数理解析研究所講究録
第 1897 巻 2014 年 161-171

線形切断いろいろ

東京大学大学院数理科学研究科　高木寛通
HIROMICHI TAKAGI
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES,
THE UNIVERSITY OF TOKYO

1. まくら

この解説記事では，$\mathbb{P}^n$ の対称積 $\Sigma := S^2\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^N$ に対して，その線形部分空間との交わりで正しい余次元を持つもの–**線形切断**と呼ぶ–を記述する．それは双対射影空間 $(\mathbb{P}^N)^*$ における射影多様体 Σ^*–以下で説明する**ホモロジー的射影双対（HPD）**–を用いてなされる．Σ の線形切断を $(\mathbb{P}^N)^*$ の線形部分空間 P を用いて

$$X := \Sigma \cap P^{\perp}$$

と書くことにすると，X とそれに対する Σ^* の**直交線形切断**

$$Y := \Sigma^* \cap P$$

の関係–導来圏の間の関係，双有理幾何的に観察される関係など–が明らかになる．

2. HPD の一般論概説

ここでは技術的な詳細には立ち入らずに HPD の説明をする．Kuznetsov 氏の論文 [4] を読む一助にもなれば幸いである．

出発点は，非特異射影代数多様体[1] $\Sigma \subset \mathbb{P}(V)$ だけでなく，その導来圏 $\mathcal{D}^b(\Sigma)$ の半直交分解（SOD）：

$$\mathcal{D}^b(\Sigma) = \langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \rangle,$$

を考える．ただし

$$0 \subset \mathcal{A}_{i-1} \subset \cdots \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$$

とする．このような SOD を **Lefschetz decomposition (Lef D)** と言う．発見法的に $\Sigma^* \subset \mathbb{P}(V^*)$ がどのような多様体であるべきかを説明する．そのため，線形切断の最も基本的な場合，すなわち，超平面 H による Σ の切断 Σ_H を考える．この場合，Σ^* の H に対する直交線形切断とは，H に対応する $\mathbb{P}(V^*)$ の点 $[H]$ と Σ^* の交わりのことであり，よって，空集合か $[H]$ になる．ただし，一般的には $\Sigma^* \neq \mathbb{P}(V^*)$ と期待され[2]，ここではそう考えて話を進めるが，そうすると，まくらの説明からすれば，$[H] \cap \Sigma^*$ が正しい余次元を持つ，つまり，$[H] \cap \Sigma^* = \emptyset$ と仮定すべきである．しかし，そう考えずに $[H] \in \mathbb{P}(V^*)$ は任意として話を進めておく方が Σ^* を発見するのに都合がよい．自然な関手

[1]非可換な意味で非特異でもよい．以下では，この意味で非特異と見なせる例を与える．
[2]実はこうでない場合も以下出てくる（$\mathbb{P}^n$ を 2 次 Veronese 射で埋め込んだものの HPD).

$\mathcal{A}_k(k) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\Sigma) \to \mathcal{D}^b(\Sigma_H)$（埋め込みと制限の合成）は $1 \le k \le i-1$ のとき fully faithful であり，その像たち $\mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1)$ は $\mathcal{D}^b(\Sigma_H)$ で半直交部分三角圏の列（semiorthogonal collection, SOC）をなすことが分かる．このとき $\mathcal{C}_H$ を

$$\mathcal{D}^b(X_H) = \langle \mathcal{C}_H, \mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \rangle$$

によって定める[3]．この $\mathcal{C}_H$ は，$\Sigma^* \neq \mathbb{P}(V^*)$ としたとき，$[H] \cap \Sigma^*$ が正しい余次元を持つ場合，つまり，$[H] \cap \Sigma^* = \emptyset$ の場合，$[H] \cap \Sigma^* = \emptyset$ の導来圏を用いて記述されることを要請したい．ということは $\mathcal{C}_H = 0$ を要請することに他ならない．これを逆手に取って，$\mathcal{C}_H \neq 0$ **となる** $[H]$ **の集合として** Σ^* **を定義**することができる．このように，超平面切断に関する考察だけで Σ^* を定義したにも関わらず，Σ^* によって任意余次元の線形切断の導来圏を記述することに成功したのが，Kuznetsov 氏の功績である．

正確な HPD の定義は個々の超平面切断の導来圏ではなく超平面の普遍族 $\varSigma_1 \to \mathbb{P}(V^*)$ の導来圏を用いてなされる．なお，個々の超平面切断の情報は導来圏の fully base change theorem によって切り出すことが可能である．$\varSigma_1$ を考える技術的理由として，Σ_H は一般に特異で扱いにくいのに対して，$\varSigma_1$ は $\varSigma_1 \to \Sigma$ は射影空間束であり，従って非特異であることが挙げられる．また，技術的だが，より思想的理由として，任意余次元の線形切断についてもその普遍族に移行することで，超平面から任意余次元への帰納的扱いが可能となるということが挙げられる．実際，V^* の $r-1, r$ 次元部分空間をそれぞれパラメーター付けているグラスマン多様体 $\mathrm{G}(r-1, V^*), \mathrm{G}(r, V^*)$ を旗多様体 $\mathrm{F}(r-1, r, V^*)$ に底変換することで，余次元が 1 違う線形切断を比較できる．

上で $\mathcal{D}^b(\Sigma_H)$ に対して行ったことを $\mathcal{D}^b(\varSigma_1)$ に対して行う．$\mathcal{C}$ を $\langle \mathcal{A}_1(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \rangle$ の $\mathcal{D}^b(\varSigma_1)$ における右直交とする；

$$\mathcal{D}^b(\varSigma_1) = \langle \mathcal{C}, \mathcal{A}_1(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)) \rangle.$$

実は，Σ^* を見つけることなく，$\mathcal{C}$ について色々な事が分かる．中でも重要なのは，$\mathcal{C}$ が $\mathcal{D}^b(\Sigma)$ の Lef D から決まる次のような SOC を持つことである：

$$\langle \mathcal{C}_{j-1}(1-j), \ldots, \mathcal{C}_1(-1), \mathcal{C}_0 \rangle \subset \mathcal{C},$$

ここで

$$0 \subset \mathcal{C}_{j-1} \subset \cdots \subset \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0,$$
$$j := N - 1 - \max\{k \mid \mathcal{A}_k = \mathcal{A}_0\}$$

である．

このような SOC を **dual Lefschetz collection**（**dual Lef. C**）と言う．HPD は $\mathcal{C}$ の幾何学的実現である．

定義 1 (HPD の正確な定義). 代数多様体 $\Sigma^* \subset \mathbb{P}(V^*)$ が，上で与えた Lef D に関する Σ の HPD とは，$\exists \mathcal{K} \in \mathcal{D}^b(\varSigma_1 \times_{\mathbb{P}(V^*)} \Sigma^*)$, Fourier-Mukai 関手（FM 関

[3]（蛇足）つまり，$\langle \mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \rangle$ の $\mathcal{D}^b(\Sigma_H)$ における右直交である．$\mathcal{C}_H$ は左にあるのに右直交というのは，$C \in \mathcal{C}_H$, $A \in \langle \mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \rangle$ に対して，$\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ であり，このとき C が右に来るからである．

手) $\Phi_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{D}^b(\Sigma^*) \to \mathcal{D}^b(\Sigma_1)$ が fully faithful であり，しかも次のような $\mathcal{D}^b(\Sigma_1)$ の SOD を与えるということ：

(2.1)

$$\mathcal{D}^b(\Sigma_1) = \langle \Phi_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}^b(\Sigma^*)), \mathcal{A}_1(1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*)), \dots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \boxtimes \mathcal{D}^b(\mathbb{P}(V^*))\rangle.$$

（つまり $\Phi_{\mathcal{K}}$ は $\mathcal{D}^b(\Sigma^*)$ と，上述の $\mathcal{C}$ の同値を与えるということ）．

定理 2 (HPD の基本定理 (論文 [4] の主定理)).

(1) Σ^* は非特異であり，$\mathcal{D}^b(\Sigma^*)$ は，$\mathcal{C}$ の dual Lef C から引き起こされる dual Lef D を持つ；

$$\mathcal{D}^b(\Sigma^*) = \langle \mathcal{B}_{j-1}(1-j), \dots, \mathcal{B}_1(-1), \mathcal{B}_0\rangle.$$

(2) $L \subset V^*$ を r 次元部分空間で

$$\Sigma_L := X \times_{\mathbb{P}(V)} \mathbb{P}(L^{\perp})$$

と

$$\Sigma_L^* := Y \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(L)$$

が，それぞれ Σ, Σ^* において正しい余次元を持つとする[4]. このとき，三角圏 $\mathcal{C}_L$ が存在して，それは $\mathcal{D}^b(\Sigma_L), \mathcal{D}^b(\Sigma_L^*)$ の部分三角圏となり，$\mathcal{D}^b(\Sigma_L)$, $\mathcal{D}^b(\Sigma_L^*)$ は次のような SOD を持つ：

(2.2)
$$\begin{aligned}\mathcal{D}^b(\Sigma_L) &= \langle \mathcal{C}_L, \mathcal{A}_r(1), \dots, \mathcal{A}_{i-1}(i-r)\rangle.\\ \mathcal{D}^b(\Sigma_L^*) &= \langle \mathcal{B}_{j-1}(N-r-j), \dots, \mathcal{B}_{N-r}(-1), \mathcal{C}_L\rangle.\end{aligned}$$

ただし，$N := \dim V$.

3. 射影空間束の HPD

一般の Σ に対して HPD が存在するかどうかは分かっていない．また，HPD の候補が見つかっても[5]，実際それが HPD であることを示すのは非常に困難な事が多い[6]．ここでは，HPD の存在が確立している一つのクラスについて述べる．後で述べる例はすべてこの範疇に属す．

非特異射影多様体 S 上の階数 i のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化を $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ で表す．これは Grothendieck の Proj の双対になっていることに注意．よって $p\colon \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to S$ を自然な射影とするとき，$p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{E}^*$ である．この導来圏の構造は Orlov

[4]このとき，r は Σ における Σ_L の余次元である．

[5]Σ の射影双対の近くに候補があることが多い．

[6]定義 1 の $\mathcal{K}$ の候補を見つけるのがまず非自明な点であり，ここで Σ にまつわる十分な幾何学的考察を経なくてはならない．また，幸運にも $\mathcal{K}$ の候補が見つかったとしても，$\Phi_{\mathcal{K}}$ が fully faithful なことを示すのは，技術的に厄介なことが多い．さらに付け加えるならば，特異点のある場合（Σ 自身が特異な場合もあるし，Σ は非特異でも Σ^* の候補が特異であるのが一般的である），非可換特異点解消を考えなくてはならないが，この場合の取り扱いはまだ完全に確立していない．近年，VGIT の観点から HPD 理論を捉えようとする動きが活発化しているが，まだ，本来の HPD 理論から得られる結果を完全に復元するには至っていないし，また，本来の HPD 理論に負けず劣らず技術的に大変である．今後の進歩に期待している（と他人事のように言っておく）．

によって与えられている．これはLef Dの例になっている；$\mathcal{A}_0 = \cdots = \mathcal{A}_{i-1} := p^*\mathcal{D}^b(S)$ とすれば

$$\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(\mathcal{E})) = \langle \mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \rangle,$$

ただし twist は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ による．

ここで $V^* := H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)) \simeq H^0(S, \mathcal{E}^*)$ とおき，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ が大域切断で生成されているとする．すると $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ に付随して，射 $f\colon \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(V)$ を得る．実は，上で述べた HPD 理論は $\mathbb{P}(V)$ の部分多様体ではなく，$\mathbb{P}(V)$ に射がある場合に定式化されている．そして，$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の HPD は次のように分かる．

定理 3 ($\mathbb{P}(\mathcal{E})$ **の HPD**)**.** 完全列

$$0 \to \mathcal{E}^\perp \to V^* \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{E}^* \to 0$$

によってベクトル束 $\mathcal{E}^\perp$ を定義する．このとき，$\mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp) \to \mathbb{P}(V^*)$ が $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の（上記 Lef D に関する）HPD である．$\mathcal{P}_1 \to \mathbb{P}(V^*)$ を普遍超平面族の $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ への引き戻しとする．FM 関手の核 $\mathcal{K}$ は $Z := \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp)$ の構造層 $\mathcal{O}_Z \in \mathcal{D}^b(\mathcal{P}_1 \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp))$ である[7]．

この定理の雰囲気をスケッチしてみる．$\mathbb{P}(V)$ の超平面 H の $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ への引き戻し $\mathbb{P}(\mathcal{E})_H$ の事を $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の超平面切断と呼ぶことにする．この超平面切断が再び S 上の射影空間束になれば，その導来圏は Orlov の定理によって分かり，結果的に $\langle \mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{i-1}(i-1) \rangle$ となる．つまり非自明な部分 $\mathcal{C}_H$ が現れない．これより HPD の候補は $\mathbb{P}(\mathcal{E})_H \to S$ が射影空間束とならない $[H] \in \mathbb{P}(V^*)$ ということになる．この H の条件は，ある $s \in S$ において，$\mathcal{E}$ のファイバー $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s) \subset V$ の射影化 $\mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s))$ が H に含まれるということであり，これから $\mathcal{E}^\perp$ の定義に至る．

4. Reye 合同

古典的な Reye 合同との関連から，$\mathbb{P}^n$ の対称積 $\Sigma = S^2\mathbb{P}^n$ の HPD を求めるのは興味深いが，一般には難しい問題である[8]．$n = 4$ の場合，細野忍さん（東大数理）と，この線形切断として得られる Calabi-Yau 3-fold X を詳しく調べた．特に，この Calabi-Yau 3-fold X と導来同値だが双有理同値でない Calabi-Yau 3-fold Y を見出した．この X と Y は直交線形切断の枠組みで捉えることが出来，そうすることで $S^2\mathbb{P}^4$ の HPD の候補も見えてくる．しかし，今回はこれについては述べない．詳しくは 2013 年の城崎シンポジウム報告集の記事を参照してください ([9])[9]．

---

[7]なお，$Z \subset \mathcal{P}_1 \times_{\mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp)$ に注意しておく．実際，$Z = \mathcal{P}_1 \times_{S \times \mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp)$ が成り立つからである．これを見ておく．$\mathcal{P}_1$ の点は (x, s, p) ($s \in S$, $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes k(s)) \subset \mathbb{P}(V)$, $p \in \mathbb{P}(V^*)$ で x は p に対応する超平面に含まれる)，$\mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp)$ の点は (y, t) ($t \in S$, $y \in \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp \otimes k(t)) \subset \mathbb{P}(V^*)$) と書ける．よって，$\mathcal{P}_1 \times_{S \times \mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp)$ の点は (x, s, y) ($s \in S$, $x \in \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes k(s)) \subset \mathbb{P}(V)$, $y \in \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp \otimes k(s)) \subset \mathbb{P}(V^*)$ で x は y に対応する超平面に含まれる）と書ける．ところが $\mathcal{E}^\perp$ の定義により,「x は y に対応する超平面に含まれる」と言う条件は自動的であることに注意する．よって，$\mathcal{P}_1 \times_{S \times \mathbb{P}(V^*)} \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp) = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbb{P}(\mathcal{E}^\perp) =: Z$ である．

[8]これよりも，より基本的と思われる歪対称版 $\mathrm{G}(r, n)$ の場合でさえ，HPD が求められているのはごくわずかである．

[9]本稿で扱う射影空間束の HPD の枠組みでは捉えられない．

以下，$S^2\mathbb{P}^2$ と $S^2\mathbb{P}^3$ について限定して話をするが，その前に，$S^2\mathbb{P}^n = S^2\mathbb{P}(V)$ $(V \simeq \mathbb{C}^{n+1})$ のよい特異点解消が，n によらず容易に構成できることを見ておく．そのために $S^2\mathbb{P}(V)$ を $\mathbb{P}(V)$ の長さ 2 の 0-サイクルをパラメーター付けるChow多様体と見る．この時，$\mathbb{P}(V)$ の長さ 2 の 0 次元スキームをパラメーター付ける Hibert スキームが特異点解消になる．具体的には，$\mathrm{G}(2,V)$ 上の階数 2 の普遍部分束を $\mathcal{U}$ で表すとき，この Hibert スキームは $p\colon \mathbb{P}(S^2\mathcal{U}) \to \mathrm{G}(2,V)$ なる射影平面束である．なぜなら，$\mathrm{G}(2,V)$ は $\mathbb{P}(V)$ の直線をパラメーター付けており，直線 l に対して $[l]$ 上の p のファイバーは，l の長さ 2 の 0 次元スキームであるからである（$\mathbb{P}(V)$ の長さ 2 の 0 次元スキームが $\mathbb{P}(V)$ の直線を定める事にも注意）．$S^2\mathbb{P}(V)$ の特異点集合は，$\mathbb{P}(V)$ の 2 次 Veronese 像 $v_2(\mathbb{P}(V))$ （台が 1 点となる長さ 2 の 0-サイクルに対応）であり，$S^2\mathbb{P}(V)$ は $v_2(\mathbb{P}(V))$ に沿って $\frac{1}{2}(1^n)$-特異点を持っていることが容易に分かる．特異点解消 $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U}) \to S^2\mathbb{P}(V)$ は $v_2(\mathbb{P}(V))$ に沿った爆発に他ならない事が分かる．

さて，$S^2\mathbb{P}^2$ と $S^2\mathbb{P}^3$ に対しては，まさにこの $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ に対して，射影空間束の HPD 理論が適用できることを見る．そこで次の定義を与えておく：

$$0 \to \mathcal{W} \to S^2V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{G}(2,V)} \to S^2\mathcal{U}^* \to 0$$

によって $\mathrm{G}(2,V)$ 上のベクトル束 $\mathcal{W}$ を定める．$\mathbb{P}(\mathcal{W})$ は $\mathbb{P}(V)$ **の直線とそれを含む 2 次超曲面の対をパラメーター付けている**ことに注意する[10].

4.1. $S^2\mathbb{P}^2$ **の場合．** これは，講演では時間がなくて触れられなかった場合である．

$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^2$ の直線を含む 2 次曲線とは特異 2 次曲線のことなので，$\mathbb{P}(\mathcal{W}) \to \mathbb{P}(S^2V^*)$ の像は特異 2 次曲線をパラメーター付けている $\mathbb{P}(S^2V^*)$ の 3 次超曲面 $\mathscr{H}$（3 次対称行列の行列式で定義）に他ならない．特異 2 次曲線は二つの直線の対であるから，自然な射 $(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^* \to \mathscr{H}$ が存在する[11]．これは，2 重直線をパラメーター付ける $\mathscr{H}$ の部分集合で分岐する 2 重被覆である．他方，$\mathbb{P}(\mathcal{W}) \to \mathscr{H}$ も同じ性質を持つ 2 重被覆である．こうして $\mathbb{P}(\mathcal{W}) \simeq (\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^*$，さらに $\mathcal{W} \simeq \mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2)^*}(-1)^{\oplus 3}$ であることが分かる．なお，$(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^* \to \mathscr{H}$ の考察を $S^2\mathbb{P}^2$ に適用すれば，$S^2\mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}(S^2V)$ において 3 次超曲面であることが分かる．$S^2\mathbb{P}^2$ は特異点集合 $v_2(\mathbb{P}^2)$ に沿って $\frac{1}{2}(1,1)$-特異点を持つので，特異点解消 $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U}) \to S^2\mathbb{P}^2$ はクレパントである．この場合，導来圏 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(S^2\mathcal{U}))$ は $\mathcal{D}^b(S^2\mathbb{P}^2)$ の Kuznetsov の意味での圏論的特異点解消である．

$\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ と $\mathbb{P}(\mathcal{W}) \simeq (\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^*$ の直交線形切断の関係がどのようになっているのか，定理 2, 3 を適用することで，$r = 2,3,4$ の場合に詳しく見ておく[12].

$\boxed{r = 3 \text{のとき}}$

$S^2\mathbb{P}^2 \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ は $\mathbb{P}(L^\perp) \simeq \mathbb{P}^2$ の 3 次曲線 C_1 であり，$\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ への引き戻しも，L を一般に取れば C_1 と同型である．$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(L)$ も $\mathbb{P}(L) \simeq \mathbb{P}^2$ の 3 次曲線

[10] $S^2\mathbb{P}^n$ を研究するとき，n によらず，$\mathbb{P}^n$ の二次超曲面（の線形系）の幾何が本質的に関わってくる．

[11] $(\mathbb{P}^2)^*$ は $\mathbb{P}^2$ の直線のパラメーター空間と見ている．

[12] $S^2\mathbb{P}^2$ は toy example であるが，十分楽しめるものだと思う（おもちゃと言ってる以上，楽しめなくちゃ仕方ないのだけれど）．

であり，L が一般的ならば，その $(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^*$ への引き戻し C_2 は 3 次曲線の不分岐 2 重被覆なので，やはり楕円曲線である．これは，$(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^*$ において，対称な $(1,1)$ 型因子 3 つによる完全交叉にもなっている．この場合，定理 2, 3 は C_1 と C_2 の導来同値を言っている．さらに，楕円曲線のよく知られた結果より，それは $C_1 \simeq C_2$ を意味する．具体的に j 関数を追ってみると面白い．

$\boxed{r = 2 \text{のとき}}$

$S^2\mathbb{P}^2 \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ は $\mathbb{P}(L^\perp) \simeq \mathbb{P}^3$ の 3 次曲面 S で，その特異点集合は，L が一般的な場合，$S^2\mathbb{P}^2$ の特異点集合 $v_2(\mathbb{P}^2)$ と $\mathbb{P}(L^\perp)$ の交わりであり，4 点からなることが分かる．また，この 4 点は ODP であり，S の $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ への引き戻し $T \to S$ はこの 4 点のクレパント特異点解消である．他方，$\mathbb{P}(L) \simeq \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ を $\mathbb{P}^2$ の 2 次曲線のペンシルと見なして，それを生成する 2 次曲線を q_1, q_2 とする．$q_1 \cap q_2$ の交点 $t_1, \ldots, t_4$ に対して，t_i と t_j $(1 \leq i < j \leq 6)$ を結ぶ $\mathbb{P}^2$ の直線を m_{ij} とすると，L に属する特異 2 次曲線，すなわち $\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(L)$ の各点に対応する 2 次曲線は，$m_{12} \cup m_{34}$, $m_{13} \cup m_{24}$, $m_{14} \cup m_{23}$ に他ならない．そして，これらに対応する 3 点の上にある $(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^*$ の点は，$([m_{12}], [m_{34}])$, $([m_{34}], [m_{12}]), \ldots$ なる 6 点である．これを $p_1, \ldots, p_6$ とすると，定理 2, 3 によって，

$$\mathcal{D}^b(T) = \langle \mathcal{D}^b(p_1), \ldots, \mathcal{D}^b(p_6), p^*\mathcal{D}^b((\mathbb{P}^2)^*)(1) \rangle$$

が分かる．これをもっと具体的に見てみる．$p\colon \mathbb{P}(S^2\mathcal{U}) \to \mathbb{P}(2, V) = (\mathbb{P}^2)^*$ の T への制限は $(\mathbb{P}^2)^*$ への双有理射であるが，S が 3 次曲面であることから，6 点の爆発であることに注意する．この 6 点が $p_1, \ldots, p_6$ の $(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^* \to (\mathbb{P}^2)^*$ による像（どちらでもよいが第一射影としておく），つまり $[m_{ij}] \in (\mathbb{P}^2)^*$ $(1 \leq i < j \leq 6)$ に一致することを示す．実際，上で見たとおり，$\mathbb{P}(L)$ に属する 2 次曲線で m_{ij} を含むものが存在するので，その 2 次曲線に対応する $\mathbb{P}(S^2V)$ の超平面の $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ への引き戻しは $p\colon \mathbb{P}(S^2\mathcal{U}) \to (\mathbb{P}^2)^*$ の $[m_{ij}]$ 上のファイバーを含む．よって，$\mathbb{P}(L^\perp)$ と $[m_{ij}]$ 上のファイバーの交わりは 1 次元以上である．これから，6 点爆発 $T \to (\mathbb{P}^2)^*$ はまさに $[m_{ij}]$ $(1 \leq i < j \leq 6)$ での爆発でなければならない事が分かる．これにより，上記の $\mathcal{D}^b(T)$ の SOD は，Orlov による非特異多様体の非特異部分多様体に沿った爆発による導来圏の変化の記述と両立している．

$\boxed{r = 4 \text{のとき}}$

$\mathbb{P}(L^\perp) \simeq \mathbb{P}^1$ より $S^2\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ は 3 点であり，これは $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ に同型に持ちあがる．これを p_1, p_2, p_3 とする．他方，$\mathbb{P}(L) \simeq \mathbb{P}^3$ より，その $(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^*$ への引き戻し S は次数 6 の del Pezzo 曲面である．定理 2, 3 によって，

$$\mathcal{D}^b(S) = \langle \mathcal{B}_2(-1), \mathcal{D}^b(p_1), \mathcal{D}^b(p_2), \mathcal{D}^b(p_3) \rangle$$

が分かる．これをもっと具体的に見てみる．S は次数 6 の del Pezzo 曲面であるから，$(\mathbb{P}^2)^* \times (\mathbb{P}^2)^* \to (\mathbb{P}^2)^*$ の S への制限は $(\mathbb{P}^2)^*$ の 3 点爆発である．この 3 点が p_1, p_2, p_3 の $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U}) \to (\mathbb{P}^2)^*$ による像に一致することを示す．実際，各 p_i は $\mathbb{P}^2$ の 2 点の対 (x_i, y_i) に対応するが，L と $L^\perp$ の直交性により，$\mathbb{P}(L)$ に属する任意の 2 次曲線を定める 3 次対称行列 A に対して ${}^t x_i A y_i = 0$ が分かる．これにより，x_i と y_i を結ぶ直線を含む $\mathbb{P}(L)$ に属する 2 次曲線は ${}^t x_i A x_i = 0$, ${}^t y_i A y_i = 0$ なる 2 条件で求まるから，少なくともペンシルを成すことが分か

る．$\mathbb{P}(\mathcal{W})=(\mathbb{P}^2)^*\times(\mathbb{P}^2)^*$ は $\mathbb{P}^2$ の 2 次曲線とそれに含まれる直線の対をパラメーター付けていたから，$\mathbb{P}(L)$ の $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ への引き戻し S から $(\mathbb{P}^2)^*$ への射影は各 p_i の $(\mathbb{P}^2)^*$ における像において 1 次元以上のファイバーを持つことが分かる．これから，3 点爆発 $S\to(\mathbb{P}^2)^*$ はまさに p_1,p_2,p_3 での爆発でなければならない．こうして，この場合も上記の $\mathcal{D}^b(S)$ の SOD は，Orlov の定理と両立している．

4.2. **$S^2\mathbb{P}^3$ の場合．** これは，講演で説明した場合である．toy example ではない．ある意味では，「Calabi-Yau の場合よりも込み入っている ⋯」と言える．現在，準備中の論文 [2] の基づいて述べる．

まず $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ と $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ について補足しておく．

$\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ の標準因子は $-3H-L_G$ である，ただし，H は $\mathcal{O}_{S^2\mathbb{P}^3}(1)$ の引き戻し，L_G は $\mathcal{O}_{\mathrm{G}(2,V)}(1)$ の引き戻しである．

$\mathbb{P}(\mathcal{W})$ は $\mathbb{P}(V)\simeq\mathbb{P}^3$ の 2 次曲面とその上の直線の対をパラメーター付けているが，どんな 2 次曲面も直線を含むから，自然な射 $\mathbb{P}(\mathcal{W})\to\mathbb{P}(S^2V^*)$ は全射である．さらに，階数 4 の 2 次曲面 $\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ に対応する $\mathbb{P}(S^2V^*)$ の点上のファイバーは 2 つの $\mathbb{P}^1$ の非連結和（それぞれ，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の線織族に属する直線をパラメーター付けている），その他のファイバーは連結である．よって，$\mathbb{P}(\mathcal{W})\to\mathbb{P}(S^2V^*)$ の Stein 分解を $\mathbb{P}(\mathcal{W})\to\mathscr{Y}\to\mathbb{P}(S^2V^*)$ とすると，$\mathscr{Y}\to\mathbb{P}(S^2V^*)$ は，階数が 3 以下の 2 次曲面に対応する $\mathbb{P}(S^2V^*)$ の部分集合 $\mathscr{H}$ で分岐する 2 重被覆である．ここで，$\mathscr{H}$ は 4 次対称行列の行列式で定義される 4 次超曲面である（有名な Cayley の quartic symmetroid)．また，$\mathbb{P}(\mathcal{W})\to\mathscr{Y}$ は，階数 3 以上の部分で $\mathbb{P}^1$ をファイバーに持つ（階数 4 の部分については上で述べたことから分かるが，階数 3 の場合も，2 次曲面は 2 次曲線上の錐であり，確かにその上の直線は一つの $\mathbb{P}^1$ でパラメーター付けられている）．$\mathbb{P}(\mathcal{W})$ の標準因子は $-7M-L_G$ である，ただし，M は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2V^*)}(1)$ の引き戻し，L_G は $\mathcal{O}_{\mathrm{G}(2,V)}(1)$ の引き戻しである．

さて，線形切断として，まず $r=3$ の場合を考える．$v_2(\mathbb{P}^3)$ の次数は 8 であるから，一般的な L を取ると，$v_2(\mathbb{P}^3)\cap\mathbb{P}(L^\perp)$ は 8 点からなり，$X:=S^2\mathbb{P}^3\cap\mathbb{P}(L^\perp)$ はそこで $\frac{1}{2}(1,1,1)$ 特異点を持つ．X は $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold で，**Enriques-Fano 3-fold** と呼ばれるものの例になっている．その名前は，超平面切断が Enriques 曲面になっていることに由来する．終着特異点のみ持つ場合，その分類は [1], [8], [7] で得られている．X の $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ への引き戻しを $\widetilde{X}$ で表すと，$\widetilde{X}\to X$ は 8 個の $\frac{1}{2}(1,1,1)$ 特異点での爆発である．他方，Z を，$\mathbb{P}(L)$ の $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ への引き戻しとする．Z は smooth 3-fold である．また，Y を $\mathbb{P}(L)\simeq\mathbb{P}^2$ の $\mathscr{Y}$ への引き戻しとすると，$Y\to\mathbb{P}(L)$ は 4 次曲線 $C:=\mathscr{H}\cap\mathbb{P}(L)$ で分岐する 2 重被覆であるが，L が一般的な場合，C は非特異であるから，Y は非特異 2 次 del Pezzo 曲面である．また，C が非特異であることから，$\mathbb{P}(L)$ の点に対応する 2 次曲面の階数は 3 以上であり，従って $Z\to Y$ のすべてのファイバーは $\mathbb{P}^1$ である．以上の状況が実は次のように一つの可換図式に収まる：

命題 4. 次の可換図式がある：

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[r, dashed] \arrow[dl] & Z \arrow[dr] & \\ X & & & Y. \end{tikzcd}$$

ここで $\widetilde{X} \dashrightarrow Z$ はフロップであり，特に $\widetilde{X}$ と Z は双有理同値[13]である．また，フロップによって導来同値が誘導されるから，$\widetilde{X}$ と Z は導来同値である（これは，この場合の定理 2, 3 の帰結でもある）．

証明．まず，$\mathrm{G}(2,V)$ における $\widetilde{X}$ と Z の像が一致することを示す．$\mathsf{S}^2\mathcal{U}$ と $\mathcal{W}$ の直交性により，各点 $s \in \mathrm{G}(2,V)$ に対して，$\mathsf{S}^2\mathcal{U}$ と $\mathcal{W}$ のファイバーをそれぞれ，$W_s^{\perp} \subset \mathsf{S}^2V$, $W_s \subset \mathsf{S}^2V^*$ で表す．$L_3 \subset \mathsf{S}^2V^*$ を $\mathbb{P}(L_3) = P_2$ となる部分空間とする．このとき，

$$\dim(W_s^{\perp} \cap L_3^{\perp}) = \dim(W_s \cap L_3) \tag{4.1}$$

が成り立つ．実際，$\dim \mathsf{S}^2V = \dim W_s + \dim L_3$ により，$\dim(W_s^{\perp} \cap L_3^{\perp}) = \dim \mathsf{S}^2V - \dim(W_s + L_3) = \dim \mathsf{S}^2V - \dim W_s - \dim L_3 + \dim(W_s \cap L_3) = \dim(W_s \cap L_3)$ となる．ここで，$s \in \mathrm{G}(2,V)$ が $\widetilde{X}$ (resp. Z) の像に入ることと，$\dim(W_s^{\perp} \cap L_3^{\perp}) \geq 1$ (resp. $\dim(W_s \cap L_3) \geq 1$) が同値であることに注意すれば，(4.1) によって，$\mathrm{G}(2,V)$ における $\widetilde{X}$ と Z の像が一致することが分かる．以下，これを $\overline{X}$ で表す．

$\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ と $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ の標準因子の公式から，$-K_{\widetilde{X}} = L_G|_{\widetilde{X}}$ and $-K_Z = L_G|_Z$ であることに注意する．さらに，容易な計算から $(-K_{\widetilde{X}})^3 > 0$，$(-K_Z)^3 > 0$ であることが分かるから，$\overline{X}$ は $\mathrm{G}(2,V)$ の三次切断であり，$\widetilde{X} \to \overline{X}$ と $Z \to \overline{X}$ はともにクレパントな双有理射であることが分かる．

$\widetilde{X} \to \overline{X}$ と $Z \to \overline{X}$ の非自明なファイバーを調べる．まず，これらはともに非自明な射である．実際，そのいずれかが自明ならば $\widetilde{X}$ ないし Z は $\mathrm{G}(2,V)$ の 3 次切断と同型になるが，$\widetilde{X}, Z$ のピカール数は 2 以上，3 次切断のピカール数は 1 なので矛盾である．(4.1) により，$\widetilde{X} \to \overline{X}$ が点 s 上に非自明なファイバーを持つことと，$Z \to \overline{X}$ が点 s 上に非自明なファイバーを持つことは同値であり，また，そのファイバーの次元は等しい事が分かる．よって，以下，$Z \to \overline{X}$ の非自明なファイバーを調べればよい．$Z \to \overline{X}$ の非自明なファイバーは $\mathbb{P}^1$ であることを示す．実際，そうでなければ，$\mathbb{P}^2$ がファイバーとして現れるが，$Z \to Y$ により $\mathbb{P}^2$ が次数 2 の del Pezzo 曲面 Y を支配してしまうので矛盾である．

こうして，$\widetilde{X} \to \overline{X}$ と $Z \to \overline{X}$ はフロップ型縮小写像であることが分かった．$\widetilde{X} \dashrightarrow Z$ が同型でない事なども分かるがここでは略す． □

話はこれで終わりではない．本来は $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ と $\mathbb{P}(\mathcal{W})$ ではなく，$\mathbb{P}(S^2V)$ と $\mathbb{P}(S^2V^*)$ に含まれるそれらの像 $S^2\mathbb{P}^3$ と $\mathscr{Y}$ の双対性を期待するのが自然だからである．実際，この期待はおそらく正しいが，それを定式化するには，$S^2\mathbb{P}^3$ と $\mathscr{Y}$ ともに特異点を持っているため，導来圏の非可換特異点解消を考えなけ

[13] このように，もともと双対的だったものが，双有理写像で結びつくことがしばしばある．

ればならない．$S^2\mathbb{P}^3$ の特異点は単純であるので，その導来圏の非可換特異点解消を構成することが出来る．それは論文 [6] で展開されている一般論による．他方，$\mathscr{Y}$ については，特異点がやや複雑であり，未だ非可換な特異点解消を定式化できていない．$S^2\mathbb{P}^3$ と $\mathscr{Y}$ の非可換特異点解消の HPD を定式化して示すには，他にもまだいくつかしなくてはいけないことがあって先は長いが，$r=3$ の場合の線形切断については，$S^2\mathbb{P}^3$ と $\mathscr{Y}$ の双対性から予想される定理 2 の帰結を確かめることができる．

定理 5. $E_1,\dots,E_8$ を $\widetilde{X}\to X$ の例外因子，$\iota_i\colon E_i\hookrightarrow\widetilde{X}$ を埋め込みとする．

$$\mathcal{D}^b(\widetilde{X})=\langle\iota_{1*}\mathcal{O}_{E_1}(-1),\dots,\iota_{8*}\mathcal{O}_{E_8}(-1),\mathcal{D}_X\rangle$$

によって，部分三角圏 $\mathcal{D}_X$ を定める（これが Kuznetsov の意味での $\mathcal{D}^b(X)$ の圏論的特異点解消である．さらに，ある $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{R}$ があって，$\mathcal{D}_X\simeq\mathcal{D}^b(X,\mathcal{R})$ となることも分かる．$\mathcal{D}^b(X,\mathcal{R})$ がこの場合の非可換特異点解消である）．この時，三角圏 $\mathcal{C}$ が存在して次のような $\mathcal{D}_X$, $\mathcal{D}^b(Y)$ の分解を与える：

$$\mathcal{D}_X=\langle\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2H+L_G),\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-H),p^*\mathcal{U}^*(-H),\mathcal{C}\rangle,$$

$$\mathcal{D}^b(Y)=\langle\mathcal{C},\mathcal{O}_Y(-K_Y)\rangle.$$

証明の鍵となるのは，上で示した $\mathcal{D}^b(\widetilde{X})\simeq\mathcal{D}^b(Z)$ と，論文 [3] において得られた $\mathcal{D}^b(Z)$ の分解である（[3] では $r=4$ の場合に示されているがこの場合も成り立つ）．それはまた，Kuznetsov によって得られた $v_2(\mathbb{P}(V))$ の HPD の記述 [5] に基づいている（この結果では V の次元は任意でよい）．詳細は略すが，$v_2(\mathbb{P}(V))$ の Lef D を選ぶと，それに関する $v_2(\mathbb{P}(V))$ の HPD は $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(S^2V^*),\mathcal{B}_0)$ である．ここで，$\mathcal{B}_0$ は Clifford 代数の偶次部分の層化であり，$\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(S^2V^*),\mathcal{B}_0)$ はその加群の導来圏である．$\mathbb{P}(S^2V^*)$ が $\mathbb{P}(V)$ の 2 次超曲面をパラメーター付けているため，このような $\mathcal{B}_0$ が構成できる（2 次超曲面から定まる Clifford 代数の層化）．$Z\to Y$ のすべてのファイバーが $\mathbb{P}^1$ であることから[14]，[3] の議論より $\mathcal{D}^b(Z)=\langle\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L),\mathcal{B}_0),\mathcal{D}^b(Y)\rangle$ なる分解が得られる．ここで，$\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L),\mathcal{B}_0)$ は $\mathcal{B}_0$ の制限の加群の導来圏である．$v_2(\mathbb{P}(V))$ に対して，定理 2 を適用すると，$\mathcal{D}^b(\mathbb{P}(L),\mathcal{B}_0)=\langle\mathcal{D}^b(v_2(\mathbb{P}(V)\cap\mathbb{P}(L^\perp))),\mathcal{B}_{-1},\mathcal{B}_0\rangle$ なる形の分解が得られる．ここで，$\mathcal{B}_k:=\mathcal{B}_0\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(L)}(k)$ である．さらに，$\mathcal{D}^b(Y)=\langle\mathcal{C}_Y,\mathcal{O}_Y(-K_Y)\rangle$ と分解しておく．まとめると

$$\mathcal{D}^b(Z)=\langle\mathcal{D}^b(v_2(\mathbb{P}(V)\cap\mathbb{P}(L^\perp))),\mathcal{B}_{-1},\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_Y,\mathcal{O}_Y(-K_Y)\rangle$$

なる分解を得た．他方，$\mathcal{D}^b(\widetilde{X})$ を

$$\mathcal{D}^b(\widetilde{X})=\langle\iota_{1*}\mathcal{O}_{E_1}(-1),\dots,\iota_{8*}\mathcal{O}_{E_8}(-1),\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-2H+L_G),\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-H),p^*\mathcal{U}^*(-H),\mathcal{C}_X\rangle$$

と分解しておく．変異という導来圏の操作を繰り返し，$\mathcal{D}^b(\widetilde{X})\simeq\mathcal{D}^b(Z)$ に注意すると $\mathcal{C}_X\simeq\mathcal{C}_Y$ を示すことが出来る．これが定理の主張に他ならない．なお，$v_2(\mathbb{P}(V)\cap\mathbb{P}(L^\perp)$ は 8 点であり，それは $\widetilde{X}\to X$ による $E_1,\dots,E_8$ の像である．よって，$\mathcal{D}^b(v_2(\mathbb{P}(V)\cap\mathbb{P}(L^\perp)))$ と $\iota_{1*}\mathcal{O}_{E_1}(-1),\dots,\iota_{8*}\mathcal{O}_{E_8}(-1)$ の部分が対応している．

[14] この事実を使うので $\dim V$ と r に制限が付く．

最後に，$r=4$ の場合を考える．これが $S^2\mathbb{P}^3$ の線形切断として最も古典的で，興味深いと思われる場合である．この場合，$X := S^2\mathbb{P}^3 \cap \mathbb{P}(L^\perp)$ とおくと X は Enriques 曲面である．これを **Reye 合同型 Enriques 曲面**と言う．これは $\mathbb{P}(S^2\mathcal{U})$ に同型に持ちあがる．Y を $\mathbb{P}(L)\simeq\mathbb{P}^3$ の $\mathscr{Y}$ への引き戻しとすると，Y は **Artin-Mumford の quartic double solid** である．一般的な L に対して，4 次曲面 $\mathscr{H}\cap\mathbb{P}(L)$ が 10 個の ODP を持つことから，Y も 10 個の ODP を持つ．X と Y の cohomological な関係については古くから研究されてきた．例えば，Enriques 曲面の Brauer 群が 2-torsion を持つことから，Y の ODP での爆発 $\widetilde{Y}$ の Brauer 群が 2-torsion を持つ．特に $\widetilde{Y}$ は非有理的である．

この関係を導来圏レベルで主張するのが，定理 5 に対応する次の予想である：

予想 6. $F_1,\dots,F_{10}$ を $\widetilde{Y}\to Y$ の例外因子 ($F_i\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$), $\iota_i\colon F_i\hookrightarrow\widetilde{Y}$ を埋め込みとする．

$$\mathcal{D}^b(\widetilde{Y}) = \langle \iota_{1*}\mathcal{O}_{F_1}(-1,-1),\dots,\iota_{10*}\mathcal{O}_{F_8}(-1,-1),\mathcal{D}_Y\rangle$$

によって，部分三角圏 $\mathcal{D}_Y$ を定める（これが Kuznetsov の意味での $\mathcal{D}^b(Y)$ の圏論的特異点解消である．さらに，ある $\mathcal{O}_Y$-加群 $\mathcal{R}$ があって，$\mathcal{D}_Y\simeq\mathcal{D}^b(Y,\mathcal{R})$ となることも分かる．$\mathcal{D}^b(Y,\mathcal{R})$ がこの場合の非可換特異点解消である）．このとき，

$$\mathcal{D}_Y = \langle \mathcal{D}^b(X),\mathcal{O}_Y(1),\mathcal{O}_Y(2)\rangle$$

が成り立つ．

[3] の主結果は，この部分的解決である．$r=3$ の場合と同様に Z を定義して，$\mathcal{D}^b(Z)$ と $\mathcal{D}^b(X)$ の関係に注目するのだが[15]，この場合，$Z\to Y$ のファイバーで $\mathbb{P}^1$ でないものがある（Y の 10 個の ODP は階数 2 の 2 次曲面に対応しており，その上のファイバーは $\mathbb{P}^2$2 つが 1 点で交わったものである）ことが障害となり，部分的解決にとどまっている．

論文 [2] において，[9] で説明している Calabi-Yau の場合にヒントを得て，$\mathrm{S}^2\mathbb{P}^3$ と $\mathscr{Y}$ が HPD であることを示すであろう核 $\mathcal{K}$ の候補を見つけた．HPD を確立するのは，かなりハードであると思うが，$\mathcal{K}$ を用いて予想 6 を解決することは可能だと思い，現在，研究を続けている．

References

[1] L. Bayle, *Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d'Enriques*, J. Reine Angew. Math., 449:9–63, 1994.

[2] S. Hosono, and H. Takagi, *Derived categories of linear sections of* $\mathrm{S}^2\mathbb{P}^3$, in preparation.

[3] C. Ingalls, and A. Kuznetsov, *On nodal Enriques surfaces and quartic double solids*, arXiv:1012.3530

[4] A. Kuznetsov, *Homological projective duality*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 105 (2007), 157–220.

[5] ———, *Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics*, Advances in Mathematics, V. 218 (2008), N. 5, 1340–1369.

[6] ———, *Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities*, Selecta Mathematica June 2008, Volume 13, Issue 4, pp 661–696

[15] その方法をまねたのが定理 5 の証明法である．

[7] T. Minagawa, *Deformations of* $\mathbb{Q}$-Calabi-Yau 3-folds and $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of Fano index 1, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 6(2):397–414, 1999

[8] T. Sano, *On classification of non-Gorenstein* $\mathbb{Q}$*-Fano* 3*-folds of Fano index* 1, J. Math. Soc. Japan Volume 47, Number 2 (1995), 369–380.

[9] 高木寛通, Reye 合同の幾何学, 2013 年代数幾何学城崎シンポジウム報告集