（続紙 1）

京都大学	博士（理　学）	氏名	佐藤　敬志
論文題目	The T-equivariant Integral Cohomology Ring of F_4/T		

（論文内容の要旨）

G をコンパクト連結リー群とし、T をその極大トーラスとするとき、等質空間 G/T を旗多様体という。旗多様体は幾何学、トポロジー、表現論、組み合わせ論などの広い分野で研究される重要な対象である。本論文では G/T に T が左からの積により作用する場合の整係数 T 同変コホモロジーを、G が F_4 型の例外リー群のときに決定した。本論文ではホモトピー論においてなされてきた古典的な計算手法を踏襲せず、Goresky、Kottwiz、MacPherson により確立された GKM 理論を用いることにより Weyl 群の組み合わせ論を基礎において同変コホモロジーを決定した。

GKM 理論とは「よい」トーラス作用をもつ多様体のトーラス同変コホモロジーが 0 次元と 1 次元の軌道（GKM グラフと呼ばれる）から復元できるということを示すものであり、特に、旗多様体 G/T の場合はこの軌道が単純鏡映を生成系とする G の Weyl 群の Cayley グラフがこの軌道と一致する。さらに、G/T の Bruhat セルのはりつけが GKM グラフの各辺に対応するルートによる「変換」により記述されることが 2 次元 Bruhat セルのはりつけという単純な場合と表現のルート分解によりわかる。したがって、GKM グラフにそって変換して得られるもの（GKM 関数と呼ばれる）たちのなす環と G/T の T 同変コホモロジーが一致し、Weyl 群の組み合わせ的情報により G/T の T 同変コホモロジーを計算することが可能になる。また、ルート系による同様の議論が極大階数部分群 U に対する等質空間 G/U に対しても行うことができ、この場合も G と U の Weyl 群の組み合わせ的情報により G/U の同変コホモロジーが得られる。

G が古典型の場合は石田、枡田、福川らにより GKM 理論を用いて旗多様体の同変コホモロジーは、古典群のなす無限シリーズを用いた単純な帰納法により決定されているが、シリーズを形成しない例外型の場合はまったく未知の対象であったが、本論文ではその後 GKM 理論における同変 Schubert 類という定式化を経て得られる、GKM 版 Leray-Hirsch 定理（参考論文を参照）のプロトタイプとなる定理を証明し、それをファイバー束

$$\mathrm{Spin}(9)/T \to F_4/T \to \mathbb{O}P^2$$

に応用することで F_4/T の同変コホモロジーを決定した。上記の通り、本論文の手法は申請者による GKM 理論と同変 Schubert カルキュラスとの融合により飛躍的に進歩している。

以上が本論文の主要結果である。

（続紙 2）

（論文審査の結果の要旨）

G をコンパクト連結リー群とし、T をその極大トーラスとするとき、等質空間 G/T を旗多様体といい、幾何学、トポロジー、表現論、組み合わせ論などの広い分野で研究される重要な対象である。特にそのコホモロジーはこれらの多くの分野をつなげるものであり、多くの研究がなされている。本論文では G/T に T が左からの積により作用する場合の整係数 T 同変コホモロジーを、G が F_4 型の例外リー群のときに決定した。本論文では GKM 理論により G/T の同変コホモロジーが単純鏡映を生成系とした G の Weyl 群の Cayley グラフとその辺に与えられたルートを用いて、Weyl 群の組み合わせ的情報のみによって求められるという事実に基づいて G/T の T 同変コホモロジーを決定した。

計算の核となったのはある種の Leray-Hirsch 定理であり、これはその後申請者による GKM 理論と Schubert カルキュラスの融合により GKM 版 Leray-Hirsch 定理として定式化された。この定理をファイバー束

$$\mathrm{Spin}(9)/T \to F_4/T \to \mathbb{O}P^2$$

に適用することで F_4/T の同変コホモロジーを決定した。その際にも丁寧かつ正確に計算が行われており、この計算結果により、これまで形式的に決定されていた F_4/T のコホモロジーの幾何的、組み合わせ的意味が明確となった。したがって、この論文の手法はその後の研究へつながり、大きく結実しており、計算結果はこれまでのものを一新した。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について平成２７年１月２７日に試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　　年　　　月