

## 計算電磁気学

工学研究科 電気工学専攻 電磁工学講座 電磁エネルギー工学分野  
松尾哲司

### 1. 計算電磁気学

ロボットや電気自動車には数多くのモータが使われています。モータの内部構造は複雑なため、モータ内の電磁界を精度よく算出するためには、電磁界の計算機シミュレーションが不可欠です。図1 (a) はモータの構造を大幅に単純化した断面図を示しています。両端に永久磁石を取り付けた棒状の磁性体が回転する部分です（以後、回転子と呼びます）。図中で鉄芯と呼んでいる部分は、磁束の通り道として用いられる磁性体（通常は鉄）の部分です。コイルに電流を流すとモータ内に磁界が生じ、回転子が電磁力を受けて回転します。そのときの磁束線を図1 (b) に示しています。このような磁束線や、回転子に働く電磁力を計算するために、図1 (c) のように、モータ内を細かなメッシュ（以後、計算格子とよびます）に分割して電磁界の方程式を立てて解きます。ただし、図1 (c) では空気の部分も格子分割しており、対称性を考慮して半分の領域のみ格子分割して方程式を解きます。ここで、電磁界を精度よく効率的に算出するためには、どのように計算格子を構成して、どのように電磁界の方程式を立て、それをどのように解くかということを考える必要があります。そのためには、電磁界の性質と計算機の利用技術の両方の知識が必要となり、そのために、計算電磁気学という研究分野が発達しています。計算電磁気学が必要とされる分野は、モータなどの電気機器の分野に限りません。高速で安定な動作が要求される電子機器の電磁界解析や、先進的な光デバイスの設計開発にも電磁界の計算機シミュレーションが必要とされており、計算電磁気学の進展が求められています。ここでは、私どもの研究室で行っている計算電磁気学の研究トピックをいくつか紹介します。

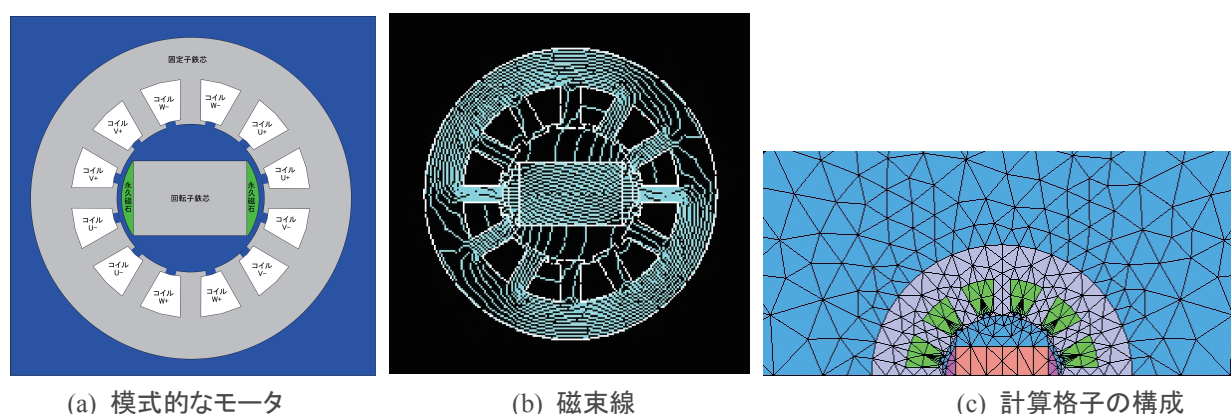


図1 模式的なモータ内部の磁界計算

### 2. 鉄芯の磁気特性の表現

上で説明したモータは、電磁石の電磁力で回転子を引っ張って回転力を作っています。電磁石の電磁力は図2 (a) のように巻線の電流に比例するようには思われますが、実際にはそれほど単純ではなく、鉄

芯の磁気特性を考慮しないと電磁力を正確に計算できません。鉄芯の磁気特性を複雑にするのは、ヒステリシス特性と渦電流です。

電磁石の電磁力は電流がある程度大きくなると、図2 (b) のようにそれ以上電流を大きくしても増えなくなる性質があり、この現象を磁気飽和と呼びます。簡単のために、電流と電磁力で説明しましたが、正確には、鉄芯内の磁界  $H$  と磁束密度  $B$  (あるいは磁化  $M$ ) の関係が、電流と磁力の関係に対応して飽和特性を持ちます。以下、図2 (c) を用いて磁界  $H$  と磁束密度  $B$  の関係で説明します。磁束密度が飽和した後 (点P) 磁界を小さくしていくと、磁界を大きくしていったときとは異なる磁束密度になり、磁界を0に戻しても磁束密度は0に戻りません (点Q)。磁界を0から負方向に増やしていくと、やはり負方向でも磁束密度は飽和して (点R)、その後、磁界を0に戻すと、今度は逆方向の磁束密度が残ります (点S)。その後、磁界を正方向に大きくすると再び飽和し、その結果、磁界と磁束密度の関係は図2 (c) のようなループを描きます。このように、磁界が増加するときと減少するときで磁束密度の値が異なる現象を磁気ヒステリシス現象といい、図2 (c) のようなループをヒステリシスループといいます。この現象を利用するのがハードディスクなどの磁気記録です。記録するために外部から磁界をかけてそれを取り去った後も、磁束密度が残るために情報を記録することができます。鉄芯内ではヒステリシスループの面積分だけ損失が生じることが知られており、これをヒステリシス損といいます。

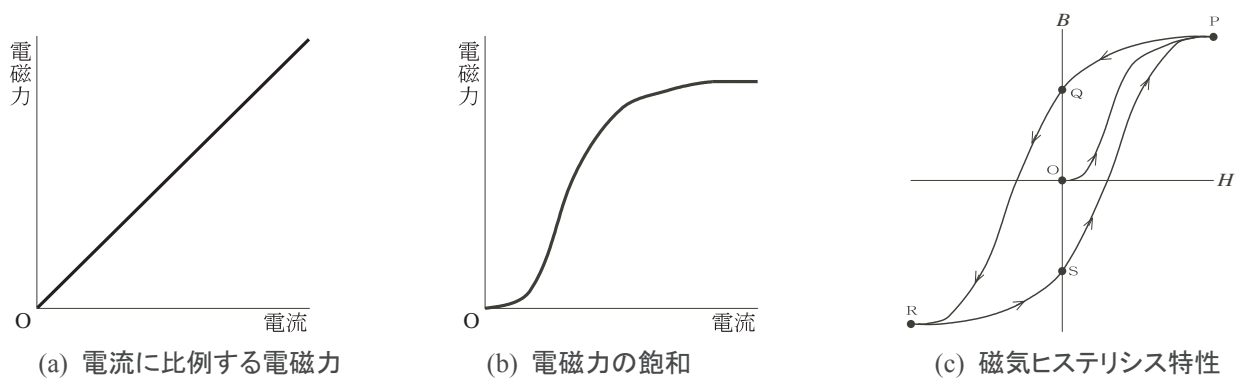


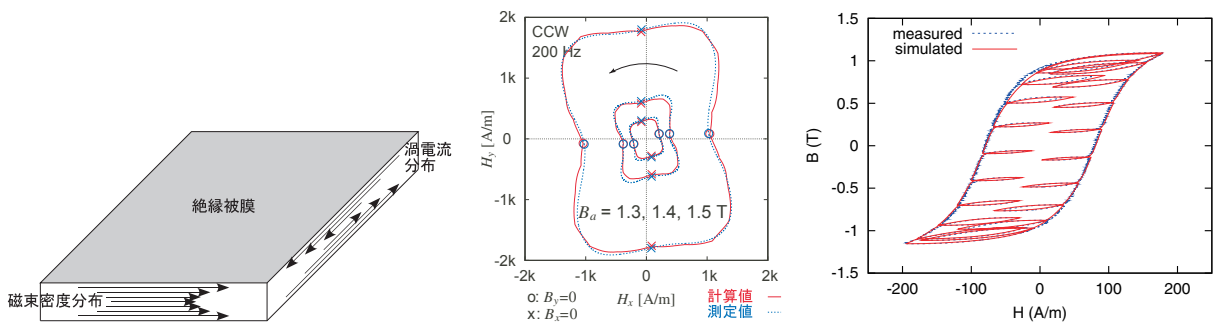
図2 磁気飽和とヒステリシス特性

鉄芯に生じる損失としてもう一つ渦電流損があります。導体内を通る磁界が変化すると、電磁誘導の法則により導体内に電界が生じて誘導電流が流れます。この電流を渦電流といい、渦電流によりジュール熱が発生します。誘導加熱 (IH) 調理器は、この渦電流によるジュール熱を利用して電力を熱に変えています。鉄芯内では、ジュール熱は損失となり、これを渦電流損といいます。渦電流を流れにくくするために、図3のように絶縁被膜を塗布した厚さ0.3-0.5mmの薄い鋼板を重ねて鉄芯を作ることが通常で、この鋼板は電磁鋼板と呼ばれます。

電気機器の磁界シミュレーションでは、(1) ヒステリシス特性をどのように数式で表現するか (数式で表現されれば、計算機は解くことができます)、(2) 薄い鋼板の内部まで計算格子を構成すると格子数が膨大になること、が問題となります。そこで、私どもの研究グループではヒステリシス特性を精度よく表現する数学モデルを開発するとともに、薄い鋼板の内部の格子分割を回避する方法を研究しています。(1) については、電磁鋼板内の磁界と磁束密度はそれぞれベクトル量ですので、両ベクトル間のベクトルヒステリシス特性を数式で表現することが必要になります。これについては、ベクトルプレイモデルというモデル化方法を開発し、ベクトルヒステリシス特性を精度よく表現できるようになっています。(2) については、均質化法と呼ばれる方法を用いて、図3のような鋼板内部の電磁界分布を考慮しながら鋼板を通る磁束を効率よく算出する方法を開発しています。モータはインバータで

駆動されることが多く、鉄芯材料には高い周波数成分を含む磁界が生じるため、複雑なヒステリシスループが生じるとともに、渦電流が作る磁界も大きくなります。そのため、広い周波数範囲にわたって高精度なシミュレーション手法を開発しています。

図4 (a) は、磁束密度ベクトルが、大きさ一定のまま反時計回りに回転する場合について、磁界ベクトルの軌跡をシミュレーションした結果です。磁気異方性のため、磁界ベクトルの大きさは一定でなく、回転方向のヒステリシス特性および渦電流のため、磁界ベクトルは磁束密度ベクトルより進んで回転している様子が正確にシミュレーションされています。図4 (b) はインバータ励磁を模した磁束密度波形を入力とした場合のヒステリシスループを示しています。細かなヒステリシスループを含め、正確に表現されていることがわかります。



(a) 回転ヒステリシス特性 (b) 高調波成分を含むヒステリシス特性

図3 電磁鋼板と内部分布

図4 ヒステリシス特性のシミュレーション結果

### 3. 時空間計算電磁気学

模式的なモータの例でわかるように、物体の形状を計算格子で的確に表現して電磁界計算をすることは難しくありません。空間的には柔軟に計算格子を構成して電磁界を計算できるのですが、時間方向には、一定の時間刻みで少しずつ時間を進めて順番に計算することが通常です。しかし、特殊相対性理論によると、時間と空間は時空間として一体的に取り扱うことができ、このことは電磁界の方程式にも成り立ちます。そこで、時空間で計算格子を作って電磁界を計算する方法を研究しています。時空間で計算格子を構成することにより、計算格子の自由度が大きくなります。具体的には、解析対象の各部分に応じた時間刻み幅を設定することができます。例えば、解析対象の一部に微細な構造がある場合、それに合わせて空間全体を微細に格子分割したものが図5 (a) で、微細構造を持つ部分のみ空間格子を細かくしたのが図5 (b) です。どちらの場合も時間  $t$  の刻み幅ステップは一定値  $\Delta t$  で、空間の最小格子サイズに対応して時間刻み幅も微小にすることが必要になります。時空間で計算格子を構成すると、図5(c) のように必要な部分のみ時間刻み幅を小さくすることができ、計算格子を減らすことができます。

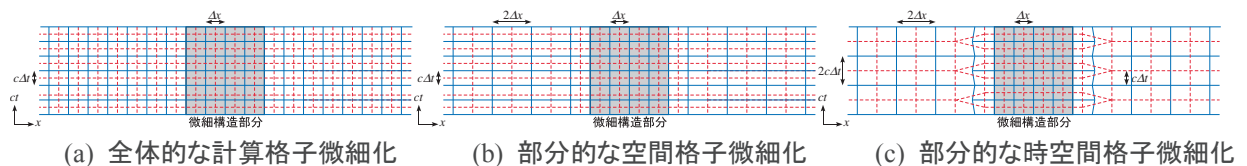


図5 計算格子の部分的な細分化 (時間方向は  $t$  ではなく光速  $c$  を乗じた  $ct$  を座標にとっている)

ここで、図5の実線と破線は、互いに双対の関係にあります。電磁界計算の際、一つの格子だけでなく、ある格子と幾何学的に双対な関係にある格子 (これを双対格子とよびます) も共に用いることにより、

電磁界の方程式をよりの確に計算格子上で表現する方法があります。図6は3次元空間における双対格子の例で、実線の格子が主格子、破線の格子が主格子と双対な関係にある格子です。主格子の面を双対格子の辺が貫いており、逆に双対格子の面を主格子の辺が貫いています。このように、主格子の面と双対格子の辺が1対1に対応し、主格子の辺と双対格子の面が1対1に対応します。主格子の面に磁束密度  $B$ 、双対格子の辺に磁界  $H$  を対応させ、主格子の辺に電界  $E$ 、双対格子の面に電束密度  $D$  を対応させると、電磁界を表現するのに好都合です。

時空間では、空間3次元と時間1次元を合わせた4次元時空間で双対格子を構成します。時間方向の座標として、時間  $t$  の代わりに、 $t$  に光速  $c$  を乗じた  $w = ct$  を座標にとると便利なことがあります。空間の  $xyz$  座標と合わせて  $wxyz$  の4次元時空間で計算格子を作ります。このとき、時空間では格子の角度の測り方が異なり、図7のような状態で格子が直交することに注意します。図8は4次元時空間格子の例です。図8(a)は主格子、(b)は双対格子、(c)は両者を重ねて書いたものです。図8(d)の3次元の場合と比較して4次元時空間の格子は相当複雑になることがわかります。この例は比較的単純な4次元時空間格子の例ですが、もっと複雑になると、4次元時空間格子の構造を頭に思い浮かべることも図で表現することも容易でなくなります。そこで、数学的な手法を用いて正確な4次元格子を構成することが必要になります。具体的には、格子の幾何学構造を数式で表現します。例えば、主格子の面とそれを囲む辺との関係や、体積とそれを囲む面との関係を数式で表現します。次に、それらの数式から、双対格子における辺・面・体積の間の幾何学的関係を自動的に導出します。この方法を用いると、4次元時空間で主格子を構成することにより、その主格子と双対格子の電磁界の方程式を誤りなく導出することができるようになります。



図6 双対格子（実線が主格子、破線が双対格子） 図7 時空間における主格子と双対格子の直交関係

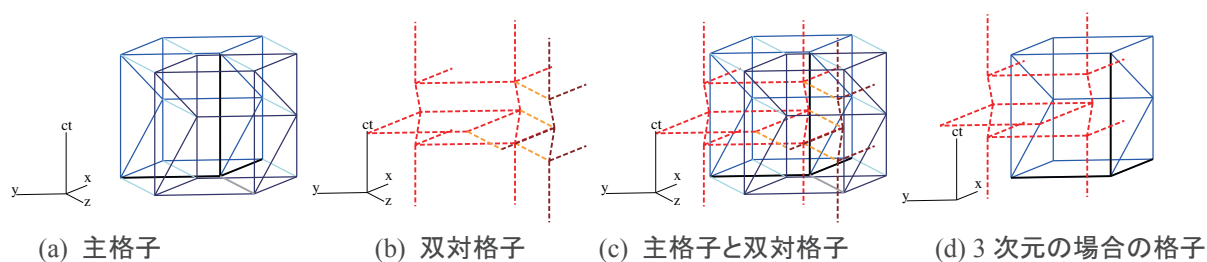


図8 4次元時空間格子

#### 4. 電磁界の高速解法

どんなに正確に計算できたとしても、1回の計算に月単位や年単位の時間が必要なら、電気電子機器の設計にはあまり役に立ちません。そのため、高速に計算することも電磁界シミュレーションでは重要です。シミュレーションの分野では、多くの計算が最終的には連立一次方程式の形で表されることが多く、連立一次方程式の高速解法が重要になります。高速解法には計算機性能の向上を利用した並列計算

技術の開発も重要ですが、ここでは、電磁界の方程式の数理的な性質を利用する高速解法の骨子を紹介します。

未知数が少ない場合には消去法を使って連立一次方程式を解くことができますが、未知数が数十万個以上の大規模な連立一次方程式では、消去法ではなく反復近似解法を用いることが一般的です。例えば、図9のような計算格子上の節点に未知数  $\phi_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) をおくと、隣接する節点との関係式として、

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & a_{i,j} \phi_{i,j} - e_{i,j} \phi_{i+1,j} - w_{i,j} \phi_{i-1,j} - n_{i,j} \phi_{i,j+1} - s_{i,j} \phi_{i,j-1} = f_{i,j}, \\ & a_{i,j+1} \phi_{i,j+1} - e_{i,j+1} \phi_{i+1,j+1} - w_{i,j+1} \phi_{i-1,j+1} - n_{i,j+1} \phi_{i,j+2} - s_{i,j+1} \phi_{i,j} = f_{i,j+1} \\ & \vdots \end{aligned} \quad (1)$$

のような連立一次方程式が得られるとします。ここで、係数  $a_{i,j}$ ,  $e_{i,j}$ ,  $w_{i,j}$ ,  $n_{i,j}$ ,  $s_{i,j}$  や  $f_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ) は定数です。最も簡単な反復解法の一つは、適当な  $\phi_{i,j}$  の初期値  $\phi_{i,j}^0$  (たとえば  $\phi_{i,j}^0 = 0$ ) から始めて、

$$\phi_{i,j}^m = (f_{i,j} + e_{i,j} \phi_{i+1,j}^{m-1} + w_{i,j} \phi_{i-1,j}^{m-1} + n_{i,j} \phi_{i,j+1}^{m-1} + s_{i,j} \phi_{i,j-1}^{m-1}) / a_{i,j} \quad (2)$$

という計算を、 $m = 1, 2, \dots$  と繰り返していく方法です。ここで、 $\phi_{i,j}^m$  は  $m$  回反復計算後の近似解になります。式 (2) の計算を繰り返すと、 $\phi_{i,j}^m$  は連立一次方程式 (1) の解に近づいていきます。解に近づく速さは、反復計算のし方と係数間の関係によって決まり、場合によっては解に近づかない場合や、近づくのが非常に遅い場合があります。係数間の関係は電磁界の方程式によって決まるので、この方程式の性質を利用することにより解への収束を速めることができます。

例として、次のような2つの変数 ( $x, y$ ) に対する連立1次方程式を考えます。

$$a_1x + a_2y = c_1, \quad a_2x + a_3y = c_2 \quad (3)$$

ここでも、係数  $a_1, a_2, a_3$  や  $c_1, c_2$  は定数です。 $a_1a_3 - a_2^2 \neq 0$  のとき、方程式 (3) は唯一の解を持ちます。これに対して、3変数 ( $x, y, z$ ) に対する連立一次方程式、

$$a_1x + a_2y + (a_1b_1 + a_2b_2)z = c_1 \quad (4-1)$$

$$a_2x + a_3y + (a_2b_1 + a_3b_2)z = c_2 \quad (4-2)$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2)x + (a_2b_1 + a_3b_2)y + (a_1b_1^2 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_2^2)z = b_1c_1 + b_2c_2 \quad (4-3)$$

を考えます。ここで、 $b_1, b_2$  も定数です。式 (4-1) の  $b_1$  倍と式 (4-2) の  $b_2$  倍の和が式 (4-3) となっているので、これら3式は独立でなく、連立一次方程式 (4) の解は無数にあります。無数の解のうちの一つ  $(x_0, y_0, z_0)$  が求まったとすると、 $(x, y) = (x_0 + b_1z_0, y_0 + b_2z_0)$  と置くことにより、式 (3) の解を得ることができます。これらの関係を図10に示します。式 (3) の解は点Pの位置になります。式 (4) の解は、式 (4-1) と式 (4-2) で表される2平面の交線となる直線PQ上の点になります。原点Oから出発して式 (3) の解を反復計算で求める場合、 $xy$  平面内で解に近づいていくことにはなりますが、係数行列の関係によっては解への収束が大変遅いことがあります。これに対して、式 (4) を解く場合、変数と方程式が余分に増えるため、一見すると反復計算の手間が増えるように思えます。しかし、解を探索する範囲を  $xyz$  空間に拡大することにより、直線PQに速く達するルートが存在すれば、少ない反復計算で解に達することができます。この方法のポイントは、元の連立一次方程式での解への収束が遅い方向を見つけて、その方向を回避できるように、係数 ( $b_1, b_2$ ) を決定することにあります。電磁界方程式に現れる遅い方向 (成分) はある程度わかっており、この知識を利用して、余分な変数と方程式を追加する方法を開発し、電磁界の高速解法を実現しています。

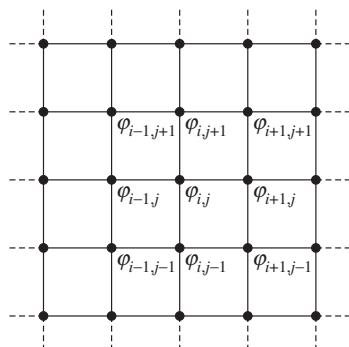


図8 計算格子と未知数の配置

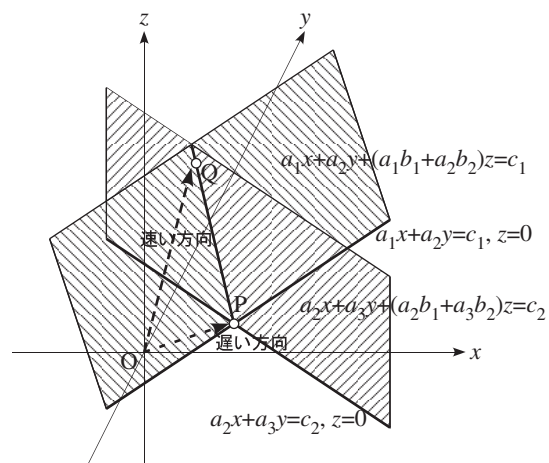


図9 連立1次方程式の解への収束

## 5. むすび

簡単ながら、計算電磁気学に関する研究を紹介しました。計算機パワーを利用することも重要ですが、電磁界や電気電子材料の性質を理解し、かつ、数学の力を利用することにより、信頼できる計算結果を効率よく得ることができます。優れた電磁界の解法が開発されると一気に何十倍も高速に計算することも可能になります。今後も、先進的な電気電子機器・デバイスの開発に不可欠な計算電磁気学の研究を進めていきます。