RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B30 (2012), 101–117

離散 mKdV 方程式の 2 重 Casorati 行列式解と特異曲線
Double Casorati determinants, discrete mKdV equation and singular curves

By

岩尾慎介
Shinsuke Iwao *

Abstract

本稿では，無限系離散 mKdV 方程式の初期値問題を扱う．離散 mKdV 方程式の Lax 形式から特異スペクトル曲線を定義し，特異曲線上のテータ関数理論を用いることで，離散 mKdV 方程式の 2 重 Casorati 行列式解を導出する．

In this paper, the solution of the initial value problem of the discrete mKdV equation is given by means of the double Casrati determinant, which is a singular analog of the theta function on smooth complex curves.

§1. はじめに

古くから可積分方程式の研究は，代数曲線の理論と密接な関係にある．例えば，周期境界条件を課された KdV 方程式の運動が Jacobi 多様体上の線形な運動に変換されることはよく知られており，その性質を利用して KdV 方程式の準周期解の明示公式を得ることができる [2, 11].

可積分系の離散類似である離散可積分方程式においても，やはり代数曲線の理論は有効である．周期境界条件を課した種々の可積分方程式の準周期解も，代数曲線論から構成できることが知られている [5].

Received November 24, 2011.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 35C08, 37C15
Key Words: 離散 mKdV 方程式，逆散乱法，特異曲線，2 重 Casorati 行列式
本研究は，科研費 (21-1939) の補助を受けている
*（現所属）青山学院大学理工学部　〒 252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1
(Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University, 5-10-1 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagamihara-shi, Kanagawa 252-5258 Japan)
e-mail: `iwao@gem.aoyama.ac.jp`

代数曲線が退化し特異曲線になった場合についての研究もいくつか知られており，単純特異点のみを持つ曲線から KdV 方程式の行列式解を得る方法 ([10],§5)，$y^2 = x^{2g+1}$ の型の特異点を 1 つだけ持つ曲線から Mumford 系の行列式解を得る方法 [4] などがある．また逆に，各既約成分が有理的であるような被約曲線から Jacobi 多様体上の Flow を構成し，対応する可積分方程式を作る試みもなされている [1].

一方で離散可積分系の行列式解については，ソリトン方程式と Plüker 関係式のつながり [13] が見出された 1980 年代から現在に至るまで, 活発な研究がなされている．Casorati 行列式の恒等式から導かれるものとしては，離散 KP 方程式の Casorati 行列式解 [8] と 2 重 Casorati 行列式解 [14], 相対論的戸田方程式の Casorati 行列式解 [12], 離散 Painléve 方程式の解 [6, 7], $1+1$ 次元非自励離散ソリトン方程式の Casorati 行列式解 [9], などが知られている．いずれの方法も，広田の双線形形式と行列式の恒等式をよりどころにして解を構成するという筋道を取るのが普通であり，背後にある特異曲線の代数幾何的構造について言及されることは少ないと思われる．

本稿では，以下で定義される離散 mKdV 方程式 [3] に対して特異曲線の理論を適用し，初期値問題の解を導出する:

$$f_n^{t+1}g_{n+1}^t + \delta f_{n+1}^{t+1}g_n^t = (1+\delta)f_n^t g_{n+1}^{t+1}, \quad g_n^{t+1}f_{n+1}^t + \delta g_{n+1}^{t+1}f_n^t = (1+\delta)g_n^t f_{n+1}^{t+1}, \tag{1.1}$$

(ただし δ は定パラメータ)．代数曲線の理論を用いる利点は, (ある程度の条件を満たす) 任意の初期値から解が構成できるという点である．実際，我々の手法は以下の筋道をたどる:

(1) 離散 mKdV 方程式の初期値から特異スペクトル曲線を構成する，

(2) スペクトル曲線のテータ関数を用いて離散 mKdV 方程式の解を記述する．

特異曲線のテータ関数は, 一般に行列式を用いて定義される (§Appendix A). 特に, 可約曲線 $\mathbb{P}^1 \cup \mathbb{P}^1$ に対応するテータ関数は 2 重 Casorati 行列式になる．離散 mKdV 方程式の解が，2 重 Casorati 行列式を用いて書けることを示すことが本稿の目的である．

§ 1.1. 離散 mKdV 方程式

まずは離散 mKdV 方程式の行列表示について復習しておこう．離散 mKdV 方程式 (1.1) は，変数変換

$$P_n^t = (1+\delta)\frac{f_n^t g_n^{t+1}}{g_n^t f_n^{t+1}}, \quad Q_n^t = (1+\delta)\frac{g_n^t f_n^{t+1}}{f_n^t g_n^{t+1}}$$
$$V_n^t = \delta\,\frac{f_n^t g_{n-1}^t}{g_n^t f_{n-1}^t}, \quad W_n^t = \delta\,\frac{g_n^t f_{n-1}^t}{f_n^t g_{n-1}^t}$$

により以下の方程式系に変形される:

$$P_{n-1}^t + W_n^t = V_n^{t+1} + Q_n^t, \quad Q_{n-1}^t + V_n^t = W_n^{t+1} + P_n^t,$$
$$P_{n-1}^t V_n^t = V_n^{t+1} P_n^t, \quad Q_{n-1}^t W_n^t = W_n^{t+1} Q_n^t.$$

文字 y に対して $\mathbb{C}[y]$ を複素数体上の y に関する多項式環とする．$\mathbb{C}[y]$ 上の 2×2 行列 v_n^t, w_n^t を $v_n^t := \begin{pmatrix} P_n^t & 1 \\ y & Q_n^t \end{pmatrix}$, $w_n^t := \begin{pmatrix} V_n^t & 1 \\ y & W_n^t \end{pmatrix}$ とすると，

$$v_{n-1}^t w_n^t = w_n^{t+1} v_n^t \tag{1.2}$$

が成り立つ．

以降では，行列方程式 (1.2) をもって離散 mKdV 方程式の定義としたい．そのためには，もう少し厳密な設定が必要である．

Definition 1.1. 以下の形の 2 次行列のことを，(A_1 型の)M-行列という:

$$\begin{pmatrix} a,\ 1 \\ y,\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}[y]), \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

$\mathcal{B}$ を M-行列全体のなす複素 2 次元ベクトル空間とする ($\mathcal{B} \simeq \mathbb{C}^2$)．また，$L \in \mathbb{C}$ に対して，$ab = L$ を満たす M-行列全体の集合を $\mathcal{B}_L$ と書く．$\mathcal{B}_L$ には $\mathcal{B}$ の部分位相を入れておく．

ここで，相異なる $L, L' \in \mathbb{C}^\times$ に対して $v \in \mathcal{B}_L$, $w \in \mathcal{B}_{L'}$ としよう．generic[1]な v, w に対して，$vw = w^+ v^+$ を満たす $v^+ \in \mathcal{B}_L$, $w^+ \in \mathcal{B}_{L'}$ が一意的に存在することが，直接計算により確かめられる．この対応により，双有理変換

$$\mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_{L'} \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathcal{B}_{L'} \times \mathcal{B}_L \ , \quad (v, w) \mapsto (w^+, v^+) \tag{1.3}$$

が定義される．

この写像を一般化しよう．N を自然数とする．$\mathcal{B}_L$ の元 v_0 と，$(\mathcal{B}_{L'})^N := \mathcal{B}_{L'} \times \mathcal{B}_{L'} \times \cdots \times \mathcal{B}_{L'}$ (N 個の直積) の元 $(w_1, w_2, \ldots, w_N)$ を generic に取れば，

$$v_0 w_1 = w_1^+ v_1,\ v_1 w_2 = w_2^+ v_2,\ v_2 w_3 = w_3^+ v_3,\ \ldots,\ v_{N-1} w_N = w_N^+ v_N \tag{1.4}$$

なる $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathcal{B}_L$, $(u_1, u_2, \ldots, u_N) \in \mathcal{B}_{L'} \times (\mathcal{B}_{L'})^N$ が一意的に存在する．言いかえれば，双有理変換

$$\mathrm{MK}: \quad \mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^N \overset{\sim}{\dashrightarrow} (\mathcal{B}_{L'})^N \times \mathcal{B}_L; \tag{1.5}$$

$$(v_0; w_1, w_2, \ldots, w_N) \mapsto (w_1^+, w_2^+, \ldots, w_N^+; v_N)$$

が存在する．このように定まる変換 MK のことを，長さ N の離散 mKdV 格子という．

Example 1.2. $L = 2$, $L' = 6$, $v_0 = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ y, 2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3, 1 \\ y, 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2, 1 \\ y, 3 \end{pmatrix}$ に対して，$w_1^+ = \begin{pmatrix} 9/5, & 1 \\ y & , 10/3 \end{pmatrix}$, $w_2^+ = \begin{pmatrix} 35/12, & 1 \\ y & , 72/35 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 8/7, & 1 \\ y & , 7/4 \end{pmatrix}$ が成り立つ．等式 $v_0 w_1 w_2 = w_1^+ w_2^+ v_2$ は確かに成立する．

[1]位相空間 X の稠密開集合 U が存在して，U の任意の元が性質 (P) を満たすとき，generic な X の元は性質 (P) を満たす，という．

§1.2. もう一つの定義

離散 mKdV 方程式のもう一つの定義を紹介しておこう．有限個の複素数の組 $\ell = (L_1, \dots, L_N)$ に対して，掛け算写像

$$m_\ell : \mathcal{B}_{L_1} \times \mathcal{B}_{L_2} \times \cdots \times \mathcal{B}_{L_N} \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}[y]); \quad (v_1, v_2, \dots, v_N) \mapsto v_1 v_2 \cdots v_N$$

は "generic に" 単射（正確な定義は次章）である．例えば，例 1.2 の行列 v_0, w_1, w_2 に対して行列 $v_0 w_1 w_2 = \begin{pmatrix} 6+5y\ , 12+y \\ 14y+y^2, 12+8y \end{pmatrix}$ を考える．別の行列 $v_0' \in \mathcal{B}_2, w_1', w_2' \in \mathcal{B}_6$ が $v_0 w_1 w_2 = v_0' w_1' w_2'$ を満たすと仮定しよう．$v_0 \in \mathcal{B}_2$ より，$v_0 w_1 w_2|_{y=2}$ は正則行列では無い．実際，$v_0 w_1 w_2|_{y=2} = \begin{pmatrix} 16, 14 \\ 32, 28 \end{pmatrix}$ は正則では無く，この行列の各行ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は非自明な関係式 $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = 0$ を満たす．行列の掛け算の定義から，行列 $v_0|_{y=2}, v_0'|_{y=2}$ の行ベクトルも，同じ関係式を満たさねばならないので，結局自動的に $v_0 = v_0' = \begin{pmatrix} 1, 1 \\ y, 2 \end{pmatrix}$ を得る．同様の操作を繰り返せば，$w_1 = w_1'$, $w_2 = w_2'$ も得る．

いま，2 つの複素数の組 $\ell = (L, \overbrace{L', L', \dots, L'}^{N})$, $\ell' = (\overbrace{L', L', \dots, L'}^{N}, L)$ に対して，図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}[y]) & \\ \mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^N \arrow[ur, "m_\ell"] \arrow[rr, dashed, "\mathrm{MK}", "\sim"'] & & (\mathcal{B}_{L'})^N \times \mathcal{B}_L \arrow[ul, "m_{\ell'}"'] \end{tikzcd}$$

を考える．有理変換 MK の定義により，この図式は可換となる．$m_\ell, m_{\ell'}$ が generic に単射であることから，適当な部分集合 $\mathcal{L} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}[y])$ と単射 ϕ, ϕ' が存在して，可換図式

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi'"] & \\ \mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^N \arrow[rr, dashed, "\mathrm{MK}", "\sim"'] & & (\mathcal{B}_{L'})^N \times \mathcal{B}_L \end{tikzcd} \qquad m_\ell \circ \phi = m_{\ell'} \circ \phi' = \mathrm{id.}|_{\mathcal{L}}$$

が成り立つ．この可換図式により，単射の組 (ϕ, ϕ') は離散 mKdV 方程式 MK と等価である．このような可換図式をもって離散 mKdV 方程式の定義とする方が，便利なことがある．以降において，無限の長さを持つ離散 mKdV 方程式を可換図式として定義する．

本稿の構成は以下のとおりである: 第 2 章では，無限の長さの mKdV 方程式の行列方程式表示を定義する．一般には，無限の長さの mKdV 方程式を表現するためには無限個の行列を用意する必要があるが，特別な初期値を扱う場合には，有限個の行列を組み合わせることで十分な場合がある．本稿では特に，遠方で定値な離散 mKdV 方程式 (§2.2) を扱う．第 3 章では，遠方で定値な離散 mKdV 方程式に対して，代数曲線を用いた逆散乱解法 [10, 11] を適用し，2 重 Casorati 行列式解を導出する．

§Appendix A において，可約曲線に対するテータ関数理論を紹介する．本文に登場する $\mathrm{Div}\,C$，$\mathrm{Pic}\,C$, $(f)_\infty$ などの記号の定義は，必要に応じて補遺を参照されたい．

§ 2. 無限離散 mKdV 格子の定式化

この章では，無限の長さを持つ離散 mKdV 格子を行列方程式で定義する．

§ 2.1. 一般的な定義

$\mathbb{C}$ の座標を y とし，B を有限被覆 $\varphi : B \to \mathbb{C}$ を持つ滑らかなアフィン曲線とする．$\mathbb{C}$ 上の $y = L$ と表現される点を簡単に L と書こう．$K(B)$ を，B 上複素数値有理関数のなす体とし，$V := K(B) \oplus K(B)$ と置こう．V に以下の方法で位相を入れる．V の元 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ (ζ_1, ζ_2 は B 上 $\mathbb{C}$ 値有理関数) に対して，グラフ Γ_ζ を

$$\Gamma_\zeta := \{(P,\ \zeta_1(P),\ \zeta_2(P),\ \frac{\zeta_2(P)}{\zeta_1(P)}) \in B \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}\}$$

で定める．また，B のコンパクト部分集合 K に対して部分グラフ $\Gamma_\zeta(K) \subset \Gamma_\zeta$ を

$$\Gamma_\zeta(K) := \{(P,\ \zeta_1(P),\ \zeta_2(P),\ \frac{\zeta_2(P)}{\zeta_1(P)}) \in K \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \,|\, P \in K\}$$

で定める．$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の開集合 U に対して，

$$W(K, U) := \{\zeta \in V \mid \Gamma_\zeta(K) \subset K \times U\}$$

と置こう．ここで V に，

$$W(K, U), \qquad K \subset B \text{ (コンパクト)},\ \ U \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ (開)}$$

を開基とする位相を入れる．これは，よく知られる連続関数の集合のコンパクト開位相を少し変形したものである．この位相により V はハウスドルフ空間になる．

固定された $L \in \mathbb{C}^\times$ に対し，写像 $\Phi : \mathcal{B}_L \times V \to V$ を $(v, \zeta) \mapsto v\zeta$ なる行列の積で定義する．本節の目的は，次の主張を示すことである:

稠密な開集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_L \times V$ が存在し，写像 $\Phi : \mathcal{U} \to V$ は単射である．

$\varphi(x^*) = L$ なる点 $x^* \in B$ をひとつ固定しておく．B の，点 x^* の周りの局所座標を t と置き，$t(x^*) = 0$ とする．引き戻し $y \circ \varphi : B \to \mathbb{C}$ によって，y は B 上の複素関数とみなすこともできる．x^* の取り方から，y は x^* の周りで $y(t) = L + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots$ と書ける．さて，$v \in \mathcal{B}_L, \zeta \in V$ の点 x^* の周りの展開を

$$v(t) = \begin{pmatrix} a & , 1 \\ L + \alpha_1 t + \cdots, & b \end{pmatrix}, \quad \zeta(t) = t^m \begin{pmatrix} r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots \\ s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + \cdots \end{pmatrix}$$

($r_0 \neq 0$ または $s_0 \neq 0$) とする．この展開から

$$v(t)\zeta(t) = t^m \begin{pmatrix} (ar_0 + s_0) + (ar_1 + s_1)t + \cdots \\ b(ar_0 + s_0) + \{b(ar_1 + s_1) + \alpha_1 r_0\}t + \cdots \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

を得る．この表示を利用して，$\mathcal{B}_L \times V$ の開集合 $\mathcal{U}(x^*)$ を

$$\mathcal{U}(x^*) := \{(v, \zeta) \,|\, x^* \text{ の周りで } ar_0 + s_0 \neq 0\}$$

で定義する．$\mathcal{U}(x^*)$ は稠密集合である．

Proposition 2.1. *(i)* $\Phi : \mathcal{U}(x^*) \to V$ は単射である．*(ii)* 像 $\Phi(\mathcal{U}(x^*))$ は

$$\Phi(\mathcal{U}(x^*)) = \{\zeta = {}^t(\zeta_1, \zeta_2) \,|\, \lim_{p \to x^*} \frac{\zeta_2(p)}{\zeta_1(p)} \neq 0\}$$

を満たす.

Proof. (i) $f = v\zeta = {}^t(f_1, f_2)$ と置く．式 (2.1) より，$b = \lim_{p \to x^*} \frac{f_2(p)}{f_1(p)} \neq 0$ が成立する．$a := L/b$ と定め，この a, b を用いて $v \in \mathcal{B}_L$ が復元できる．$\zeta := v^{-1}f$ で ζ も復元する．(ii) は，式 (2.1) および (i) より明らかである． □

Corollary 2.2. 単射 $\Phi : \mathcal{U}(x^*) \to V$ は連続写像である．

Proof. 単射性より，逆対応が連続であることを示せば十分である．命題の証明より，$f = v\zeta$ に対して，v, ζ の各成分は $f_1, f_2, \lim \frac{f_2}{f_1}$ の連続関数で表現される．したがって Φ の逆対応は連続である． □

像 $\Phi(\mathcal{U}(x^*))$ を $V(x^*) \subset V$ と書く．上の命題より $V(x^*)$ は V の稠密開集合である．Φ の単射性より，連続な逆写像 $\phi : V(x^*) \to \mathcal{B}_L \times V$, $(\Phi \circ \phi = \mathrm{id.})$ が存在する．(ϕ は V 全体に連続に拡張できるとは限らない．) もちろん ϕ は単射である．

複素数の組 $\ell = (L_1, \ldots, L_N)$ に対して，$\varphi(x_i^*) = L_i$ なる $x_i^* \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を固定する．上に述べたことにより，N 個の単射 $\phi_i : V(x_i^*) \to \mathcal{B}_{L_i} \times V$ が存在する．等式

$$V(x_k^*, \ldots, x_N^*) := \phi_k^{-1}(\mathcal{B}_{L_k} \times V(x_{k+1}^*, \ldots, x_N^*))$$

$(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ を用いて帰納的に稠密開集合 $V(x_k^*, \ldots, x_N^*) \subset V$ を定義すると，単射の列

$$V(x_1^*, \ldots, x_N^*) \to \mathcal{B}_{L_1} \times V(x_2^*, \ldots, x_N^*) \to \cdots \to \mathcal{B}_{L_1} \times \cdots \mathcal{B}_{L_N} \times V \quad \subset V$$

を得る．この合成を ϕ_ℓ と書くことにする．

ここで相異なる $L, L' \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\ell = (L, \overbrace{L', \dots, L'}^{N})$, $\ell' = (\overbrace{L', \dots, L'}^{N}, L)$ とする．$\varphi(x^*) = L$, $\varphi(y^*) = L'$ なる $x^*, y^* \in B$ を固定し，

$$V_N := V(x^*, y^*, \dots, y^*), \quad V'_N := V(y^*, \dots, y^*, x^*)$$

とおこう．積集合 $V(N) := V_N \cap V'_N$ も V の稠密開集合である．上で構成された 2 つの単射

$$\begin{aligned} \phi(N) := \phi_\ell \quad &: V(N) \ \to \ \mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^N \times V \\ \phi'(N) := \phi_{\ell'} \quad &: V(N) \ \to \ (\mathcal{B}_{L'})^N \times \mathcal{B}_L \times V \end{aligned}$$

を考える．以下の図式は可換である (§1.2 参照):

(2.2)
$$\begin{tikzcd} & V(N) \arrow[dl, "\phi(N)"'] \arrow[dr, "\phi'(N)"] & \\ \mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^N \times V \arrow[rr, dashed, "\mathrm{MK}\times\mathrm{id}_V", "\sim"'] & & (\mathcal{B}_{L'})^N \times \mathcal{B}_L \times V \end{tikzcd}$$

さて，N を無限大にした場合のことを考えよう．定義により $V(N) \supset V(N+1)$ が成立する．集合 $\bigcap_N V(N)$ が空で無いことを仮定し，この集合を V_∞ と書くことにしよう．

直和集合 $\bigsqcup_N \{\mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^N \times V\}$ に同値関係

$$x \sim y \iff \text{ある自然数 } N_1, N_2 \text{ と } z \in V_\infty \text{ が存在して } x = \phi(N_1)(z),\, y = \phi(N_2)(z)$$

を入れたものを $\mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^\infty \times V$ と書こう．また，直和集合 $\bigsqcup_N \{(\mathcal{B}_{L'})^N \times \mathcal{B}_L \times V\}$ に同様の同値関係を入れたものを $(\mathcal{B}_{L'})^\infty \times \mathcal{B}_L \times V$ と書くことにする．三角図式 (2.2) の $N \to +\infty$ における極限として，以下の可換図式を得る:

(2.3)
$$\begin{tikzcd} & V_\infty \arrow[dl, "\phi_\infty"'] \arrow[dr, "\phi'_\infty"] & \\ \mathcal{B}_L \times (\mathcal{B}_{L'})^\infty \times V \arrow[rr, dashed, "\mathrm{MK}\times\mathrm{id}_V", "\sim"'] & & (\mathcal{B}_{L'})^\infty \times \mathcal{B}_L \times V \end{tikzcd}$$

この図式の底辺に表れている変換 MK のことを，離散 mKdV 格子ということにする．

§ 2.2. 遠方で定数となる離散 mKdV

前節で定義した離散 mKdV 格子のうち，もっとも簡単なクラスを考えよう．この場合，B は $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[y]$ の 2 重被覆となる．

$\mathcal{B}_{L'}$ の元 $h = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ y & b_0 \end{pmatrix}$ $(a_0b_0 = L')$ をひとつ固定し，h の特性方程式を $F(\lambda, y) := \lambda^2 - (a_0+b_0)\lambda + (L'-y) = (\lambda - a_0)(\lambda - b_0) - y$ とする．複素曲線 B を $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\lambda, y]/(F)$ の複素化とすると，写像 $y : B \to \mathbb{C}$ は滑らかな 2 重被覆である．B 上の点 x^* を $\lambda = a_0 + b_0$ で定まる唯一の点とする．$\varphi(x^*) = L'$ は明らかである．

V の元 $\zeta = {}^t(1, \lambda - a_0)$ を考える．ζ は等式 $h\zeta = \lambda\zeta$ をみたす．前節の議論により，generic に取った $v \in \mathcal{B}_L$ と $(w_1, \ldots, w_N) \in (\mathcal{B}_{L'})^N$ に対して

$$vw_1 \cdots w_N\zeta \in V(N)$$

が成り立つ．

定義により $\phi(N)(vw_1 \cdots w_N\zeta) = (v, w_1, \ldots, w_N, \zeta)$ であるが，等式 $h\zeta = \lambda\zeta$ を用いれば，任意の自然数 k に対して

$$\phi(N+k)(vw_1 \cdots w_N\zeta) = (v, w_1, \ldots, w_N, \overbrace{h, \ldots, h}^{k}, \zeta/\lambda^k),$$

が成立する．したがって，

$$\phi_\infty(vw_1 \ldots, w_N\zeta) = (v, w_1, \ldots, w_N, h, h, h, \ldots) \tag{2.4}$$

なる等式を得る．特に $vw_1 \ldots, w_N\zeta \in V_\infty$ である．等式 (2.4) は，ベクトル $vw_1 \cdots w_N\zeta$ は行列の無限積 “$vw_1 \cdots w_N hh \cdots$” と等価であることを意味する．このような元 $vw_1 \cdots w_N\zeta$ を，遠方で定値であるという．

遠方で定値となる系では，$\mathcal{B}_L$ の元が，h と無限回交換することを想定している．したがって，固定された $v_0 \in \mathcal{B}_L$ に対して等式 $v_n h = h' v_{n+1}$ $(h \in \mathcal{B}_{L'})$ で次々 $v_n \in \mathcal{B}_L$ を定義したとき $(n = 1, 2, \ldots)$ に，極限 $\lim_{n\to\infty} v_n$ がどのようになるかに興味がある．

Lemma 2.3. 2 次方程式 $z^2 - (a_0+b_0)z + L' - L = 0$ の 2 根の絶対値が異なると仮定し，z^* を絶対値の大きい方の根とする．$\alpha^* = z^* - b_0$, $\beta^* = z^* - a_0$ とおくとき，極限 $v^* := \lim_{n\to\infty} v_n$ が存在し，$v^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & 1 \\ y & \beta^* \end{pmatrix}$ が成立する．

Proof. v_n の $(1,1)$-成分を α_n，$(2,2)$-成分を β_n と置くと，$v_n h = h' v_{n+1}$ より $\alpha_{n+1} = \alpha_n \frac{\beta_n + a_0}{\alpha_n + b_0}$ を得る．$\alpha_n\beta_n = L$ より，$\alpha_{n+1} = (a_0\alpha_n + L)/(\alpha_n + b_0)$ となるが，一次分数変換の一般論より等式 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha^*$ が証明される． □

ここで，V の元 ξ を ${}^t\xi = (\lambda - b_0, 1)$ で定める．ξ は ${}^t\xi h = \lambda {}^t\xi$ を満たし，2×2 行列 $\rho := \zeta {}^t\xi$ は $h\rho = \rho h = \lambda\rho$ を満たす．また，lemma 2.3 の v^* に対して $v^*\rho = \rho v^* = (\lambda + z^* - a_0 - b_0)\rho$ が成立する．こうして定めた ρ に対して $\mathcal{K} := K(B) \cdot \rho = \{f \cdot \rho \mid f \in K(B)\}$ としよう．

Proposition 2.4. $v^* \in \mathcal{B}_L$ を *lemma* 2.3 で定めた 2×2 行列としよう．*Generic* な $(w_1,\cdots,w_N) \in (\mathcal{B}_{L'})^N$ と $\kappa \in \mathcal{K}$ に対して，

$$v^*(w_1\cdots w_N\kappa) = (w_1^+\cdots w_N^+\kappa')v^*$$

を満たす $w_1^+,\ldots,w_n^+ \in \mathcal{B}_{L'}$, $\kappa' \in \mathcal{K}$ が存在する．

Proof. 双有理変換 MK (1.5) を用いると，generic な $(w_1,\ldots,w_N)$ に対してある $v' \in \mathcal{B}_L$ が存在して，$v^*(w_1\cdots w_N\kappa) = (w_1^+\cdots w_N^+)v'\cdot\kappa$，$((w_1^+,\ldots,w_N^+) \in (\mathcal{B}_L)^N)$ が成立する．$\kappa' := (\lambda + z^* - a_0 - b_0)^{-1}\cdot v'\kappa$ と置くことにすれば，$v'\kappa = \kappa' v^*$ が成立し，等式 $v^*(w_1\cdots w_n\kappa) = (u_1\cdots u_n\kappa')v^*$ を導く． □

上の命題で定まる双有理変換

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{MK_c}:\quad (\mathcal{B}_{L'})^\infty\times\mathcal{K} &\overset{\sim}{\dashrightarrow} (\mathcal{B}_{L'})^\infty\times\mathcal{K} \\ (w_1,\ldots,w_N;\kappa) &\mapsto (w_1^+,\ldots,w_N^+;\kappa'), \end{aligned}$$

を，遠方で定値の離散 mKdV 格子と言うことにする．

§ 3. 遠方で定値の離散 KdV 方程式の解法

遠方で定値の離散 mKdV 方程式の解は，代数幾何学的方法で解を構成することが可能である．この章では，初期状態 $(w_1^0,\ldots,w_N^0;\rho) \in (\mathcal{B}_{L'})^\infty\times\mathcal{K}$ をひとつ固定し，初期条件に MK_c を $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 回施して得られる状態を

$$(w_1^t,\ldots,w_N^t;\kappa^t) := \{\mathrm{MK}_c\}^t(w_1^0,\ldots,w_N^0;\rho)$$

と書くことにする．前章で述べたとおり，行列 $w_1\cdots w_N\rho$ は，無限行列 “$w_1\cdots w_N hhh\cdots$” の代わりであると思っている．

Remark. $(w_1^t,\ldots,w_N^t;\kappa^t)$ は $(\mathcal{B}_{L'})^\infty\times\mathcal{K}$ の中の同値類としての表現であるので，

$$(w_1^t,\ldots,w_N^t;\kappa^t) \sim (w_1^t,\ldots,w_{N+1}^t;\kappa^t/\lambda) \sim \cdots \sim (w_1^t,\ldots,w_N^t,w_{N+1}^t,\ldots)$$

によって w_n^t $(n > N)$ に関しても一意的に定義される．

§ 3.1. 特異スペクトル曲線

2×2 行列 $X^t(\lambda)$ を

$$X^t(\lambda) = w_1^t\cdots w_N^t\kappa^t$$

で定めることにする．MK_c の定義により，$v^*X^t(\lambda) = X^{t+1}(\lambda)v^*$ が成立するため，$X^t(\lambda)$ の固有多項式 $f(\lambda,\mu) := \det(X^t(\lambda) - \mu\cdot\mathrm{id.})$ は t に依らない．アフィン曲線 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\lambda,\mu]/(f)$

を複素化した物を C° と書き，その完備化を C と書く．この C のことを，スペクトル曲線と呼ぶ．

$\det X^t(\lambda)=0$ であることは定義から明らかであるので，f は $f(\lambda,\mu)=\mu\cdot(\mu-g(\lambda))$ と因数分解される．($g(\lambda)$ は λ の多項式.) したがって C は 2 つの既約成分 C_1 と C_2 に分解される．ただし

$$C_1:=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\lambda,\mu]/(\mu)\simeq\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\lambda],\quad C_2:=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\lambda,\mu]/(\mu-g(\lambda))\simeq\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\lambda].$$

$g(\lambda)$ の次数を $g+1$ としよう．C_1 と C_2 の重複度をこめた交点を $Q_0,Q_1,\dots,Q_g$ とし，その λ 座標を $b_j:=\lambda(Q_j)$ $(j=0,1,\dots,g)$ とする．

さて，C の定義より，方程式

$$X^t(\lambda)\boldsymbol{v}^t(\lambda,\mu)=\mu\cdot\boldsymbol{v}^t(\lambda,\mu) \tag{3.1}$$

を満たす C 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{v}^t$ を考えることができる．$\boldsymbol{v}^t$ は定関数倍を除いて一意的に定まる．

同様に，補助的な行列

$$X_n^t(\lambda)=w_{n+1}^t\cdots w_N^t\cdot\kappa^t\cdot w_1^t\cdots w_n^t$$

に関しても方程式

$$X_n^t(\lambda)\boldsymbol{v}_n^t(\lambda,\mu)=\mu\cdot\boldsymbol{v}_n^t(\lambda,\mu) \tag{3.2}$$

を考える．任意の n に対して $X_n^t(\lambda)$ たちは同値であるから，各 $\boldsymbol{v}_n^t(\lambda,\mu)$ も同じ曲線 C 上のベクトル値関数とみなすことができる．

Remark. $n>N$ なる n に関しても $X_n^t(\lambda)$ は一意的に定義できる．実際, $n=N+k$ の時,

$$X_n^t(\lambda)=(\kappa^t/\lambda^k)\cdot w_1^t\cdots w_N^t w_{N+1}^t\cdots w_n^t$$

である．

§3.2. 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_n^t$ の挙動

先に進む前に，ベクトル値関数 $\boldsymbol{v}_n^t(p)$ $(p\in C)$ の挙動を調べておこう．まずは $n=t=0$ の場合について調べる．

$\boldsymbol{v}_0^0$ は等式 $X^0(\lambda)\boldsymbol{v}_0^0=w_1^0\cdots w_N^0\rho\cdot\boldsymbol{v}_0^0=\mu\,\boldsymbol{v}_0^0$ を満たすが，今 $\rho=\zeta^t\xi$ は 2 つのベクトルの積に分解することから，$\boldsymbol{v}_0^0$ を各連結成分 C_1,C_2 毎に表示するのは容易である．実際,

$$\boldsymbol{v}_0^0(p)=\begin{pmatrix}1\\ b_0-\lambda\end{pmatrix}\ \text{on } C_1,\qquad \boldsymbol{v}_0^0(p)=w_1^0\cdots w_N^0\begin{pmatrix}1\\ \lambda-a_0\end{pmatrix}\ \text{on } C_2$$

が成立する．特に，$\boldsymbol{v}_0^0(p)$ on C_2 の各成分を λ の多項式で記述すると (第 1 成分)=(次数 N の多項式), (第 2 成分)$=(\lambda-a_0)\times$(次数 N の多項式) が成り立つ．ここで $g(\lambda)$ を §3.1 で用いた λ の多項式とすると，$g+1=(g(\lambda)$ の次数$)=N+1$ を得る．よって $g=N$.

次に n,t を動かそう．以下は方程式 $v^*X_0^t(\lambda,\mu)=X_0^{t+1}(\lambda,\mu)v^*$, $(w_n^t)^{-1}X_n^t(\lambda,\mu)=X_{n+1}^t(\lambda,\mu)(w_n^t)^{-1}$ から明らかである:

Lemma 3.1. $\boldsymbol{v}_0^{t+1}(\lambda,\mu)=v^*\boldsymbol{v}_0^t(\lambda,\mu)$, $\boldsymbol{v}_{n+1}^t(\lambda,\mu)=(w_n^t)^{-1}\boldsymbol{v}_n^t(\lambda,\mu)$.

$\boldsymbol{v}_n^t(\lambda,\mu)={}^t(k_n^t,h_n^t)$ と置こう．C_1 上で $\lambda=b_0$ と書かれる点を S_1，C_2 上で $\lambda=a_0$ と書かれる点を S_2 とする．補題 3.1 を用いた具体計算により，ある次数 g の正因子 D_n^t と E_n^t が存在して

$$(h_n^t/k_n^t)=E_n^t+S_1+S_2-D_n^t-\infty_1-\infty_2,\qquad t\in\mathbb{Z},\ n=0,1,\dots, \tag{3.3}$$

が成り立つことがわかる．この因子 D_n^t, E_n^t の動きを追跡するのが，代数幾何学的解法の基本となる [11].

§ 3.3. 線形化定理

次の 2 つの補題は，n,t の変化による因子 D_n^t の動きを具体的に記述するものである．

Lemma 3.2. C_1 上で $\lambda=z^*$ とあらわされる点を P_1，C_2 上で $\lambda=-z^*+a_0+b_0$ とあらわされる点を P_2 とおく．この時，$[D_0^{t+1}]=[D_0^t+\infty_1+\infty_2-P_1-P_2]$ が成り立つ.

Lemma 3.3. C_1 上で $\lambda=0$ とあらわされる点を R_1，C_2 上で $\lambda=a_0+b_0$ とあらわされる点を R_2 とおく．この時，$[D_{n+1}^t]=[D_n^t-\infty_1-\infty_2+R_1+R_2]$ が成り立つ.

Proof. 証明は全く同じなので，補題 3.2 のみ示す．C 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{v}_n^t=(k_n^t,h_n^t)$ に対して，因子類 $[\boldsymbol{v}_n^t]\in\operatorname{Pic}C$ を

$$[\boldsymbol{v}_n^t]:=-\sum_{p\in C}\min[\operatorname{ord}_p(k_n^t),\operatorname{ord}_p(h_n^t)]\cdot p$$

で定める．$[\boldsymbol{v}_n^t]$ は k_n^t と h_n^t を一斉に有理関数倍しても不変である．特に $[(k_n^t/h_n^t)_\infty]=[\boldsymbol{v}_n^t]$ が成り立つ．したがって，差分 $[\mathcal{D}_0^{t+1}]-[\mathcal{D}_0^t]=[\boldsymbol{v}_0^{t+1}]-[\boldsymbol{v}_0^t]$ を計算するためには，各点 $p\in C$ に対して差分

$$\Delta(p):=\min[\operatorname{ord}_p(k_0^{t+1}),\operatorname{ord}_p(h_0^{t+1})]-\min[\operatorname{ord}_p(k_0^t),\operatorname{ord}_p(h_0^t)]$$

を計算すればよい．補題 3.1 より，$\Delta(p)\neq 0$ なる点は $\det v^*=0$ or ∞ なる点に限る．これを解くと $\lambda=z^*,-z^*+a_0+b_0,\infty$ を得るので，あとはこれらの点の周りで $\Delta(p)$ を計算すればよい．例えば P_1 の周りでは $\boldsymbol{v}_0^t={}^t(1,b_0-\lambda)$ と書けるので，直接計算より $v^*\boldsymbol{v}_0^t=(\lambda-z^*)\boldsymbol{v}_0^t$ を得る．よって $\Delta(P_1)=1$． 他の点でも同様の計算をすればよい． □

Corollary 3.4. (i) 因子類 $\mathfrak{t},\mathfrak{n}\in\operatorname{Pic}C$ を $\mathfrak{t}:=[\infty_1+\infty_2-P_1-P_2]$, $\mathfrak{n}:=[-\infty_1-\infty_2+R_1+R_2]$ で定める．この時，因子類 $[D_n^t]$ は等式 $[D_n^t]=[D_0^0]+t\cdot\mathfrak{t}+n\cdot\mathfrak{n}$ を満たす．(ii) 因子類 $[E_n^t]$ も，等式 $[E_n^t]=[E_0^0]+t\cdot\mathfrak{t}+n\cdot\mathfrak{n}$ を満たす．ただし，$t\in\mathbb{Z}$, $n=0,1,\dots,N-1$.

Proof. (i) は補題3.2, 3.3 より従う．(ii) は，(3.3) より $[E_n^t+S_1+S_2-D_n^t-\infty_1-\infty_2]=0$ であることから従う． □

§ 3.4. 2 重 Casorati 行列式解の構成

$\mathcal{D}_n^t:=[D_n^t]$, $\mathcal{E}_n^t:=[E_n^t]\in\operatorname{Pic}C$ とおく．$C\setminus\{Q_0,\dots,Q_g\}$ 上の正則関数 $\sigma_n^t(p):=\sigma(p;\mathcal{D}_n^t)$, $\tau_n^t(p):=\sigma(p;\mathcal{E}_n^t)$ を，特異曲線 C に付随するテータ関数 (命題 Appendix A.1 を参照) とする．σ_n^t,τ_n^t は 2 重 Casorati 行列式の形をしている (Appendix A.2). σ_n^t のゼロ点は D_n^t と一致し，τ_n^t のゼロ点は E_n^t と一致する．

ここで，C 上の関数

$$\Phi_n^t(p)=k_i\times\frac{\sigma_n^t(p)\cdot\tau_n^{t+1}(p)}{\tau_n^t(p)\cdot\sigma_n^{t+1}(p)},\quad \Psi_n^t(p)=l_i\times\frac{\sigma_n^t(p)\cdot\tau_{n+1}^t(p)}{\tau_n^t(p)\cdot\sigma_{n+1}^t(p)},$$

を考えよう（k_1,k_2,l_1,l_2 は適当な定数）．系 3.4 と，命題 Appendix A.1 により，適切な k_i,l_i を取ることによって $\Phi_n^t(p)$ と $\Psi_n^t(p)$ は C 上の有理関数となる．

この有理関数 $\Phi_n^t(p),\Psi_n^t(p)$ を考える利点は，この関数の極とゼロ点が正因子 D_n^t と E_n^t で完全に記述できる点である．実際，等式 $(\Phi_n^t)=D_n^t-D_n^{t+1}-E_n^t+E_n^{t+1}$, $(\Psi_n^t)=D_n^t-D_{n+1}^t-E_n^t+E_{n+1}^t$ が成立する．

一方，等式 (3.3) とリウビルの定理（極とゼロ点の一致する有理関数は定数倍を除いて一意）により，ある定数 K_1,K_2,L_1,L_2 が存在して

$$\Phi_n^t(p)=K_i\times\frac{k_n^th_n^{t+1}}{h_n^tk_n^{t+1}},\quad \Psi_n^t(p)=L_i\times\frac{k_n^th_{n+1}^t}{h_n^tk_{n+1}^t}$$

が成立する．

Lemma 3.5. $w_n^t=\begin{pmatrix}\alpha_n^t & 1\\ y & \beta_n^t\end{pmatrix}$ とおくとき，以下の等式が成立する*:*

$$\Phi_n^t(\infty_1)=K_1,\quad \Phi_n^t(\infty_2)=K_2,\quad \Phi_n^t(S_1)=K_1\frac{\theta+\beta^*}{\alpha^*},\quad \Phi_n^t(S_2)=K_2\frac{\vartheta+\beta^*}{\alpha^*},$$
$$\Psi_n^t(\infty_1)=-L_1,\quad \Psi_n^t(\infty_2)=-L_2,\quad \Psi_n^t(S_1)=L_1\frac{-\theta+\alpha_n^t}{\beta_n^t},\quad \Psi_n^t(S_2)=L_2\frac{-\vartheta+\alpha_n^t}{\beta_n^t}.$$

ただし，$\theta=\lim_{p\to A}\frac{(p-a_0)(p-b_0)}{h_n^t}$, $\vartheta=\lim_{p\to B}\frac{(p-a_0)(p-b_0)}{h_n^t}$.

Proof. 補題 3.1 により $\Phi_n^t(p)=K_i\times\dfrac{k_n^t(yk_n^t+\beta^*h_n^t)}{h_n^t(\alpha^*k_n^t+h_n^t)}$, $(h_n^t=h_n^t(p))$ が成り立つ．$\lambda\to\infty_i$ の時 $h_n^t/k_n^t\sim\lambda$, $y\sim\lambda^2$ であることより $\Phi_n^t(\infty_i)=K_i$ が従う．また $p\to S_i$ の

時は，h_n^t/k_n^t は 1 次のオーダーで 0 に収束する ((3.3) 参照) ことから $\Phi_n^t(S_i)$ に関する等式が従う．Ψ_n^t についても同様である． □

これらの等式から，θ と ϑ を消去することで，

$$\alpha_n^t = \beta^* \cdot \frac{\frac{\Phi_n^t(S_1)}{\Phi_n^t(\infty_1)} - \frac{\Phi_n^t(S_2)}{\Phi_n^t(\infty_2)}}{\frac{\Psi_n^t(S_1)}{\Psi_n^t(\infty_1)} - \frac{\Psi_n^t(S_2)}{\Psi_n^t(\infty_2)}}, \quad \beta_n^t = \alpha^* \cdot \frac{\frac{\Psi_n^t(S_1)}{\Psi_n^t(\infty_1)} - \frac{\Psi_n^t(S_2)}{\Psi_n^t(\infty_2)}}{\frac{\Phi_n^t(S_1)}{\Phi_n^t(\infty_1)} - \frac{\Phi_n^t(S_2)}{\Phi_n^t(\infty_2)}} \tag{3.4}$$

を得る．($t \in \mathbb{Z}$, $n = 0, 1, \ldots$)．これが求める 2 重 Casorati 行列式解である．任意の n, t に対して，Casorati 行列のサイズは N である．

§4. まとめ

本稿では，無限離散 mKdV 方程式の行列方程式による定式化を行い，遠方で定値となる場合の初期値問題を代数幾何学的方法で解き，2 重 Casorati 行列式解を導いた．しかし，遠方で定値となる離散 mKdV 方程式は，第 2 章で定式化した無限 mKdV 方程式の一番簡単なケースにすぎない．実際，有限被覆 $B \to \mathbb{C}$ を適当に選べば，有限個の元 $w_1, w_2, \ldots, w_N \in \mathcal{B}_L$, $h_1, h_2, \ldots, h_M \in \mathcal{B}_{L'}$ に対して

$$\text{“}w_1 w_2 \ldots w_N h_1 h_2 \cdots h_M \, h_1 h_2 \cdots h_M \, h_1 h_2 \cdots h_M \cdots\text{”}$$

のような無限行列も定式化可能である．このような系の初期値問題の解も代数幾何学的方法で解かれることが期待される．その際，解の形がどのようなものになるかは興味深い問題である．

§ Appendix A. 可約直線上でのテータ関数

ここでは，可約な代数曲線上のテータ関数理論を紹介する．基本的には，既約で単純特異点を持つ曲線のテータ関数理論 [10],§5 と同じものであるが，無限遠点の扱いだけ注意を要する．より一般の可約曲線上のテータ関数理論については，[1],§3 を参照されたい．

Appendix A.1. 一般的な定義

C を代数曲線であって，2 つの既約成分に分割できるとする: $C = C_1 \cup C_2$．各 C_1, C_2 は $\mathbb{P}^1$ に同型であるとしよう．λ_1, λ_2 を C_1 と C_2 の正則な座標とする．

$Q_0, Q_1, \ldots, Q_g \in C$ を C_1 と C_2 の交点とし，$\lambda_1(Q_i) = b_i$, $\lambda_2(Q_i) = c_i$ と書くことにしよう．全ての交点の重複度は 1 とする．$b_i, c_i \neq \infty$ を仮定しても良い．2 点 $\infty_1 \in C_1$, $\infty_2 \in C_2$ を $\lambda_1(\infty_1) = \lambda_2(\infty_2) = \infty$ なる点として定める．

加法群 $\operatorname{Div} C$ を $\{\sum n_i x_i : \text{有限和} \mid n_i \in \mathbb{Z},\ x_i \in C \setminus \{Q_0, \ldots, Q_g\}\}$ とおこう．$\operatorname{Div} C$ の元 $D = \sum n_i x_i$ に対して，分割 $D_1 = D \cap C_1$，$D_2 = D \cap C_2$ を

$$D = D_1 + D_2, \quad D_k = \sum n_i y_i \qquad (y_i \in C_k)$$

で定める．C 上の有理関数 f に対して，$(f)_0$ を f のゼロ点の作る因子，$(f)_\infty$ を f の極の作る因子とし，$(f) := (f)_0 - (f)_\infty \in \operatorname{Div} C$ とおく．

$\operatorname{Pic} C$ を $\operatorname{Div} C$ を以下の同値関係で割った加法群とする：

$$D \sim 0 \iff \begin{array}{l} D = D_1 + D_2, \\ C_k \text{ 上の有理関数 } f_k \text{ が存在して } (i)\ D_k = (f_k),\ (ii)\ f_1(Q_i) = f_2(Q_i) \end{array}.$$

$\operatorname{Div} C$ の元 D の，$\operatorname{Pic} C$ における同値類を $[D]$ と書くことにする．

$\operatorname{Pic} C$ の部分群 $\operatorname{Pic}^0 C$ を，$\operatorname{Pic}^0 C := \{D \,|\, D \text{ の次数は } 0\}$ で定義する．$\operatorname{Pic}^0 C$ の元 $D = D_1 + D_2$ に対して，$\deg D_1 = n_1$, $\deg D_2 = n_2$ $(n_1 + n_2 = 0)$ とし，C_1, C_2 上の有理関数 f_1, f_2 を $[D_1 - n_1 \cdot \infty_1] = (f_1)$, $[D_2 - n_2 \cdot \infty_2] = (f_2)$ なるものとする（C_1, C_2 は有理曲線なので，必ず存在する）．写像 $\boldsymbol{A} : \operatorname{Pic}^0 C \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^\times)^{g+1}$ を

$$D \mapsto (n_1, \frac{f_1(Q_0)}{f_2(Q_0)}, \frac{f_1(Q_1)}{f_2(Q_1)}, \dots, \frac{f_1(Q_g)}{f_2(Q_g)})$$

で定める．$\boldsymbol{A}(D)$ は，f_1 と f_2 の組が，C 上の有理関数からどれほど隔たりがあるかをあらわしている．ただしこの定義だと f_1, f_2 の取り方に依存するため，$\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^\times)^{g+1}$ に

$$(n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_g) \sim (n, k\eta_0, k\eta_1, \dots, k\eta_g), \quad k \neq 0$$

なる同値関係を入れ，$\operatorname{Jac} C := \mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^\times)^{g+1} / \sim$ と定める．$\operatorname{Jac} C$ は $\mathbb{Z}$ を加法群，$(\mathbb{P}^\times)^g$ を乗法群と見ることで群となる．$\boldsymbol{A}$ は $\operatorname{Pic}^0 C$ と $\operatorname{Jac} C$ の間の群の同型を与える．

Appendix A.2.　超楕円曲線の場合

いま，可約曲線 $C = C_1 \cup C_2$ が以下の性質を満たしているとする: 正則関数 λ_1, λ_2 をうまく取ることで，$\lambda_1(Q_k) = \lambda_2(Q_k) = b_k \neq \infty$ とできる．この仮定は，C が超楕円曲線の退化であることと同値である．超楕円曲線の退化であるような C に対しては，C 上の有理関数 λ を，$\lambda|_{C_1} = \lambda_1$, $\lambda|_{C_2} = \lambda_2$ なるものとして定義できる．

この場合，$\operatorname{Pic}^0 C$ の任意の元は，$D = D_1 + D_2 - m_1\infty_1 - m_2\infty_2$, $D_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i$, $D_2 = \sum_{i=1}^{n_2} y_i$ $(x_i \in C_1,\ y_i \in C_2,\ n_1 + n_2 = m_1 + m_2)$ と書ける．このとき，写像 $\boldsymbol{A}$ は

$$D \mapsto (n_1 - m_1, \frac{\prod_1^{n_1}(b_0 - x_i)}{\prod_1^{n_2}(b_0 - y_i)}, \frac{\prod_1^{n_1}(b_1 - x_i)}{\prod_1^{n_2}(b_1 - y_i)}, \dots, \frac{\prod_1^{n_1}(b_g - x_i)}{\prod_1^{n_2}(b_g - y_i)})$$

と表現される．

いま $W := \{C \backslash \{Q_0, \dots, Q_g\}$ 上の点のなす有限集合全体$\}$ とする．$\{x_1, \dots, x_n\} \in W$ に対して $\pi(x_1, \dots, x_n) := \boldsymbol{A}(x_1 + \cdots + x_n - n \cdot \infty_2)$ とおこう．自然数 n に対して W の部分集合 W_n を，n 個の元からなる $\{x_1, \dots, x_n\} \in W$ なる元の全体とする．$x_i = \infty_2 \in C$ をみたす i が存在しても構わないので，$\pi(W_{n+1}) \supset \pi(W_n)$ が成立する．

ここで興味があるのは，各集合 W_n の π による像である．いま，$\pi(x_1, \dots, x_n) = (m, \eta_0, \dots, \eta_g)$ としよう．添え字の入れ替えで $x_1, \dots, x_m \in C_1$, $x_{m+1}, \dots, x_n \in C_2$ として良い．簡単のため $y_i := x_{m+i}$ $(i = 1, 2, \dots, n - m)$ と書こう．$l = n - m$ とする．

ゼロで無い定数 c_1, c_2 を用いて，C_1, C_2 上の有理関数 f_1, f_2 を，

$$f_1(\lambda) := c_1 \times \prod_{i=1}^{m}(\lambda - x_i) = \sum_{j=0}^{m} u_j \lambda^j, \quad f_2(\lambda) := c_2 \times \prod_{i=1}^{l}(\lambda - y_i) = \sum_{j=0}^{l} v_j \lambda^j,$$

で定義する．もし $x_i = \infty_1$ や $y_i = \infty_2$ を満たすような i が存在するときは，その因子を省くと約束する．その時は，$u_m = 0$ や $u_l = 0$ が成立する．

仮定より，ある $k \neq 0$ が存在して $\frac{f_1(b_i)}{f_2(b_i)} = k\eta_i$ が全ての $i = 0, 1, \ldots, g$ に対して成立する．言いかえれば，

$$\sum_{j=0}^{\max[m,l]} (u_j - k\eta_i v_j) \cdot b_i^j = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, g$$

である．$w_j := -kv_j$ と置こう．$n+2$ 次ベクトル V を $V := {}^t(u_0, \ldots, u_m, w_0, \ldots, w_l)$ で定める．また，$(g+1) \times (m+1)$ 次行列 M と $(g+1) \times (l+1)$ 次行列 L を

$$M = (b_i^j)_{i=0, j=0}^{g,\ \ m}, \quad L = (\eta_i b_i^j)_{i=0, j=0}^{g,\ \ l},$$

とおく．この時，上の方程式は

$$(M, L)V = 0 \tag{Appendix A.1}$$

と書きかえられる．

行列方程式 (Appendix A.1) を満たすようなゼロで無いベクトル V が存在するためには，$n{+}2 > \mathrm{rk}(M, L)$ が必要十分である．したがって，$n \geq g, m$ の時は任意の $(m, \eta_0, \ldots, \eta_g)$ に対してある $\{x_1, \ldots, x_n\} \in W_n$ が存在して，$\pi(x_1, \ldots, x_n) = (m, \eta_0, \ldots, \eta_g)$ となる．すなわち $\pi(W_n) = \{(m, \eta_0, \ldots, \eta_g) \in \mathrm{Jac}\, C \mid 0 \leq m \leq n\}$.

この議論により，$\pi(W_{g-1})$ の情報も得ることができる．$(m, \eta_0, \ldots, \eta_g) \in \pi(W_{g-1})$ なる必要十分条件は，$0 \leq m < g$ かつ $\det(M, L) = 0$ が成り立つことである．

ここで，S 上の関数 $\tau(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l)$ $(x_i \in C_1, y_i \in C_2)$ を

$$\tau(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l) := \det \begin{vmatrix} B_0 & b_0 B_0 & \cdots & b_0^m B_0 & A_0 & b_0 A_0 & \cdots & b_0^l A_0 \\ B_1 & b_1 B_1 & \cdots & b_1^m B_1 & A_1 & b_1 A_1 & \cdots & b_1^l A_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_g & b_g B_g & \cdots & b_g^m B_g & A_g & b_g A_g & \cdots & b_g^l A_g \end{vmatrix}$$

$$A_j := \prod_{i=1}^{m} (b_j - x_i), \quad B_j := \prod_{i=1}^{l} (b_j - y_i)$$

とおく．$\pi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l) = (m, \eta_0, \ldots, \eta_g)$ と置き，$(m, \eta_0, \ldots, \eta_g)$ から作られる関数 $\det(M, L)$ を考えると，定義より

$$\tau(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l) = 0 \iff \det(M, L) = 0$$

である．特に $\tau(x_1,\ldots,x_n)=0 \iff \{x_1,\ldots,x_n\}\in W_{g-1}$.

さて，$\{x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_l\}$ を W_g には属するが W_{g-1} には属さない元としよう．それとは独立な C の元 p に対して，

(Appendix A.2)

$$\sigma(p):=\det\begin{vmatrix} B_0(p) & b_0B_0(p) & \cdots & b_0^{m-\delta_1(p)}B_0(p) & A_0(p) & b_0A_0(p) & \cdots & b_0^{l-\delta_2(p)}A_0(p)\\ B_1(p) & b_1B_1(p) & \cdots & b_1^{m-\delta_1(p)}B_1(p) & A_1(p) & b_1A_1(p) & \cdots & b_1^{l-\delta_2(p)}A_1(p)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_g(p) & b_gB_g(p) & \cdots & b_g^{m-\delta_1(p)}B_g(p) & A_g(p) & b_gA_g(p) & \cdots & b_g^{l-\delta_2(p)}A_g(p) \end{vmatrix}$$

$$A_j(p):=(b_j-p)^{-\delta_1(p)}\cdot A_j,\quad B_j(p):=(b_j-p)^{-\delta_2(p)}\cdot B_j$$

$$\delta_1(p)=\begin{cases}1, & p\in C_1\\ 0, & p\in C_2\end{cases},\quad \delta_2(p)=\begin{cases}0, & p\in C_1\\ 1, & p\in C_2\end{cases}.$$

とおく．上に述べたことより，$C\setminus\{Q_0,\ldots,Q_g\}$ 上の正則関数 $\sigma(p)$ のゼロ点の集合は $\{x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_l\}$ に一致する．この事実は，リーマンのゼロ点定理の特殊化になっている．

$\sigma(p)$ を定義する際に用いた因子 $\{x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m\}\in W_g\setminus W_{g-1}$ の π による像を $\mathcal{D}\in\mathrm{Jac}\,(C)$ と書く．この $\mathcal{D}$ を強調したいときは $\sigma(p)=\sigma(p;\mathcal{D})$ と書くことにする．

関数 $\sigma(p;\mathcal{D})$ は $\{Q_0,\ldots,Q_g\}$ 上に特異点を持つが，σ たちを組み合わせることで，C 上の有理関数に拡張できる:

Proposition Appendix A.1. 4 つの元 $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\mathcal{D}_3,\mathcal{D}_4\in\mathrm{Jac}\,C$ が，いずれも $\pi(W_{g-1})$ に含まれておらず，関係式 $\mathcal{D}_1\cdot\mathcal{D}_2=\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}_4$ を満たすとする．この時，あるゼロで無い定数 k_1,k_2 が存在して，$C\setminus\{Q_0,\ldots,Q_g\}$ 上の有理関数

$$F(p):=k_i\times\frac{\sigma(p;\mathcal{D}_1)\cdot\sigma(p;\mathcal{D}_2)}{\sigma(p;\mathcal{D}_3)\cdot\sigma(p;\mathcal{D}_4)},\quad p\in C_i$$

は，C 上の有理関数に一意的に拡張できる．

Proof. 仮定より，W_g の元 $\{x_1^{(i)},\ldots,x_g^{(i)}\}$ $(i=1,2,3,4)$ が存在して，

$$\pi(x_1^{(i)},\ldots,x_g^{(i)})=\mathcal{D}_i$$

が成り立つ．$F(p)$ の定める $C\setminus\{Q_0,\ldots,Q_g\}$ 上の因子 $\mathcal{E}=\sum_{j=1}^{g}x_j^{(1)}+x_j^{(2)}-x_j^{(3)}-x_j^{(4)}$ は $\pi(\mathcal{E})=\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\mathcal{D}_3^{-1}\mathcal{D}_4^{-1}=(0,1,1,\ldots,1)$ を満たすので，ある C 上の有理関数 $f(p)$ が存在して $\mathcal{E}=(f)$ となる．$C\setminus\{Q_0,\ldots,Q_g\}$ 上の関数 $F(p)/f(p)$ は極もゼロ点も持たない．さらに各 C_1, C_2 に制限すれば，C_1, C_2 上の極もゼロ点も無い正則関数に拡張できる．したがって適当な k_1,k_2 を選べば，$F(p)=f(p)$ と出来る．□

$\sigma(p)$(Appendix A.2) は，まさに 2 重 Casorati 行列式 [14] である．関数 σ は，コンパクトリーマン面に対するテータ関数に当たるものであるから，2 つの射影直線からなる可約な代数曲線のテータ関数は 2 重 Casorati 行列式である，ということができる．

References

[1] Bielawski, R., Reducible spectral curves and the hyperkähler geometry of adjoint orbits, *J. London Math. Soc.*, **76** (3) (2007), 719-738.

[2] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M., Method for Solving the Korteweg-deVries Equation *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095–1097.

[3] Hirota, R., Discrete Analogue of a Generalized Toda Equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981), 3785-3791.

[4] Inoue, R., Yamazaki, T. and Vanhaecke, P., Singular fiber of the Mumford system and rational solutions to the KdV hierarchy, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **63** (4) (2010), 508–532.

[5] Iwao, S., Solution of the generalized periodic discrete Toda equation II: theta function solution *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43** (2010), 155208.

[6] Kajiwara, K., Ohta, Y., Satsuma, J., Grammaticos, B. and Ramani, A, Casorati determinant solutions for the discrete Painleve-II equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), 915.

[7] Kajiwara, K., Ohta, Y. and Satsuma, J., Casorati determinant solutions for the discrete Painleve III equation *J. Math. Phys.* **36** (1995), 4162.

[8] Ohta, Y., Hirota, R., Tsujimoto, S. and Imai, T., Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (6) (1993), 1872–1886.

[9] Kajiwara, K and Ohta, Y., Bilinearization and Casorati determinant solutions to non-autonomous $1+1$ dimensional discrete soliton equations, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **B13** (2009), 53–74.

[10] Mumford, D., *Tata lectures on theta II*, Birkhäuser, Boston 1993.

[11] Moerbeke, P. and Mumford, D., The spectrum of difference operators and algebraic curves, *Acta. Math.* **143** (1) (1979), 93–154.

[12] Ohta, Y., Kajiwara, K., Matsukidaira, J. and Satsuma, J., Casorati determinant solution for the relativistic Toda lattice equation, *Ann. of Math.*, **145** (1997), 193–213.

[13] Sato, M. and Sato, Y., *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science*, Kinokuniya/North-Holland, Tokyo, 1983.

[14] Tsujimoto, S., Bilinear form of discrete-time soliton equations *RIMS Kokyuroku* **1203** (2001), 89–96.