（ 続紙 1 ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	髙山 侑也
論文題目	Nahm's equations, quiver varieties and parabolic sheaves （ナーム方程式、箙多様体、及び放物的層について）		

（論文内容の要旨）

hyper-Kähler多様体とは、リーマン多様体であり、各接空間上に四元数体上の線形空間の構造が、レビ・チビタ接続に関して平行になるように入っているものをいう。特に、４次元の場合は重力場のインスタントンなどとよばれ、理論物理学的にも興味深い対象である。その重力場のインスタントンの上で、ゲージ理論のインスタントン解、すなわちベクトル束の上の接続で反自己双対方程式を満たすものを研究することは、幾何学・理論物理学にとどまらず、さまざまな数学の分野と関係する重要なテーマである。特に、R^4を含むようなALE空間とよばれる重力場のインスタントン上のインスンタントン解のモジュライ空間はquiver varietyとよばれており、表現論への応用があることが知られている。

この博士論文で取り扱っているのは、$R^3 \times S^1$という重力場のインスタントンの上のインスタントン解である。Charbonneau-Hurtubiseにより、$R^3 \times S^1$上のインスタントンは、円周S^1上で考えられたNahm方程式とよばれる常微分方程式の解と一対一に対応することが知られていた。さらに、Charbonneau-Hurtubiseは、Nahm方程式の解と$CP^1 \times CP^1$上の枠付き放物ベクトル束の間に一対一対応があることを予想し、インスタントンの階数が２のときに肯定的に解決した。一方、Finkelberg-Rybnikov, Braverman-Finkelbergは、$CP^1 \times CP^1$上の枠付き放物ベクトル束のモジュライ空間とquiver varietyの変種であるchainsaw quiver varietyとの間に同型対応を構成した。

本論文では、

1. Nahm方程式の解の全体のなすモジュライ空間とchainsaw quiver varietyとの間に同型対応を作ることにより、Charbonneau-Hurtubiseの予想を一般の階数の場合に証明した。
2. また、$CP^1 \times CP^1$上の枠付き放物ベクトル束のモジュライ空間と、chainsaw quiver varietyとの間の同型対応について、Finkelbergらとは異なる方法で、証明を与えた。

Nahm方程式の解と$CP^1 \times CP^1$上の枠付き放物ベクトル束との間を直接つなぐ代わりに、chainsaw quiver varietyを経由する、というアイデアは、様々な空間の間の関係をクリアにするとともに、Charbonneau-Hurtubiseの証明を著しく簡易化し、階数が一般の場合に拡張することを可能にしたものである。特に、円周ではなく、区間上でNahm方程式の解を考えたときに、そのモジュライ空間がhandsaw quiver varietyという、やはりquiver varietyの変種と同型になることが、CP^1から旗多様体への正則写像の全体のなすモジュライ空間を経由することにより、すでに知られていたが、この結果のより直接的な別証明を与えることになっている。このようにNahm方程式の解とquiver varietyの変種が非常に近いものであることを明らかにしたことは、本論文の大きな成果である。

また、2については、原証明が放物ベクトル束と、オービフォールド（もしくはスタック）上のベクトル束の対応を利用していたのに対し、ベクトル束の旗構造を直接に作るものであり、たとえば、旗構造の一つ一つのベクトル束を考えることができるなど、新たな応用を生む可能性を秘めている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

重力場のインスタントンの上の、ゲージ理論のインスタントン解について、R^4を含むような体積が距離の４乗の増大度で増えているALE空間の場合には、すでに多くの研究があり、数学的にも物理学的にも豊富な内容を含んでいる。

一方で、ALE空間ではない場合について、Taub-NUT空間とよばれる、体積が距離の３乗の増大度で増えている空間について、物理学者の Cherkis により Nahm 方程式と quiver の表現を組み合わせた bow variety によって記述できるという主張がなされている。この主張は確からしいと思われるが、数学的に厳密な証明は与えられていない。そのためもあってか、bow varietyに関する研究は、ほとんどなされていない現状である。一方で、最近の研究により、3次元ゲージ理論のクーロン枝とよばれる空間として、multi Taub-NUT空間上のインスタントンのモジュライ空間が現れると期待できることも分かってきており、bow varietyの重要性は高まっている。

本論文では、Taub-NUT空間の代わりに、より簡単な$R^3 \times S^1$の場合に、その上のゲージ理論のインスタントン解の研究を行った。この場合は、quiverの表現は現れずNahm 方程式のみで記述されることは、すでにCharbonneau-Hurtubiseにより数学的に厳密に示されており、よってNahm 方程式の解のモジュライ空間がbow varietyに代わる空間になる。本論文で示したことは、要旨にある二つ、1. このモジュライ空間が、chainsaw quiver varietyと同型になること、2. さらにこの同型を通じて$CP^1 \times CP^1$上の枠付き放物ベクトル束のモジュライ空間とも同じになることである。

Nahm 方程式は、常微分方程式であり、４次元空間上の非線形偏微分方程式であるインスタントン方程式よりは簡単であると思われるが、それでもそのままでは取り扱いにくい。一方、chainsaw quiver varietyは、ある二次式および開な条件を満たす行列(ただし、一つではなくたくさんの行列が必要である)の全体のなす空間を群の作用で割った商空間として定義され、技術的にずっと取り扱いやすくなった。そのおかげで、代数幾何学的な考察とも相性がよく、2の結果を示すことが可能になったものである。また、chainsaw quiver varietyは、CP^1からアファイン・リー代数に対する旗多様体への正則写像の全体のなすモジュライ空間とみなせることもよく知られており、アファイン・リー代数の表現論との関係を示唆しているという意味でも、この論文の結果は重要であると考えられる。

1のNahm 方程式の解とchainsaw quiver varietyの対応の証明においては、Nahm 方程式の定義域の区間を区切って、その区間ごとに行列を対応させることがポイントで、区間をつなげることが、群の作用で割ることに対応することを観察した。この手法は、bow varietyの場合にもそのまま適応可能であり、汎用性が高いと考えられる。

2の証明に用いられた手法も、かなりの部分はbow varietyの場合に適用可能であると期待され、特に bow varietyは、ある複素代数曲面上の枠付き放物ベクトル束のモジュライ空間と同型になっているのではないか、という自然な予想が導出され、さらなる発展が期待できる。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成27年11月16日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降