代数幾何学シンポジウム記録
1977年度 pp.188-197

Bloch 予想のいくつかの例について

東大理 猪瀬博司

1．以下曲面は、複素数体上の射影曲面のみを考える。$CH_0(S)$ で曲面 S 上の 0-サイクルの有理同値類のつくる群、$A_0(S)$ で、その中で次数が 0 のもののつくる部分群とする。1969年 Mumford [5] は $P_g(S)=\dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\Omega^2)>0$ の時、$A_0(S)$ が"無限次元"になる事を証明し余次元2以上のサイクルの群の構造が、余次元1のものとはかなり違ったものである事を示した（この結果は、基礎体の標数が正の時には、一般には成り立たない)。Roitman [7] はこの Mumford の結果を精密な形で述べ、更に、$A_0(S)$ が"有限次元"になるような S については、自然にそれが S の Albanese 多様体 $\mathrm{Alb}(S)$ に同型となる事を証明した。一方 Bloch [1] は Quillen [6] の代数的K理論を用いて、$P_g(S)=0$ なる曲面 S について $A_0(S)$ が $\mathrm{Alb}(S)$ に同型（

したがってもちろん有限次元）となる事を示唆する結果を得て、この事を予想として定式化した。その時点で、Artin, Lieberman によるEnriques曲面を含むいくつかの曲面について、この予想の成り立つ事がわかっていたが、これらの例は、Bloch, Kas, Lieberman [3] により"Sの Kodaira 次元 $\kappa(S)$ が2より小の時、$P_g(S)=0$ なる $A_0(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{alb}(S)$" と、より拡張された形で証明された。しかしそこでは曲面の分類理論が使われているため κ に関する条件をはずす事は難しいものと思われる（$\kappa(S)=2$, $P_g(S)=0$ なる曲面の分類は未だ不完全である）。また、$\kappa(S)=2$ の場合、"P_g に関係なく $A_0(S)$ が無限次元" という命題が成り立つ事も十分ありそうに思えた。そこで今迄知られている $\kappa(S)=2$, $P_g(S)=0$ を満たす曲面について $A_0(S)$ を調べる事に興味がもたれた。自己同型を利用した初等的な計算ののち筆者は次の2つのものにつき Bloch 予想が成り立つ事を確かめた。（他の例については、この報告集中の水上君の稿を見られたい。）

① $z_0^5+z_1^5+z_2^5+z_3^5=0$ を普遍被覆曲面とする Godeaux 曲面

② Campedelli 曲面 ($k(S)=2$, $P_g(S)=0$, $(K_S^2)=2$, $\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z}/(2)\oplus\mathbb{Z}/(2)$ を満たす極小曲面)

$k(S)=2$, $P_g(S)=0$ なら自動的に $q(S)=\dim H^1(S,\mathcal{O})=0$ すなわち $Alb(S)=0$ だから、予想は我々の場合、$A_0(S)=0$ である。①,②についてこれを言うため、次の簡単な補題を用いる。

(補題) X を曲面, G をその上の位数 n の自己同型群、Y を X/G の non-singular model $\pi: X\to Y$ を商有理写像とすると、2つの準同型

$$\pi_*: A_0(X)\longrightarrow A_0(Y), \quad \pi^*: A_0(Y)\longrightarrow A_0(X)$$

が有り

$$\pi^*\pi_* = \sum_{g\in G} g_*$$

$$\pi_*\pi^* = n$$

を満たす。(但し n 倍写像を単に n と書いた。)

(補題) 上と同じ状況で、$A_0(Y)=0$ と $\sum_{g\in G} g_*=0$ は同値である。

(証明) $\sum_{g\in G} g_*=0$ とせよ。任意の $x\in A_0(Y)$ に対して、$A_0(Y)$ は divisible (Bloch [2]) なので $x=n^2 z$ となる $z\in A_0(Y)$ がある。$x=n^2z=\pi_*\pi^*\pi_*\pi^*z=\pi_*(\sum_{g\in G} g_*)\pi^*z=0$.

よって $A_0(Y)=0$. 逆は前の補題より明らか。

2. 1で挙げたGodeaux曲面について $A_0(S)=0$ を証明する。$\tilde{S}$ を5次曲面 $z_0^5+z_1^5+z_2^5+z_3^5=0$, $\sigma\in \mathrm{Aut}(\tilde{S})$ を $\sigma(z_0:z_1:z_2:z_3)=(z_0:\omega z_1:\omega^2 z_2:\omega^3 z_3)$ (ω は1の原始5乗根), $S=\tilde{S}/\langle\sigma\rangle$ とおく。このGodeaux曲面 S はもちろん $\kappa(S)=2$ で $p_g(S)=0$ を満たす。$A_0(S)=0$ を証明するには、前の補題によって、

(命題) $\mathrm{End}(A_0(\tilde{S}))$ の元として $\sum_{j=0}^{4}\sigma_*^j=0$

を証明すれば良い。以下これを示す。H を $\mathrm{Aut}(\tilde{S})$ の部分群で $(z_0:z_1:z_2:z_3)\mapsto(\alpha_0 z_0:\alpha_1 z_1:\alpha_2 z_2:\alpha_3 z_3)$ (α_k は1の5乗根を動く) の形のもの全体とする。H は125個の元からなるが単位元を除く124個は次の5つの型のどれかに入る(変数の順序を無視して)。

型	$\tau=(\alpha_0:\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3)$	$\tilde{S}/\langle\tau\rangle$ の構造
I	$(1:1:1:\omega)$	有理曲面
II	$(1:1:\omega:\omega)$	有理曲面
III	$(1:\omega:\omega^2:\omega^3)$	Godeaux曲面
IV	$(1:1:\omega:\omega^{-1})$	$p_g>0$
V	$(1:1:\omega:\omega^2)$	$p_g>0$

$\tau \in H$ に対して $P(\tau)=\sum_{\alpha=0}^{4} \tau_*^{\alpha}$ とおく。すると上の表と補題から、I 又は II の型の τ に対して $P(\tau)=0$ を得る。また H の2要素 $\tau, \rho\ (\neq 1)$ について $\langle\tau\rangle \cap \langle\rho\rangle = \{1\}$ なら

$$P(\tau)\circ P(\rho) = P(\rho)+P(\tau)+P(\tau\rho)+P(\tau\rho^2)+P(\tau\rho^3)+P(\tau\rho^4)-5.$$

特に、τ か ρ が I 又は II 型なら

$$(*) \qquad P(\rho)+P(\tau)+P(\tau\rho)+P(\tau\rho^2)+P(\tau\rho^3)+P(\tau\rho^4)=5$$

となる。$P(\tau)$ に関するこれらの関係式から、III 型の τ について $P(\tau)=0$ を以下導こう。(この中に $\sum_{j=0}^{4} \sigma_*^{j}$ が入っている。) そのために III, IV, V 型の τ に対する $P(\tau)$ に次の表にしたがって名前をつける。

τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$
$(1:\omega:\omega^2:\omega^3)$	g_1	$(1:1:\omega:\omega^2)$	a_1	$(1:\omega:\omega^2:1)$	c_1	$(\omega:1:\omega^2:1)$	e_1
$(1:\omega:\omega^3:\omega^2)$	g_2	$(1:1:\omega^2:\omega)$	a_2	$(1:\omega^2:\omega:1)$	c_2	$(\omega^2:1:\omega:1)$	e_2
$(1:\omega:\omega^2:\omega^{-1})$	g_3	$(1:1:\omega:\omega^{-1})$	a_3	$(1:\omega:\omega^{-1}:1)$	c_3	$(\omega:1:\omega^{-1}:1)$	e_3
$(1:\omega:\omega^{-1}:\omega^2)$	g_4	$(1:\omega:1:\omega^2)$	b_1	$(\omega:\omega^2:1:1)$	d_1	$(\omega:1:1:\omega^2)$	f_1
$(1:\omega:\omega^{-1}:\omega^3)$	g_5	$(1:\omega^2:1:\omega)$	b_2	$(\omega^2:\omega:1:1)$	d_2	$(\omega^2:1:1:\omega)$	f_2
$(1:\omega:\omega^3:\omega^{-1})$	g_6	$(1:\omega:1:\omega^{-1})$	b_3	$(\omega:\omega^{-1}:1:1)$	d_3	$(\omega:1:1:\omega^{-1})$	f_3

$z_0 \leftrightarrow z_1$	$z_0 \leftrightarrow z_2$	$z_0 \leftrightarrow z_3$	$z_1 \leftrightarrow z_2$	$z_1 \leftrightarrow z_3$	$z_2 \leftrightarrow z_3$
$g_1 \leftrightarrow g_5$	$g_1 \leftrightarrow g_3$	$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 \leftrightarrow g_6$	$g_1 \leftrightarrow g_4$	$g_1 \leftrightarrow g_2$
$g_2 \leftrightarrow g_6$	$g_2 \leftrightarrow g_5$	$g_2 \leftrightarrow g_4$	$g_2 \leftrightarrow g_3$	$g_2 \leftrightarrow g_5$	$g_3 \leftrightarrow g_4$
$g_3 \leftrightarrow g_4$	$g_4 \leftrightarrow g_6$	$g_3 \leftrightarrow g_5$	$g_4 \leftrightarrow g_5$	$g_3 \leftrightarrow g_6$	$g_5 \leftrightarrow g_6$

この後の方の表は、以下の計算に使うもので例えば、変数 z_0 と z_1 を入れ換えた時 $g_1=(1:\omega:\omega^2:\omega^3)$ は $(\omega:1:\omega^2:\omega^3)=(1:\omega^{-1}:\omega:\omega^2)=(1:\omega':\omega'^{-1}:\omega'^3)=g_5$ に移る事を意味している。まず $\tau=(1:1:1:\omega)$, $\rho=(1:1:\omega:\omega)$ を(*)に入れて、関係式 $a_1+a_2+a_3=5$ を得る。同様に $b_1+b_2+b_3=5$, $c_1+c_2+c_3=5$, $d_1+d_2+d_3=5$, $e_1+e_2+e_3=5$, $f_1+f_2+f_3=5$ を得る。 $\tau=(1:\omega:\omega^2:1)$, $\rho=(1:1:1:\omega)$ とすると(*)は

(1) $c_1+e_3+d_2+g_1+g_3=5$, z_0とz_1ついでz_0とz_3を入れ換えて

(2) $c_3+a_2+b_2+g_2+g_3=5$, z_2とz_3を入れ換えて

(3) $f_3+b_1+d_2+g_2+g_4=5$

(*)で $\tau=(1:\omega:1:\omega^{-1})$, $\rho=(1:\omega:\omega:1)$ とおいて

(4) $b_3+e_3+g_2+g_5=5$

(5) $c_3+f_3+g_1+g_6=5$

(*)で $\tau=(1:1:\omega:\omega)$, $\rho=(1:\omega:\omega^2:1)$ とおいて

(6) $c_1+b_2+e_2+f_1+g_4=5$ (3)と(5),(1),(2)を合わせて

$$(5-g_1-g_6-c_3)+b_1+(5-e_3-c_1-g_1-g_3)+(c_3+a_2+b_2+g_2+g_3-5)+g_2+g_4=5$$

(7) $-2g_1+2g_2+g_4-g_6-c_1-e_3+a_2+b_2+b_1=0$.

(4)を(7)に加え, $b_1+b_2+b_3=5$ を使って.

(8) $\quad -2g_1+3g_2+g_4+g_5-g_6-c_1+a_2=0$

z_1 と z_3 を入れ換えて

(9) $\quad -2g_4+3g_5+g_1+g_2-g_3-a_2+c_1=0$ に (8) を加えて

(10) $\quad 5g_2+5g_5-g=0$ 但し $g=\sum_{j=1}^{6} g_j$

z_2 と z_3, z_1 と z_2 を入れ換えて

(11) $\quad 5g_1+5g_6-g=0$

(12) $\quad 5g_3+5g_4-g=0$ (10), (11), (12) より $2g=0$

$\mathrm{End}(A_0(\mathfrak{S}))$ は torsion free だから $g=0$.

(13) $\quad g_2+g_5=g_1+g_6=g_3+g_4=0$

これと (8) とから

(14) $\quad c_1=a_2+2g_2-g_1-g_3$, z_0 と z_2 並に z_1 と z_2 を換えて

(15) $\quad e_2=f_2+2g_4-g_2-g_6$, (14) (15) を (6) に代入して

(16) $\quad a_2+b_2+f_1+f_2+g_2-4g_3=5$, z_1 と z_2 を換えて

(17) $\quad b_2+a_2+f_1+f_2+g_3-4g_2=5$, (16) と (17) を較べて

$$g_2=g_3$$

$z_0, \sim z_3$ を次々と入れ換えて

$$g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=g_6$$

$g_2+g_5=0$ だから $g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=g_6=0$. これが目的の命題であり. したがって $A_0(S)$ も 0 となる。

3. 次に Campedelli 曲面 S について $A_0(S)=0$ を証明する。(定義は1の②参照) このような曲面は宮岡[4]によって調べられ、その普遍被覆曲面が $\mathbb{P}^6$ の中で a_j, b_j, c_j を或る定数として

(1) $$z_j^2 = a_j z_0^2 + b_j z_1^2 + c_j z_2^2 \qquad (3 \leqq j \leqq 6)$$

によって定義される (2, 2, 2, 2) 完全交叉型曲面を標準モデルとしてもち、もとの S はこの曲面 $\hat{S}$ を線型自己同型

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& -1 && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & -1 &&&&& \\ && -1 &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && -1 &&&& \\ &&& -1 &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& -1 & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

の生成する群で商をとって得られるものに双有理同値である事がわかっている。S' を $\hat{S}/\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$ の non-singular model とすれば、S は $S'/\langle\sigma_3\rangle$ に双有理である。$A_0(S)=0$ を証明するには、$A_0(S')$ の中で

(命題) $$\sigma_{3*} = -1$$

を示せば良い。そのために、

$$\tau_j = \begin{array}{c} \qquad j\text{番} \\ \begin{pmatrix} 1 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && -1 && \\ &&& \ddots & \\ &&&& 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{i.e.} \quad \tau_j(z_j) = -z_j \quad \text{他は不変}$$

とおく。

τ_j は S' の自己同型を導くが、$j \geqq 1$ の時 End($A_0(S')$) で $\tau_{j*} = -1$ である。(なぜなら $\bar{S}$ を $S'/\langle\tau_j\rangle$ の non-singular model とする時 $\kappa(\bar{S}) \leqq \kappa(\tilde{S}/\langle\tau_j\rangle)$ で、$\tilde{S}/\langle\tau_j\rangle$ は直接定義方程式を計算する事により $\mathbb{P}^5$ の中の (2,2,2) 完全交叉に双有理である事がわかり $\kappa(\tilde{S}/\langle\tau_j\rangle) < 2$ よって $\kappa(\bar{S}) < 2$、一方 $\hat{S}$ 上の正則2型式は

$$\frac{z_k z_0^3 \, d\left(\frac{z_1}{z_0}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{z_0}\right)}{z_3 z_4 z_5 z_6} \qquad (k=0,\cdots,6)$$

を basis にもつ事から、$\sigma_1, \sigma_2, \tau_j$ で不変なものがなく、したがって $P_g(\bar{S}) = 0$ 又 $q(\bar{S}) \leqq q(\hat{S}) = 0$ より結局 $\kappa(\bar{S}) < 2$, $P_g(\bar{S}) = 0$, $q(\bar{S}) = 0$、これと [ ] より $A_0(\bar{S}) = 0$、1 の補題を逆に使って $\tau_{j*} = -1$)

故に $(\sigma_3)_* = (\tau_3)_*(\tau_4)_*(\tau_6)_* = -1$ (End $A_0(S')$) となり命題したがって $A_0(S)=0$ が証明された。

文 献

[1] Bloch, S., K_2 of artinian Q algebras with application to algebraic cycles, Communication in Algebra, 3 (1975), 405

[2] Bloch, S., Some Elementary Theorems about Algebraic Cycles on Abelian Varieties, Inv. Math. 37 (1976), 215~228

[3] Bloch, S., A. Kas and D. Lieberman, zero cycles on surfaces with $P_g = 0$, Compositio Math. 33 (1976), 135~145

[4] Miyaoka, Y., On Numerical Campedelli Surfaces, in Complex analysis and algebraic geometry, a collection of Papers dedicated to K. Kodaira, Iwanami-Cambridge Univ. Press 1977

[5] Mumford, D., Rational equivalence of 0-cycles on surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 9 (1969), 195~204

[6] Quillen, D., Higher algebraic K-theory I, Springer lecture notes 341 (1973)

[7] Roitman, A. A., Rational equivalence of 0-dimensional cycles, Math. U.S.S.R.-Sbornik 18 (1972), 571~588