算作用素になるから、以下のように $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) \in S^{d-1}$ により媒介変数表示される：

$$\xi_j = 2 \arcsin(\sqrt{\lambda} \theta_j), \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (125)$$

式 (122) と (123) から $\sin^2 \frac{\xi_j}{2}$ と $\cos^2 \frac{\xi_j}{2}$, $j = 1, 2$, に関する二次方程式が導かれる。それらを解いて、以下のおく：

$$\sin^2 \frac{\xi_1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (2 - e^{2\theta}) k^2 + \sqrt{(2 - e^{2\theta})^2 k^4 - 2(2e^{-2\theta} - (2 - e^{2\theta})) k^2 + 1} \right\}, \quad (126)$$

$$\sin^2 \frac{\xi_2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - (2 - e^{2\theta}) k^2 - \sqrt{(2 - e^{2\theta})^2 k^4 - 2(2e^{-2\theta} - (2 - e^{2\theta})) k^2 + 1} \right\}, \quad (127)$$

$$\cos^2 \frac{\xi_1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + (2 - e^{2\theta}) k^2 - \sqrt{(2 - e^{2\theta})^2 k^4 - 2(2e^{-2\theta} - (2 - e^{2\theta})) k^2 + 1} \right\}, \quad (128)$$

$$\cos^2 \frac{\xi_2}{2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + (2 - e^{2\theta}) k^2 + \sqrt{(2 - e^{2\theta})^2 k^4 - 2(2e^{-2\theta} - (2 - e^{2\theta})) k^2 + 1} \right\}. \quad (129)$$

$a = a(\theta)$ と $b = b(\theta)$ を

$$a(\theta) = \sqrt{2 - e^{2\theta}}, \quad b(\theta) = \frac{2 \sinh \theta}{\sqrt{2 - e^{2\theta}}}. \quad (130)$$

とするとき、

補題 3.1. $0 < \theta < \min\{\frac{1}{2} \log 2, -\log |k|\}$ とする。このとき、 $\xi_j(k, \theta)$ は次の性質を持つ解析接続 $\zeta_j(z, \theta)$, $j = 1, 2$, をもつ：

1. $\zeta_j(z, \theta)$, $j = 1, 2$, は z に関して $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ 上で解析的である。
2. $k \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ とすると、 $\zeta_j(k + i0, \theta) = \xi_j(k, \theta)$ 。
3. $0 < \xi_j < \pi$, $j = 1, 2$, とする。このとき、 $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$\Re \zeta_1(1 + iN, \theta) = 2m_1\pi + \mathcal{O}(N^{-3}), \quad (131)$$

$$\Im \zeta_1(1 + iN, \theta) = 2 \log(b + \sqrt{b^2 + 1}) + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (132)$$

$$\Re \zeta_2(1 + iN, \theta) = (2m_2 + 1)\pi + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (133)$$

$$\Im \zeta_2(1 + iN, \theta) = 2 \log N + \log(4a^2) + \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (134)$$

補題 3.1 の証明は [2] の Lemma 4.1. を参照されたい。

注意 3.2. $-\pi < \xi_j < 0$, $j = 1, 2$, のときは、補題 3.1 の \mathcal{I} を次で置き換える：

\mathcal{J} $-\pi < \xi_j < 0$, $j = 1, 2$, とする。このとき、 $m_3, m_4 \in \mathbb{Z}$ が存在して、

$$\Re \zeta_1(1 + iN, \theta) = 2m_3\pi + \mathcal{O}(N^{-3}), \quad (135)$$

$$\Im \zeta_1(1 + iN, \theta) = -2 \log(b + \sqrt{b^2 + 1}) + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (136)$$

$$\Re \zeta_2(1 + iN, \theta) = (2m_4 + 1)\pi + \mathcal{O}(N^{-1}), \quad (137)$$

$$\Im \zeta_2(1 + iN, \theta) = -2 \log N - \log(4a^2) + \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (138)$$

補題 3.1 の 3 で解析接続される領域

$$\{(\xi_1(k, \theta), \xi_2(k, \theta)) \in \mathbb{T}^2; 0 < k < 1, 0 < \theta < \min\{\frac{1}{2} \log 2, -\log k\}\} \quad (139)$$

は次の二本の線分

$$\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^2; 0 \leq \xi_1 \leq \pi, \xi_2 = 0\}, \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^2; \xi_1 = \xi_2, 0 \leq \xi_1 \leq \pi/3\}, \quad (140)$$

と曲線

$$\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^2; \xi_1 = 2 \arcsin \phi_+(t), \xi_2 = 2 \arcsin \phi_-(t), \phi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 2t^2}), 0 \leq t \leq 1/\sqrt{2}\}, \quad (141)$$

で囲まれた \mathbb{T}^2 の領域である。式 (139) で示した領域を図 4 において陰をつけて図示した：

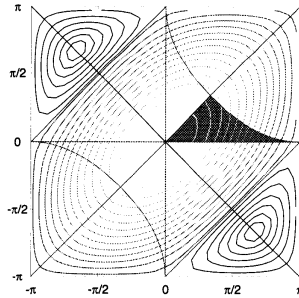


図 4 補題 3.1 で解析接続の漸近挙動が得られる \mathbb{T}^2 の領域.

\mathbb{T}^2 上のその他の領域に対しても、補題 3.1 の 3 と類似の漸近挙動を示すことができるが、ここでは省略する。

3.3 レゾルベント評価

レゾルベント評価について説明する。 H_0 のレゾルベント $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ は、 \mathbb{T}^2 上で次の行列 $R_0(z, \xi)$ の掛け算作用素である：

$$R_0(z, \xi) = \frac{1}{z^2 - r(\xi)} \begin{pmatrix} -z & -\alpha(\xi) \\ -\bar{\alpha}(\xi) & -z \end{pmatrix}. \quad (142)$$

ここで、

$$r(\xi) = |\alpha(\xi)|^2 \quad (143)$$

である。したがって、 $\hat{r}_0(z) = (\hat{r}_0(z, n))_{n \in \mathbb{Z}^2}$ を $R_0(z, \xi)$ のフーリエ係数

$$\hat{r}_0(z, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} R_0(z, \xi) e^{-in\xi} d\xi = \begin{pmatrix} \hat{r}_{0,11}(z, n) & \hat{r}_{0,12}(z, n) \\ \hat{r}_{0,21}(z, n) & \hat{r}_{0,22}(z, n) \end{pmatrix} \quad (144)$$

とすると、 \hat{H}_0 のレゾルベント $\hat{R}_0(z) = (\hat{H}_0 - z)^{-1}$ は $\hat{r}_0(z)$ との合成積で書ける：

$$(\hat{R}_0 \hat{f})(n) = \begin{pmatrix} \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \hat{r}_{0,11}(z, n-m) \hat{f}_1(m) & \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \hat{r}_{0,12}(z, n-m) \hat{f}_2(m) \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \hat{r}_{0,21}(z, n-m) \hat{f}_1(m) & \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \hat{r}_{0,22}(z, n-m) \hat{f}_2(m) \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \in l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2). \quad (145)$$

$|z|$ が十分大きいとき, $\hat{r}_{0,ij}(z, n)$, $i, j = 1, 2$, は z について以下のように級数展開される: $(i, j) = (1, 2)$ または $(2, 1)$ とすると,

$$\hat{r}_{0,jj}(z, n) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-2s-1} \hat{r}_{0,s,jj}(n), \quad (146)$$

$$\hat{r}_{0,ij}(z, n) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-2s-2} \hat{r}_{0,s,ij}(n). \quad (147)$$

ここで, $\hat{r}_{0,s,ij}$, $i, j = 1, 2$, は以下で表される:

$$\hat{r}_{0,s,11}(n) = \hat{r}_{0,s,22}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} r(\xi)^s e^{-in\xi} d\xi, \quad (148)$$

$$\hat{r}_{0,s,12}(n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} r(\xi)^s \alpha(\xi) e^{-in\xi} d\xi, \quad \hat{r}_{0,s,21}(n) = \overline{\hat{r}_{0,s,12}(n)}. \quad (149)$$

六角格子上でレゾルベント評価を行うために, 次の非負の量 $d_{ij}(n)$, $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$, $i, j = 1, 2$, を導入しよう:

$$d(n) = d_{11}(n) = d_{22}(n) = \begin{cases} |n_1| + |n_2|, & \text{if } n_1 \cdot n_2 \geq 0, \\ \max\{|n_1|, |n_2|\}, & \text{if } n_1 \cdot n_2 \leq 0, \end{cases} \quad (150)$$

$$d_{12}(n) = d_{21}(-n) = \begin{cases} |n_1| + |n_2| - 1, & \text{if } n_1 > 0, n_2 > 0, \\ \max\{|n_1| - 1, |n_2|\}, & \text{if } n_1 > 0, n_2 \leq 0, \\ |n_1| + |n_2|, & \text{if } n_1 \leq 0, n_2 \leq 0, \\ \max\{|n_1|, |n_2| - 1\}, & \text{if } n_1 \leq 0, n_2 > 0. \end{cases} \quad (151)$$

$d_{ij}(n) = s$ の等高線を図 5 に図示した. これらの量はそれぞれ, $r(\xi)^s$, $r(\xi)^s \alpha(\xi)$, および $r(\xi)^s \bar{\alpha}(\xi)$ のフーリエ係数の台に由来する.

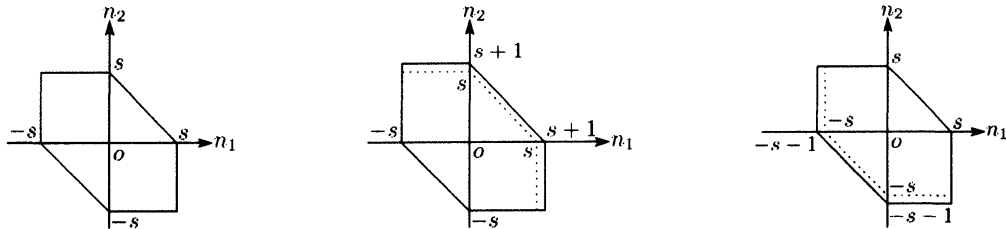


図 5 左から $d(n) = s$, $d_{12}(n) = s$, $d_{21}(n) = s$ の等高線

注意 3.3. 正方格子の場合 ([11]) の自由ハミルトニアンは, フーリエ変換によって \mathbb{T}^d 上で,

$$\frac{1}{2} \left(d - \sum_{j=1}^d \cos \xi_j \right) = \frac{1}{2} \left(d - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (e^{in_j \xi_j} + e^{-in_j \xi_j}) \right) \quad (152)$$

の掛け算作用素になるから, 式 (152) のフーリエ級数の台を評価するには \mathbb{Z}^d 上で l^1 -ノルムを使う:

$$\|n\|_{l^1} = \sum_{j=1}^d |n_j|. \quad (153)$$

次の二つの補題は, $d_{ij}(n)$ の定義から直ちに導かれる:

補題 3.2. $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して,

$$d(n) \geq |n_2|, \quad (154)$$

$$d_{12}(n) \geq \begin{cases} |n_2| - 1, & \text{if } n_2 > 0, \\ |n_2|, & \text{if } n_2 \leq 0, \end{cases} \quad d_{21}(n) \geq \begin{cases} |n_2|, & \text{if } n_2 \geq 0, \\ |n_2| - 1, & \text{if } n_2 < 0. \end{cases} \quad (155)$$

補題 3.3. $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して,

$$d(n) - 1 \leq d_{ij}(n) \leq d(n). \quad (156)$$

次の補題は $l, m, n \in \mathbb{Z}^2$ の相対的な位置関係の場合分けを詳しく調べることで示すことができる。

補題 3.4. $d(n)$ は \mathbb{Z}^2 上のノルムである。特に、三角不等式を満たす：

$$d(m - n) \leq d(m - l) + d(l - n). \quad (157)$$

続く二つの補題は、補題 3.4 と同様にして示すことができる。

補題 3.5. 次の不等式が成り立つ：

$$d_{ij}(m - n) \leq d_{ii}(m - l) + d_{ij}(l - n), \quad (158)$$

$$d_{ij}(m - n) \leq d_{ij}(m - l) + d_{jj}(l - n). \quad (159)$$

ここで、 $i, j \in \{1, 2\}$ である。

補題 3.6. 次の不等式が成り立つ：

$$d_{ii}(m - n) \leq d_{ij}(m - l) + d_{ji}(l - n) + 1. \quad (160)$$

ここで、 $i, j \in \{1, 2\}$ である。

次の補題は s に関する帰納法で示すことができる。

補題 3.7. $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$, とする。このとき、

$$d_{ij}(n) > s \implies \hat{r}_{0,s,ij}(n) = 0. \quad (161)$$

ここで、 $i, j \in \{1, 2\}$ である。

$\hat{P}(n)$ を格子上的 $n \in \mathbb{Z}^2$ への正射影作用素とする。補題 3.7 を用いて、次の補題を示すことができる。

補題 3.8. $\hat{f} \in l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ が有限な台を持つとする。このとき、十分大きな $|z|$ に対して、

$$\hat{R}_0(z)\hat{f} = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{\infty} z^{-2s-1} \hat{R}_{0,s,11} \hat{f}_1 + \sum_{s=0}^{\infty} z^{-2s-2} \hat{R}_{0,s,12} \hat{f}_2 \\ \sum_{s=0}^{\infty} z^{-2s-2} \hat{R}_{0,s,21} \hat{f}_1 + \sum_{s=0}^{\infty} z^{-2s-1} \hat{R}_{0,s,22} \hat{f}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \end{pmatrix}. \quad (162)$$

ここで、 $\hat{R}_{0,s,ij} \in \mathbf{B}(l^2(\mathbb{Z}^2))$ は次の性質を持つ： $d_{ij}(n) > s$ のとき、

$$\hat{P}(m) \hat{R}_{0,s,ij} \hat{P}(n) = 0, \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (163)$$

補題 3.8 を使うと、次のレゾルベント評価の補題を示すことができる。

補題 3.9. 十分大きな $|z|$ に対して、

$$\hat{P}(m)\hat{R}(z)\hat{P}(n) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\langle z \rangle^{-2d(m-n)-1}) & \mathcal{O}(\langle z \rangle^{-2d_{12}(m-n)-2}) \\ \mathcal{O}(\langle z \rangle^{-2d_{21}(m-n)-2}) & \mathcal{O}(\langle z \rangle^{-2d(m-n)-1}) \end{pmatrix}. \quad (164)$$

補題 3.9 の証明には、レゾルベント方程式

$$\hat{R}(z) = \hat{R}_0(z) - \hat{R}_0(z)\hat{q}\hat{R}(z) \quad (165)$$

を繰り返し使って $\hat{R}(z)$ を z に関して十分な減衰が得られるまで展開した後、帰納的な議論を用いる。その際、補題 3.4, 3.5, 3.6 の不等式を用いる。議論の詳細は [2] の Lemma 5.11. を参照されたい。

3.4 散乱振幅の漸近挙動

最後に、式 (117) の $B(k, \theta, \theta')$ を複素上半平面 \mathbb{C}_+ へ解析接続したときの漸近挙動を示す。式 (114) に注意して、 $B(k, \theta, \theta')$ を二つに分ける：

$$B(k, \theta, \theta') = B_0(k, \theta, \theta') - B_1(k, \theta, \theta'). \quad (166)$$

ここで、 $B_1(k, \theta, \theta')$ はレゾルベントを含む項で、 $B_0(k, \theta, \theta')$ は含まない項である：

$$B_j(k, \theta, \theta') = \begin{pmatrix} B_{j,11}(k, \theta, \theta') & B_{j,12}(k, \theta, \theta') \\ B_{j,21}(k, \theta, \theta') & B_{j,22}(k, \theta, \theta') \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (167)$$

補題 3.1 とその後の注意 3.2 に注意して、 $\xi_j(k, \theta)$ と $\xi_j(k, \theta')$, $j = 1, 2$, を $-\pi < \xi_j(k, \theta) < 0$, および $0 < \xi_j(k, \theta')$ にとりながら、 $B_j(k, \theta, \theta')$ を k に関して複素上半平面 \mathbb{C}_+ に解析接続する。

$a_1(\theta)$ と $b_1(\theta)$ を以下のおく：

$$a_1(\theta) = 4(2 - e^{2\theta}), \quad b_1(\theta) = \frac{e^{2\theta}}{2 - e^{2\theta}}. \quad (168)$$

$z = 1 + iN$, $N \rightarrow \infty$, とすると、レゾルベント評価の補題 3.9 と補題 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, および解析接続の補題 3.1 より、 $B_{22}(z, \theta, \theta')$ の以下の漸近挙動を示すことができる：

$$B_{0,22}(z, \theta, \theta') \sim N^{4M} (a_1(\theta)a_1(\theta'))^M \hat{q}_2(n^{(M)}), \quad (169)$$

$$B_{1,22}(z, \theta, \theta') \sim \mathcal{O}(N^{4M-1}). \quad (170)$$

ここで、 M は式 (118) で定まる正の整数である。したがって、式 (169) から $\hat{q}_2(n^{(M)})$ を計算できる。

次に、 $B_{11}(z, \theta, \theta')$ の漸近挙動を以下に示す：

$$\begin{aligned} B_{0,11}(z, \theta, \theta') &\sim N^{4M} (a_1(\theta)a_1(\theta'))^M \hat{q}_1(n^{(M)}) \\ &+ e^{in^{(M)}(\zeta_+(z, \theta) - \zeta_-(z, \theta'))} \frac{\alpha(\zeta_+(z, \theta)) \bar{\alpha}(\zeta_-(z, \theta'))}{\sqrt{8z^2 + 1} \sqrt{8z^2 + 1}} \hat{q}_2(n^{(M)}) \\ &+ \mathcal{O}(n^{4M-2}), \end{aligned} \quad (171)$$

$$B_{1,11} \sim (\hat{q}_2(n^{(M)}) \text{ を含む, 漸近挙動が既知の項}) + \mathcal{O}(N^{4M-1}). \quad (172)$$

$\hat{q}_2(n^{(M)})$ を含む項の漸近挙動は既知なので、式 (171) から $\hat{q}_1(n^{(M)})$ の値を計算できる。

$\hat{q}_j(n)$, $n_2 \geq p+1$, $j = 1, 2$, がすべて計算できたとする。再び, $B_{22}(z, \theta, \theta')$ について, 以下の漸近挙動を示すことができる:

$$B_{0,22}(z, \theta, \theta') \sim \sum_{n_2 \geq p+1} e^{in(\zeta_+(z, \theta) - \zeta_-(z, \theta'))} \left(\frac{\bar{\alpha}(\zeta_+(z, \theta)) \alpha(\zeta_-(z, \theta))}{\sqrt{8z^2+1} \sqrt{8z'^2+1}} \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n) \right) + N^{4p} (a_1(\theta) a_1(\theta'))^p \sum_{n_2=p} (b_1(\theta) b_1(\theta'))^{n_1} \hat{q}_2(n) + \mathcal{O}(N^{4p-1}), \quad (173)$$

$$B_{1,22} \sim (\hat{q}_j(n), n_2 \geq p+1, j = 1, 2, \text{ を含む, 漸近挙動が既知の項}) + \mathcal{O}(N^{4M-1}). \quad (174)$$

θ と θ' を動かしてやると, $b_1(\theta) b_1(\theta')$ の値域は空でない開区間を含む。漸近挙動が既知の項を考慮すると, 式 (173) より $\hat{q}_2(n)$, $n_2 = p$, の値を計算できる。

再び, $B_{11}(z, \theta, \theta')$ の以下の漸近挙動を示すことができる:

$$B_{0,11}(z, \theta, \theta') \sim \sum_{n_2 \geq p+1} e^{in(\zeta_+(z, \theta) - \zeta_-(z, \theta'))} \left(\hat{q}_1(n) + \frac{\alpha(\zeta_+(z, \theta)) \bar{\alpha}(\zeta_-(z, \theta'))}{\sqrt{8z^2+1} \sqrt{8z'^2+1}} \hat{q}_2(n) \right) + N^{4p} (a_1(\theta) a_1(\theta'))^p \sum_{n_2=p} (b_1(\theta) b_1(\theta^{prime}))^{n_1} \hat{q}_1(n) + \sum_{n_2=p} e^{in(\zeta_+(z, \theta) - \zeta_-(z, \theta'))} \frac{\alpha(\zeta_+(z, \theta)) \bar{\alpha}(\zeta_-(z, \theta'))}{\sqrt{8z^2+1} \sqrt{8z'^2+1}} \hat{q}_2(n) + \mathcal{O}(N^{4p-2}). \quad (175)$$

$$B_{1,11}(z, \theta, \theta') \sim (\hat{q}_2(n), n_2 \geq p, \text{ および } \hat{q}_1(n), n_2 \geq p+1, \text{ を含む, 漸近挙動が既知の項}) + \mathcal{O}(N^{4M-1}). \quad (176)$$

したがって, 漸近挙動が既知の項を考慮すると, 式 (175) から $\hat{q}_1(n)$, $n_2 = p$, の値を計算することができる。

参考文献

- [1] M. J. Ablowitz and A. I. Nachman. A multidimensional inverse-scattering method. *Stud. Appl. Math.*, Vol. 71, No. 3, pp. 243–250, 1984.
- [2] K. Ando. Inverse scattering theory for discrete schrödinger operators on the hexagonal lattice. *Ann. Henri Poincaré*, Vol. 14, No. 2, pp. 347–383, 2013.
- [3] R. Beals and R. R. Coifman. Multidimensional inverse scatterings and nonlinear partial differential equations. In *Pseudodifferential operators and applications (Notre Dame, Ind., 1984)*, Vol. 43 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 45–70. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.
- [4] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim. The electronic properties of graphene. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 81, No. 1, pp. 109–162, Jan 2009.
- [5] F. R. K. Chung. *Spectral graph theory*, Vol. 92 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1997.
- [6] M. S. Èskina. The direct and the inverse scattering problem for a partial difference equation. *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 7, pp. 193–197, 1966.
- [7] L. D. Faddeev. Inverse problem of quantum scattering theory. ii. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 5, pp. 334–396, 1976. 10.1007/BF01083780.

- [8] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, Vol. 15, pp. 309–360, 1951. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 1 (1955), 253–304.
- [9] J. González, F. Guinea, and M. A. H. Vozmediano. The electronic spectrum of fullerenes from the Dirac equation. *Nuclear Phys. B*, Vol. 406, No. 3, pp. 771–794, 1993.
- [10] H. Isozaki. Inverse spectral theory. In *Topics in the theory of Schrödinger operators*, pp. 93–143. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
- [11] H. Isozaki and E. Korotyaev. Inverse problems, trace formulae for discrete Schrödinger operators. *Ann. Henri Poincaré*, Vol. 13, No. 4, pp. 751–788, 2012.
- [12] H. Isozaki and H. Morioka. Inverse scattering at a fixed energy for discrete Schrödinger operators on the square lattice, 2012, <http://arxiv.org/abs/1208.4483v2>.
- [13] T. Kato and S. T. Kuroda. The abstract theory of scattering. *Rocky Mountain J. Math.*, Vol. 1, No. 1, pp. 127–171, 1971.
- [14] G. M. Khenkin and R. G. Novikov. The $\bar{\delta}$ -equation in the multidimensional inverse scattering problem. *Uspekhi Mat. Nauk*, Vol. 42, No. 3(255), pp. 93–152, 255, 1987.
- [15] S. T. Kuroda. Scattering theory for differential operators. I. Operator theory. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 25, pp. 75–104, 1973.
- [16] S. T. Kuroda. Scattering theory for differential operators. II. Self-adjoint elliptic operators. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 25, pp. 222–234, 1973.
- [17] V. A. Marčenko. On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, Vol. 104, pp. 695–698, 1955.
- [18] R. G. Newton. The gel'fand-levitan method in the inverse scattering problem. In J. A. Lavita and Dordrecht J. P. Marchand, D.Reidel, editors, *Scattering Theory in Mathematical Physics*, 1974.
- [19] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [20] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. III*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979. Scattering theory.
- [21] G. W. Semenoff. Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 53, No. 26, pp. 2449–2452, Dec 1984.
- [22] 安藤和典. 六角格子上的離散シュレディンガー作用素のスペクトルについて. *数理解析研究所講究録*, Vol. 1696, pp. 107–118, 2010.