数理解析研究所講究録
第1897巻 2014年 31-42

On birationally tririgid $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds

佐賀大学工学系研究科　岡田拓三 *
Takuzo Okada
Graduate school of Science and Engineering, Saga University

1 背景と主定理

本報告書において, $\mathbb{Q}$ ファノ多様体とは, $\mathbb{Q}$ 分解的かつ高々端末特異点しか持たない正規射影多様体でその反標準因子が豊富かつピカール数が1のものとする. $\mathbb{Q}$ ファノ多様体 X に対して, X と双有理同値である森ファイバー空間のことを X の**双有理的森ファイバー構造**と呼ぶ. 双有理的森ファイバー構造を唯一つしか持たないような $\mathbb{Q}$ ファノ多様体は**双有理剛性**を有すると言われるが, その代表的な例として, 非特異3次元4次超曲面 ([9]), もっと一般に, 非特異 n 次元 $n+1$ 次超曲面（ただし, $n \geq 3$）が挙げられる ([6, 14]). 題目にある “birationally tririgid” は双有理的森ファイバー構造を丁度3つ有することを意味する. 双有理剛性の理論の背景には, 代数多様体の有理性判定問題及び自己双有理写像群の解析がある: $\mathbb{Q}$ ファノ多様体の双有理剛性は直ちに非有理性を導き, また双有理剛性を決定する過程において自己双有理写像群の決定に関する本質的な構造解析がなされる. もっと一般に, 双有理的森ファイバー構造を有限個しか有しなければ, その多様体は非有理的である.

本報告書の内容に深く関連する結果を紹介する. Corti-Pukhlikov-Reid([5]) および Cheltsov-Park([1]) は, 95族からなる3次元 $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面が双有理剛性を有することを示した. Corti-Mella([4]) は, 特定の端末特異点（cA_2 特異点）を有する3次元4次超曲面は, その双有理的森ファイバー構造を丁度2つ有することを示した. また, [12, 13] では, 85族からなる3次元 $\mathbb{Q}$ ファノ（余次元2）完全交叉について研究し, 現在のところ, 19族が双有理剛性を有していること, 及び14族がその双有理森ファイバー構造を丁度2つ持つこと, を示している.

本報告書の目的は, 双有理的森ファイバー構造を丁度3つ有するような $\mathbb{Q}$ ファノ多様体を提示することである. このような例は著者の知る限りにおいて, 初めての例である. また, 本研究の副産物として, 双有理的森ファイバー構造数が族において上半連続的に振る舞わない, ということも確認できる.

*email: okada@cc.saga-u.ac.jp

以下では, $\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$ を, 次数がそれぞれ $1,1,2,2,3$ であるような x_0, x_1, y_0, y_1, z を斉次座標とする重み付き射影空間とする. 本報告書では, $\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$ の 8 次超曲面を主対象とするが, それらについて次のようなことが知られている.

定理 1.1 ([1, 5]). $\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$ の 8 次超曲面で準非特異であるものは双有理剛性を有する.

ここに, 重み付き超曲面が**準非特異**であるとは, そのアフィン錐が原点を除いて非特異であることを言う. これは, 射影空間の超曲面の場合の非特異性と対応するもので, 準非特異重み付き超曲面は高々巡回商特異点しか持たない.

定理 1.2 ([13]). X を $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面

$$X = (y_1^2 y_0(y_0 + f_2) + y_1 g_6 + h_8 = 0) \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3)$$

とする. ただし, $f_2, g_6, h_8 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, y_0, z]$ は次数がそれぞれ $2,6,8$ の斉次多項式とする. このとき, X は丁度 2 つの双有理的森ファイバー構造を有する.

次が本報告書の主定理である.

定理 1.3. X を $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面

$$X = (y_0^2 y_1^2 + y_0 a_6 + y_1 b_6 + c_8 = 0) \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3)$$

とする. ただし, $a_6, b_6, c_8 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, z]$ は次数がそれぞれ $6,6,8$ の斉次多項式とする. このとき, 以下が成立する.

(1) a_6, b_6, c_8 が一般であれば, X は森ファイバー構造を丁度 3 つ有する.

(2) a_6, b_6, c_8 が特殊な場合, X は双有理的森ファイバー構造を丁度 2 つ有する.

定理 1.1, 1.2, 1.3 の (1) の順に対象となる $\mathbb{Q}$ ファノ多様体は特殊なものになって行き, それに応じて双有理的森ファイバー構造の個数が 1, 2, 3 と増加していく. ただし, さらに特殊な対象である定理 1.3 の (2) のものになると, 双有理的森ファイバー構造の個数は 2 と減少する. このことにより, 双有理的森ファイバー構造の個数は上半連続的に振る舞わないことが分かる.

さらに多くの双有理的森ファイバー構造を有する $\mathbb{Q}$ ファノ多様体の構成を期待するのは自然であると考える. 今回の結果を観察すれば, $X \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3)$ にさらに多くの $cAx/2$ 特異点を持たせれば良いのではないかと考えるが, X は 3 つ以上の $cAx/2$ 特異点は持ち得ない. 一般に, 特異点を多く有するほど, 森ファイバー構造を多く有する傾向があるが, 同一族の中で特異点を多く持つことを課せばその多様体の $\mathbb{Q}$ 分解性が崩れてしまうことが観察されている.

前述の通り, 本研究は代数多様体の有理性問題と密接に関連している. $\mathbb{Q}$ ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造が双有理不変量であること, および射影空間の双有

理的森ファイバー構造が無限であることを鑑みれば, 双有理的森ファイバー構造の個数が有限であることは直ちにその多様体が非有理的であることを意味する. 主定理から次の系を得る.

系 1.4. 定理 1.3 の $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面 X は非有理的である.

2 サルキソフリンク

この節では, まず, 森ファイバー空間の間の双有理写像の構成要素であるサルキソフリンクを導入する. さらに, 対象である $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面 X と双有理同値である $\mathbb{Q}$ ファノ多様体について説明し, それらの間の双有理写像がサルキソフリンクとして構成されることを概観する.

サルキソフリンクは一般には森ファイバー空間の間の双有理写像であるが, 説明を簡略化するため, $\mathbb{Q}$ ファノ多様体の間のもののみ定義する. また, 本報告書では, **因子収縮射** $\varphi\colon Y \to X$ とは, 次の性質を満たすものとする:

- X, Y は, 高々端末特異点しか持たないような $\mathbb{Q}$ 分解的正規射影多様体である.
- φ は, $(K_Y \cdot R) < 0$ である単射線 R の収縮射で, 因子を潰す.

定義 2.1. $\sigma\colon X \dashrightarrow X'$ を $\mathbb{Q}$ ファノ多様体の間の双有理写像とする. 因子収縮射 $\varphi\colon Y \to X$, $\varphi'\colon Y' \to X'$ 及び, 逆フリップ, フロップ, フリップの（この順序による）合成 $\tau\colon Y \dashrightarrow Y'$ が存在し, 図式

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y' \arrow[d, "\varphi'"] \\
X \arrow[r, dashed, "\sigma"] & X'
\end{tikzcd}
$$

が可換になるとき, σ を**サルキソフリンク**という. 因子収縮射 φ を明示したいときは, σ を φ **を始点とするサルキソフリンク**という. 因子収縮射 φ の X における中心のことをサルキソフリンク σ の**中心**と呼ぶ.

森ファイバー空間の間の双有理写像に関する基本定理としてサルキソフプログラムがある. 主定理の証明において論理的には不要ではあるものの, 本研究の背景として重要であるので, 紹介しておく. 前述の通り, サルキソフリンクは一般の森ファイバー空間の間の特定の型の双有理写像であり, 定義 2.1 以外の型のものも存在する ([2] 参照).

定理 2.2 ([2, 7]). 森ファイバー空間の間の任意の双有理写像は, サルキソフリンクの合成として表せる.

以下, $a_6, b_6, c_8 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, z]$ を斉次多項式とし, 本報告書の対象である $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面

$$X = (y_1^2 y_0^2 + y_0 a_6 + y_1 b_6 + c_8 = 0) \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3)$$

からのサルキソフリンクを記述する. ここでは, (a_6, b_6, c_8) が一般とは仮定せず, 特殊な場合も平行して議論する.

定義 2.3. 重み付き射影空間 $\mathbb{P}(1,1,2,3,4,4)$ の斉次座標を x_0, x_1, y, z, t_0, t_1 とし, それらの次数をそれぞれ $1,1,2,3,4,4$ とする. 斉次多項式 $a_6, b_6, c_8 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, z]$ に対して, 重み付き完全交叉 X_1', X_2' を

$$X_1' = (t_0 y + t_1 y + a_6 = t_0 t_1 - y b_6 + c_8 = 0) \subset \mathbb{P}(1,1,2,3,4,4),$$
$$X_2' = (t_0 y + t_1 y + b_6 = t_0 t_1 - y a_6 + c_8 = 0) \subset \mathbb{P}(1,1,2,3,4,4),$$

と定める.

以下で説明するように, X は X_1' および X_2' と双有理同値である. X, X_1' および X_2' の特異点を記述するために, 端末特異点の一つである $cAx/2$ 特異点の定義を述べる.

定義 2.4. 3 次元特異点の芽 (X, x) が $cAx/2$ **特異点**であるとは, (X, x) が

$$(x^2 + y^2 + f(z, u) = 0) \subset \mathbb{A}^4/\mathbb{Z}_2(0,1,1,1)$$

(の原点) と同値であるときに言う. ただし, $\mathbb{A}^4/\mathbb{Z}_2(0,1,1,1)$ は x, y, z, u をアフィン座標に持つアフィン空間の $\mathbb{Z}_2$ による作用

$$x \mapsto x,\ y \mapsto -y,\ z \mapsto -z,\ u \mapsto -u$$

による商空間であり, $f(z, u) \in (z, u)^4$ は $\mathbb{Z}_2$-不変とする.

事実 2.5. X, X_1', X_2' は以下のような特異点を持つ.

- X の特異点集合は $\mathrm{Sing}(X) = \{\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2, \mathsf{p}_3\}$,

  $$\mathsf{p}_1 = (0{:}0{:}1{:}0{:}0),\ \mathsf{p}_2 = (0{:}0{:}0{:}1{:}0),\ \mathsf{p}_3 = (0{:}0{:}0{:}0{:}1),$$

  であり, 特異点の型は順に, $cAx/2$, $cAx/2$, $\frac{1}{3}(1,1,2)$ である.
- X_1', X_2' の特異点はそれぞれ 3 点ずつ有り, 内訳は, $\frac{1}{4}(1,1,3)$ 特異点が 2 点と, $cAx/2$ 特異点が 1 点である.

X の特異点 $\mathsf{p}_1 = (0{:}0{:}1{:}0{:}0)$ を中心とするサルキソフリンク $X \dashrightarrow X_1'$ の構成を概観する. この構成は X_1' に着目した方が見通しが良い. $\mathsf{p}' = (0{:}0{:}0{:}0{:}1{:}0) \in X_1'$ とすると, これは X_1' の $\frac{1}{4}(1,1,3)$ 特異点である. 点 p' からの射影

$$\pi' \colon X_1' \dashrightarrow Z \subset \mathbb{P}(1,1,2,3,4)$$

の像は重み付き超曲面

$$Z := (t_1(t_1y + a_6) + y(yb_6 + c_8) = 0) \subset \mathbb{P}(1,1,2,3,4)$$

である. 対応

$$x_0 \mapsto x_0,\ x_1 \mapsto x_1,\ y \mapsto y_1,\ z \mapsto z,\ t_1 \mapsto y_0y_1$$

により, 双有理写像 $\pi\colon X \dashrightarrow Z$ が定まる. これは, Z の定義式において, $t_1 = y_0y_1$, $y = y_1$ とおくことで確かめられる. 詳細な説明は省略するが, π および π' は, p_1 および p' を中心とする因子収縮射 $\varphi\colon Y \to X$ および $\varphi'\colon Y' \to X'$ により, それぞれの不確定点が解消される. つまり, 次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} Y_1' \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, "\psi'"] & & Y \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ X_1' \arrow[r, dashed, "\pi'"] & Z & X \arrow[l, dashed, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

さらに, ψ および ψ' が共にフロップ収縮射, つまり K-自明な有限個の曲線を潰す双有理射であることが示される. つまり, $\psi^{-1} \circ \psi'\colon Y_1' \dashrightarrow Y$ はフロップである. 以上により, 誘導される双有理写像 $\sigma\colon X_1' \dashrightarrow X$ が $\frac{1}{4}(1,1,3)$ 特異点 $\mathsf{p}' \in X_1'$ を中心とするサルキソフリンク, その逆写像 $\sigma^{-1}\colon X \dashrightarrow X'$ が $cAx/2$ 特異点 $\mathsf{p}_1 \in X$ を中心とするサルキソフリンクであることがわかる. このような明示的なサルキソフリンクの構成は Reid による "unprojection" の理論を基礎としている ([15] 参照).

X の定義方程式の対称性 (y_0 と y_1 および a_6 と b_6 に関する対称性) から, p_1 と同様に $cAx/2$ 特異点である p_2 を中心とするサルキソフリンク $X \dashrightarrow X_2'$ が構成される. なお, X, X_1', X_2' のその他の特異点を中心とするサルキソフリンクも同様の明示的手法 "unprojection" により構成され, その結果を纏めると以下のようになる.

定理 2.6. X の特異点を中心とするサルキソフリンクは以下の通りである.

(1) $cAx/2$ 特異点 $\mathsf{p}_1 \in X$ を中心とする因子収縮射は唯一つ存在し, その因子収縮射を始点とするサルキソフリンク $\sigma_1\colon X \dashrightarrow X_1'$ が存在する.

(2) $cAx/2$ 特異点 $\mathsf{p}_2 \in X$ を中心とする因子収縮射は唯一つ存在し, その因子収縮射を始点とするサルキソフリンク $\sigma_2\colon X \dashrightarrow X_2'$ が存在する.

(3) $\frac{1}{3}(1,1,2)$ 特異点 $\mathsf{p}_3 \in X$ を中心とする因子収縮射は唯一つ存在し, その因子収縮射を始点とするサルキソフリンク $\iota\colon X \dashrightarrow X$ が存在する. さらに, ι は双有理対合である.

定理 2.7. X_1' および X_2' の特異点を中心とするサルキソフリンクは以下の通りである.

(1) X_1' および X_2' 上の $\frac{1}{4}(1,1,3)$ 特異点を中心とする因子収縮射がそれぞれ唯一つ存在し, それらを始点とする X へのサルキソフリンク $\sigma_1'\colon X_1' \dashrightarrow X$ および $\sigma_2'\colon X_2' \dashrightarrow X$ が存在する.

(2) X'_1 と X'_2 が非同型であれば, X'_1 上の $cAx/2$ 特異点を中心とする唯一の因子収縮射を始点とする X'_2 へのサルキソフリンク $\theta\colon X'_1 \dashrightarrow X'_2$ が存在する. 逆写像 $\theta^{-1}\colon X'_2 \dashrightarrow X'_1$ は X'_2 の $cAx/2$ 特異点を中心とするサルキソフリンクである.

3 次元端末的商特異点を中心とする因子収縮射が唯一存在することは, 川又 ([11]) の結果であり, X の $cAx/2$ 特異点 $\mathsf{p}_1, \mathsf{p}_2$ を中心とする因子収縮射が唯一つ存在することは, 早川 ([8]) および川北 ([10]) による端末特異点を中心とする因子収縮射の分類結果から従う ($cAx/2$ 特異点でも, その形態によって因子収縮射が唯一つの場合と二つ存在する場合が有る. X, X'_1, X'_2 の $cAx/2$ 特異点の場合は前者である). なお, X'_1 と X'_2 は一般には同型にならない.

補題 2.8. 斉次多項式の組 (a_6, b_6, c_8) が一般であれば, X'_1 と X'_2 は非同型である.

この補題の証明は, X'_1 と X'_2 の間に同型写像が存在すれば, それは $\mathbb{P}(1,1,2,3,4,4)$ の同型写像へと延長されることを示し, その後, 定義方程式の明示性を用いて, そのような同型写像が存在するには (a_6, b_6, c_8) に強い制限がかかることを示すことで完了する.

また, (a_6, b_6, c_8) が特殊な組である場合（典型的には $a_6 = b_6$ の場合）, $X'_1 \cong X'_2$ となる. 以上により, X の双有理的森ファイバー構造は, X が一般であれば少なくとも X, X'_1, X'_2 の 3 つを含み, X が一般の場合は, X, $X'_1 = X'_2$ の 2 つを含むことが分かる. このことが, 定理 1.3 の (1) および (2) の違いを説明している. 次節以降では, X の双有理的森ファイバー構造は上記のもので尽きることを説明する.

3 極大特異性の理論

$\mathbb{Q}$ ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造を決定するための基礎である, 極大特異性の理論について説明する. 本理論は [9] に起源を持ち, その後 Iskovskikh, Pukhlikov, Corti, Reid 等による寄与を中心に発展したものである. Iskovskikh, Pukhlikov による理論は [9] を忠実に踏襲したものであり, Corti, Reid による理論は [9] をより極小モデル理論およびサルキソフ理論に沿う形へと再解釈したものになっている ([5] 参照). 本報告書では後者の理論を採用する. 以下本節では, X を $\mathbb{Q}$ ファノ多様体で, その Weil 因子類群 $\mathrm{Cl}(X)$ が $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}[-K_X]$ をみたすものとする.

定義 3.1. $\mathcal{H} \subset |-nK_X|$ を可動線形系, つまり, 固定因子を持たない線形系とし, $\lambda > 0$ を有理数とする. 固有双有理射 $\varphi\colon Y \to X$ が与えられたとき,

$$K_Y + \lambda\varphi_*^{-1}\mathcal{H} = \varphi^*(K_X + \lambda\mathcal{H}) + \sum_{E:\varphi\text{-例外因子}} (a_E(K_X) - \lambda\,\mathrm{mult}_E(\mathcal{H}))E$$

と記述されるが, 任意の φ と任意の φ 例外因子 E について,

$$a_E(K_X) - \lambda\,\mathrm{mult}_E(\mathcal{H}) > 0 \text{ (または } \geq 0)$$

となるとき, 組 $(X, \lambda\mathcal{H})$ は**端末的** (または, **標準的**) であるという. また,

$$c(X, \mathcal{H}) := \max\{\lambda \mid (X, \lambda\mathcal{H}) \text{ は標準的 }\}$$

を組 $(X, \mathcal{H})$ の**標準閾値**と呼ぶ.

定義 3.2. $\mathcal{H}$ を X 上の可動線形系, $\varphi\colon Y \to X$ を因子収縮射とし, E をその例外因子とする. $\varphi\colon Y \to X$ (あるいは E) が $\mathcal{H}$ **に関する極大特異収縮**であるとは, 次の不等式

$$\frac{1}{n(X, \mathcal{H})} > c(X, \mathcal{H}) = \frac{a_E(K_X)}{\mathrm{mult}_E(\mathcal{H})}$$

が成立するときに言う. なんらかの可動線形系 $\mathcal{H}$ が存在して, φ が $\mathcal{H}$ に関する極大特異収縮になるとき, φ を単に**極大特異収縮**と呼ぶ. 極大特異収縮 $\varphi\colon Y \to X$ の X 上の中心 $\varphi(E)$ のことを, **極大特異サイクル**と呼ぶ.

極大特異収縮 (サイクル) について簡単な補足をしておく. 可動線形系 $\mathcal{H}$ の固定点で, $(X, \frac{1}{n}\mathcal{H})$, ただし $n = n(X, \mathcal{H})$, が標準的にならないほどの重複度を $\mathcal{H}$ が有しているとき, その固定点を $\mathcal{H}$ の特異点と呼ぶことにする. 上記の定義の $1/n(X, \mathcal{H}) > c(X, \mathcal{H})$ の条件がこの特異性に相当する. また, $\mathcal{H}$ の特異点のうち, $(X, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ を真に標準的で無くしているような固定点 (を中心とする因子収縮写像) を極大であると見なしているわけである. 上記の定義の $c(X, \mathcal{H}) = a_E(K_X)/\,\mathrm{mult}_E(\mathcal{H})$ がこの極大性に相当する.

定義 3.3. $\mathcal{H}_V$ を森ファイバー空間 $\pi\colon V \to S$ 上の線形系とする. $H_V \in \mathcal{H}_V$ は, 有理数 m と S 上の因子 D を用いて, $H_V \equiv -mK_V + \pi^*D$ となるが, この m のことを $n(V, \mathcal{H}_V)$ と表す.

極大特異性に関して, 次の結果が基本的である.

定理 3.4 ([2, (4.2) Theorem]). $\varphi\colon X \dashrightarrow V$ を森ファイバー空間 $\pi\colon V \to S$ への双有理写像とする. V 上の非常に豊富な因子を固定し, その完備線形系を $\mathcal{H}_V$ とする. また, $\mathcal{H} = \varphi_*^{-1}\mathcal{H}_V$, $n := n(X, \mathcal{H})$, とする. このとき, 次が成立する.

1. $n \geq n(V, \mathcal{H}_V)$ であり, 等号成立の必要十分条件は φ が同型となることである.
2. $(X, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ が標準的ならば, φ は同型である.

この定理により, X から森ファイバー空間への非同型な双有理写像が存在すれば, $(X, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ が標準的でないような可動線形系 $\mathcal{H}$ が存在する (ただし, $n = n(X, \mathcal{H})$ である). $c = c(X, \mathcal{H})$ とすると, $(X, c\mathcal{H})$ は標準的であり, 極小モデル理論の標準的な議論から, 双有理射 $\psi\colon Z \to X$ で, $(Z, c\psi_*^{-1}\mathcal{H})$ が端末的かつ

$$K_Z + c\psi_*^{-1}\mathcal{H} = \psi^*(K_X + c\mathcal{H})$$

となるものが存在する. この ψ に現れる例外因子はすべて $K_X + c\mathcal{H}$ に関して crepant, つまり, $a_E(K_X) - c\,\mathrm{mult}_E(\mathcal{H}) = 0$, である. 一般に, $Z \to X$ は単射線の収縮射とは限

らない (つまり, $\rho(Z/X)=1$ とは限らない) ので, Z から X 上の極小モデルプログラムを適切に実行することで, 因子収縮射 $Y \to X$ でその例外因子 E が $(X, c\mathcal{H})$ に関して crepant であるものが構成される. この $Y \to X$ は極大特異収縮に他ならない. これにより, 次の定理を得る.

定理 3.5 ([2, (2.10) Proposition-definition]). X から森ファイバー空間 $\pi\colon V \to S$ への非同型な双有理写像 $\varphi\colon X \dashrightarrow V$ が存在すれば, 極大特異収縮が存在する.

この定理により, X 上に極大特異収縮 (サイクル) が存在しなければ, X が双有理剛性を有することが従う. 今回の対象には極大特異サイクルが存在するため, もう少し議論が必要である.

補題 3.6 ([5, Lemma 4.2]). $\varphi\colon Y \to X$ を極大特異収縮とする. $\sigma\colon X \dashrightarrow X'$ を, φ を始点とする $\mathbb{Q}$ ファノ多様体 X' へのサルキソフリンクとする. $\mathcal{H}$ を X 上の可動線形系とし, $\mathcal{H}' = \sigma_*\mathcal{H}'$ とする. φ が $\mathcal{H}$ に関する極大特異収縮であれば,

$$n(X, \mathcal{H}) > n(X', \mathcal{H}')$$

が成立する.

以上から, X の双有理的森ファイバー構造を決定する基本原理を得る.

補題 3.7. $X = X_1, X_2, \ldots, X_m$ を $\mathbb{Q}$ ファノ多様体で互いに双有理同値であるとする. 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ と X_i 上の任意の極大特異収縮 $\varphi\colon Y \to X_i$ に対して, φ を始点とするサルキソフリンク $\sigma\colon X_i \dashrightarrow X_j$(ただし, $1 \le j \le m$ で, j は i と φ に依存して良い) が存在すれば, $X = X_1$ の双有理的森ファイバー構造は $X_1, \ldots, X_m$ である.

証明. X から森ファイバー空間 $V \to S$ への双有理写像 $\psi\colon X \dashrightarrow V$ が与えられたとする. V がいずれかの X_j と同型であることを示せば良い. $\mathcal{H}_V$ を V 上の非常に豊富な因子の完備線形系とし, $\mathcal{H}_1 = \psi_*^{-1}\mathcal{H}_V$ とする. ψ は同型でないとして良い. すると, 定理 3.4 から, $n_1 := n(X_1, \mathcal{H}_1) > n(V, \mathcal{H}_V)$ である. また, 定理 3.5 から, $\mathcal{H}$ に関する極大特異収縮 $\varphi_1\colon Y_1 \to X_1 = X$ が存在する. 仮定から, φ_1 を始点とするサルキソフリンク $\sigma_1\colon X_1 \dashrightarrow X_{j_2}$ が存在する. $\mathcal{H}_2 = \sigma_{1*}\mathcal{H}_1$ とすると, 補題 3.6 から $n_2 = n(X_{j_2}, \mathcal{H}_2) < n_1$ である. $\psi \circ \sigma_1^{-1}\colon X_2 \dashrightarrow V$ が同型であれば, 証明は完了するので, 同型でない (つまり $n_2 > n_V(X, \mathcal{H})$) とする. すると, X_{j_2} 上に $\mathcal{H}_2$ に関する極大特異収縮 $\varphi_2\colon Y_2 \to X_{j_2}$ が存在し, さらに, φ_2 を始点とするサルキソフリンク $\sigma_2\colon Y_{j_2} \dashrightarrow Y_{j_3}$ が存在する. $\mathcal{H}_3 = \sigma_{2*}\mathcal{H}_1$ とすれば $n_3 = n(X_{j_3}, \mathcal{H}_3) < n_2$ である. このようにして, ψ を分解するサルキソフリンクの列

$$X \dashrightarrow X_{j_2} \dashrightarrow X_{j_3} \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_{j_k} \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow V$$

および, 有理数の減少列 $n_1 > n_2 > n_3 > \cdots > n_k > \cdots$ が構成される. この列は, 双有理写像

$$\psi \circ \sigma_1^{-1} \circ \cdots \circ \sigma_{k-1}^{-1}\colon X_{j_k} \dashrightarrow V$$

が同型となるときに限り停止する．今，現れている $\mathbb{Q}$ ファノ多様体は有限個なので，$n_1, n_2, \ldots$ は有界な分母を持つ．従って，減少列 $n_1 > n_2 > \cdots$ は無限に続かない為，上記のプロセスは有限回のステップで停止する．これにより，V はある X_j, $1 \leq j \leq m$, と同型になる． □

4 主定理の証明

主定理の証明について説明する．主定理の証明の最重要部分は次の定理である．

定理 4.1. X を定理 1.3 の $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面とし，X'_1, X'_2 を対応する $\mathbb{Q}$ ファノ重み付き完全交叉とする．このとき，次が成立する．

(1) X, X'_1, X'_2 上の非特異点および曲線は極大特異サイクルでない．

(2) X'_1 と X'_2 が同型であるとき，X'_1 および X'_2 の $cAx/2$ 特異点は極大特異サイクルでない．

定理 2.6 および 2.7 で，X, X'_1, X'_2 の各特異点を中心とする全ての因子収縮写像を始点とするサルキソフリンクを構成している（ただし，$X'_1 \cong X'_2$ の場合の $cAx/2$ 特異点を除く）．また，それらリンクのターゲットは X, X'_1, X'_2 のいずれかである．補題 3.7 を考慮に入れれば，定理 4.1 から主定理が従うことがわかる．

定理 4.1 の完全な証明を紹介するには多くの準備と議論が必要になるため，その定理の重要な一部分である次を示す．

命題 4.2. X の非特異点は極大特異サイクルでない．

本命題の証明の核となる結果を紹介する．非特異点を極大特異サイクルから除外するための最も基本的な定理の一つで，少なくとも二通りの証明が知られている（[3, 14] 参照）．

定理 4.3 ([5, Theorem 5.3.2], [3, Section 3],[14, Appendix B])**.** (X, p) を 3 次元非特異多様体の芽とし，$\mathcal{H}$ を X 上の可動線形系とする．有理数 $n > 0$ について，$(X, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ が標準的でないと仮定する．このとき，$\mathcal{H}$ の一般メンバー H_1, H_2 のスキーム論的交叉 $H_1 \cap H_2$ について，

$$\mathrm{mult}_{\mathsf{p}}(H_1 \cap H_2) > 4n^2$$

が成立する．

命題 4.2 **の証明.** 非特異点 $\mathsf{p} \in X$ が極大特異サイクルであるとする．このとき，$(X, \frac{1}{n}\mathcal{H})$ が p で標準的でないような可動線形系 $\mathcal{H} \subset |-nK_X|$ が存在する．$H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ を一般メンバーとする．6 次超曲面のなす線形系は $\mathbb{P}(1,1,2,2,3)$ の埋め込みを定めるので，

$\mathcal{O}_X(6)$ は十分豊富である．従って，$|\mathcal{O}_X(6)|$ のメンバー S で，点 p を通り，なお且つ $H_1 \cap H_2$ の既約成分を含まないものが選べる．このとき，定理 4.3 から，不等式

$$(S \cdot H_1 \cdot H_2) > 4n^2$$

を得る．一方で，$(-K_X)^3 = 2/3$ を用いて直接交点数を計算すると，

$$(S \cdot H_1 \cdot H_2) = (-6K_X \cdot -nK_X \cdot -nK_X) = 6n^2(-K_X)^3 = 4n^2$$

が得られる．上記二つの不等式から矛盾が導かれるため，p が極大特異サイクルでないことが従う． □

定理 4.1 の完全な証明を与えるには，X 上の曲線，X_1' および X_2' 上の非特異点と曲線を極大特異サイクルから除外する必要が有る．非特異点に関しては，命題 4.2 と同様に除外可能であるが，曲線に関してはまた異なる議論が必要となる．

5 自己双有理写像群

本報告書の対象である，$\mathbb{Q}$ ファノ重み付き超曲面 X の自己双有理写像群 $\mathrm{Bir}(X)$ の記述を証明を省いて紹介する．$\sigma_i \colon X \dashrightarrow X_i'$, $\iota \colon X \dashrightarrow X$, $\theta \colon X_1' \dashrightarrow X_2'$ を定理 2.6 および 2.7 で構成されているサルキソフリンクとする．また，

$$\tau := \sigma_2^{-1} \circ \theta \circ \sigma_1 \colon X \dashrightarrow X$$

とする．明示的な解析により，$\iota \neq \tau$ であり，

$$\iota \circ \iota = \mathrm{id}, \ \ \tau \circ \tau = \mathrm{id}, \ \ \iota \circ \tau = \tau \circ \iota$$

であることが従う．X の自己双有理写像は定理 2.2 により，サルキソフリンクの合成で表される．X からのサルキソフリンクは定理 2.6, 2.7 で与えられるものでつきている為，X の自己双有理写像は ι と τ の合成で表されることが分かる．また，τ が同型写像であるための必要十分条件は X_1' と X_2' が同型であること，が示される．以上から，次のような X の自己双有理写像群の記述を得る．なお，X の自己同型群に関する記述は，X の明示性を利用して，補題 2.8 と同様の議論を行うことで得られる．

定理 5.1. X の自己双有理写像群 $\mathrm{Bir}(X)$ は ι と τ により生成され，

$$\mathrm{Bir}(X) = \langle \iota, \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となる．また，τ が同型である必要十分条件は，$X_1' \cong X_2'$ となることであり，

$$\mathrm{Aut}(X) = \begin{cases} \{\mathrm{id}\}, & X_1' \ncong X_2' \text{ のとき}, \\ \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & X_1' \cong X_2' \text{ のとき}, \end{cases}$$

である．

参考文献

[1] I. Cheltsov and J. Park, Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces, arXiv:1309.0903, 2013.

[2] Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov, J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 223–254.

[3] Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[4] A. Corti and M. Mella, Birational geometry of terminal quartic 3-folds, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 4, 739–761.

[5] A. Corti, A. V. Pukhlikov and M. Reid, Fano 3-fold hypersurfaces, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[6] T. de Fernex, Birationally rigid hypersurfaces, Invent Math. **192**, 533–566.

[7] C. D. Hacon and J. McKernan, The Sarkisov program, J. Algebraic Geom. **22** (2013), 389–405.

[8] T. Hayakawa, Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** (1999), 515–570.

[9] V. A. Iskovskikh and Yu. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, Math. USSR. Sb. **151** (1971), 141-166.

[10] M. Kawakita, Three-fold divisorial contractions tonsingularities of higher indices, Duke Math. J. **130** (2005), no. 1, 57–126.

[11] Y. Kawamata, Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities, in Higher-Dimensional Complex Varieties (Trento, Italy, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 241–246.

[12] T. Okada, Birational Mori fiber structures of $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold weighted complete intersections, arXiv:1310.5315.

[13] T. Okada, Birational Mori fiber structures of $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold weighted complete intersections, II, arXiv:1310.5320.

[14] A. V. Pukhlikov, Birational automorphisms of Fano hypersurfaces, Invent. Math. **134** (1998), 401–426.

[15] M. Reid, Graded rings and birational geometry, in Proc. of algebraic symposium (Kinosaki, 2000), K. Ohno (Ed.), 1–72.