《講義ノート》 物性研究・電子版 Vol. 4, No. 4, 044209（2015年11月号）

KPZユニバーサリティクラス

東工大理　笹本智弘

概要:
平衡系の統計力学において、相転移・臨界現象は主要なテーマであり、その普遍性クラスについて概念的には基本的な理解が得られているが、非平衡系における同様な概念は確立しているとはいえない。しかし、界面成長を記述するモデル方程式である Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式を代表とする KPZ ユニバーサリティクラスに関しては、界面揺らぎの分布に対する厳密解などを用いて近年理解が急速に進展しつつある。本集中ゼミでは、KPZ 方程式とユニバーサリティクラスについて、基本から最近の進展まで紹介する。

1　界面成長とKPZ方程式

非平衡系とは, 熱平衡には無い系のことである. 非平衡系には, エネルギーや物質の流れがあり, 散逸構造といった平衡系には見られない興味深い現象が現れる. 学部で習う熱力学・統計力学は, ほとんどが熱平衡系に対するものであり, エントロピー最大の原理やギブス分布を中心とする理論が存在するが, 非平衡系に対してはそのような一般的原理は見出されておらず, そのようなものを発見・確立することは, 熱力学・統計力学における最重要課題の一つである.

平衡系においては, 系の時間発展を記述するハミルトニアンがミクロの分布を決定している（ギブス分布）. 一方, 非平衡系においてはそのような事実は無いため, 定常状態 (非平衡定常状態）を求めるには時間発展に対して不変な状態を求める必要があるが, これは一般に難しい問題である. 系の時間発展としてはハミルトニアンを用いるのが一番自然と思われるが, 多くのハミルトン系はカオス的な振る舞い（初期条件における微小な差が時間の経過とともに増大する）を示すため, 系の長時間の振る舞いの性質, 特に時間無限大で実現する非平衡定常状態を知る事は困難である, とも言える.

例として, 次のハミルトニアンで記述される 1 次元非線形格子を考えよう:

$$H = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2} + V(x_j - x_{j-1}) \right), \quad V(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha\frac{x^3}{3} + \beta\frac{x^4}{4} \tag{1.1}$$

$\alpha = \beta = 0$ の場合は線形のばねでつながれた連成振動であり, 系の運動が単振動する基準振動の重ね合わせの形に表す事ができることはよく知られている通りである. このことは, 線形格子はどんなに時間が経っても熱平衡状態には収束しないことを意味する. 問題は, α や β が 0 ではない場合, この非線形性が系の長時間の

振る舞いにどのような影響を与えるかである. まず, 系は熱平衡状態に収束するのであろうか. 1955 年, Fermi, Pasta, Ulam は, MANIAC(世界最初のコンピュータの一つ）を用いてこの系の数値シミュレーションを行い, このことを確認しようとしたが, 彼らが見出したのは, 熱平衡への収束ではなく, 初期状態への回帰現象とも言えるものであった [1]. その後も多くの理論的考察, 数値計算が行われているが, 系の非線形性と数値計算の誤差の問題から, この FPU 系の性質には今でも未解決の点が多くある. しかし FPU の数値計算結果はその後非線形非平衡系の研究に多くの影響を与えた. 例えば, ソリトン（孤立波）を解として持つ事を特徴とする KdV 方程式を始めとする非線形波動の研究が進展した. また (1.1) のような格子系では, 指数関数型の相互作用 ($V(x) = e^{-x} + x - 1$) を持つ格子 (戸田格子）が同様な性質を持つことが示された.

系のダイナミクスを記述するのに, より現象論的に確率的時間発展を用いる事もできる. 例えば Ising モデルに対して, 確率的なダイナミクスを導入した kinetic Ising モデルを考える事ができる. 詳細釣り合いの原理が成り立つ場合は, 定常状態が Ising モデルのハミルトニアンに対するギブス分布となることを確認できる. 外場がかかった場合, 詳細釣り合いが成り立たなくなり, 有限のカレントが現れる. これで温度が無限大の極限を考えると, 体積排除の相互作用の下で非対称なランダムウォークをする多粒子確率過程モデルとなっている. これを非対称単純排他過程 (asymmetric simple exclusion process, ASEP) という.

本講義で扱う Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式は, 界面の成長を記述するモデル方程式として導入されたものである. 界面の成長には, 紙の燃焼, バクテリアコロニーの成長, 結晶成長等様々な例がある [2, 3]. そのダイナミクスを記述するのにも, 確率的な時間発展を採用することが出来る. 例えばがん細胞の増殖を記述するために導入された Eden モデルにおいては, 2 次元格子において, 最初原点のみがん細胞に占有されている状態から始め, 占有されている点に隣接している, まだ占有されていない格子点がランダムに占有されていくようなダイナミクスを考える. また, ballistic deposition モデルと呼ばれるモデルでは, 最初完全に平坦な状況から始め, ランダムな位置に粒子が上から降ってくるが, 既に占有されている点の隣まで来るとその場にとどまる. 同様な確率的界面成長モデルは色々考える事ができるが, 界面成長の振る舞いに関して多くのモデルで共通の性質が見出される. まず, これらのモデルにおいては, 平均的な界面の形の成長は比較的単純である. Eden モデルではほぼ円形, ballistic deposition の場合はぼぼ平坦な界面が一定の平均速度で進行する. 特徴的なのは, 平均的な界面の形のまわりの揺らぎが, 時間の経過とともに生成されることである (kinetic roughening と呼ばれている). 我々はこの界面の揺らぎに興味がある. もし界面の成長が各場所においてほぼ独立に起こっていると仮定すると, 中心極限定理が効いてきて, 界面ゆらぎの大きさは長時間経った際 $O(t^{1/2})$ のようにスケールすると考えられるが, Eden モデル, ballistic deposition を始め多くの同様なモデルで見られる揺らぎのスケールは, $O(t^{1/3})$ である.

このように, 系の揺らぎの性質にベキ的振る舞いが現れ, その指数が多くのモデ

ルで共通であるというのは, 平衡系に対する臨界現象を想起させる. もちろん 界面成長は非平衡系であり, 平衡系の場合のように自由エネルギーを中心とした理論を適用することは出来ない. しかし, 界面成長においても界面ゆらぎや相関関数はスケーリングの性質を示し, ある種の臨界的な振る舞いを示していると考えられる. それゆえ界面成長の問題は, 非平衡系における臨界現象, 普遍性を検討する格好の題材となっている.

2　KPZ方程式

2.1　方程式

KPZ方程式は界面成長における代表的なモデル方程式である [2, 3]. $h(x,t)$ は時刻 t, 位置 x における界面の高さを表すとする. 以下1次元の場合のみ扱うがその場合, KPZ 方程式は

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \nu\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + \eta(x,t) \tag{2.2}$$

と書かれる. ここで $\eta(x,t)$ は Gaussian ホワイトノイズであり, 平均は0で共分散は

$$\langle \eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = D\delta(x-x')\delta(t-t') \tag{2.3}$$

と与えられる. ここで $\langle\cdots\rangle$ はランダムネス η に関する平均を表す. パラメータ λ, ν, D は右辺各項の強さを表しているが, 簡単なスケーリングによって $\nu = 1/2, \lambda = D = 1$ ととることが出来る. 以下では次の形で考える.

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} + \eta(x,t). \tag{2.4}$$

ノイズの共分散は

$$\langle \eta(x,t)\eta(x',t')\rangle = \delta(x-x')\delta(t-t'). \tag{2.5}$$

2.2　"導出"

ここではKPZ方程式が界面成長を記述する方程式としてどのように現れるか説明する. $h(x,t)$ は時刻 t, 位置 x での界面の高さを表すとし, ballistic deposition のような界面成長を, h に関する何らかの偏微分方程式を用いて記述したいとしよう. まず, 界面は基本的には滑らかになろうとする機構をもつものと考えると, 最も簡単なのは拡散方程式である:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}. \tag{2.6}$$

ただしこれでは界面の揺らぎが入っていない. 揺らぎを考慮する簡単な方法の一つは, ノイズ項を加える事である. すると方程式は

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}+\eta(x,t) \tag{2.7}$$

となる. ここでノイズ η は平均 0, 共分散 (2.5) のガウシアンノイズである. これは Edwards-Wilkinson(EW) 方程式として知られる方程式である. EW 方程式は, 線形であるためフーリエ解析で解くことが出来るが, その揺らぎはガウシアンとなるため, 我々の目的には不十分である.

次にどのような効果を取り入れるかが問題となるが, KPZ が考えたのは, 界面はその形に応じて法線方向に成長していると考えられるのに, 界面高さ h は空間方向と直交する h 軸の方向で測っているため, その幾何学的効果が効いてくるはずだということである. 界面の傾き $\partial_x h$ が小さいとき, その効果は $\sqrt{1+(\partial_x h)^2}\simeq 1+\frac{1}{2}(\partial_x h)^2$ という形をとると考えられるが, この第二項目がまさに KPZ 方程式に現れる非線形項である. 第一項の定数は h をシフトすることで取り除くことが出来るので, このように考えると KPZ 方程式が得られることになる.

3 KPZ 方程式の Well-defineness

3.1 Cole-Hopf 変換

h そのものの代わりに, その Cole-Hopf 変換

$$Z(x,t)=\exp\left(h(x,t)\right) \tag{3.8}$$

に対する方程式を書き下すと, (形式的には)

$$\frac{\partial}{\partial t}Z(x,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}+\eta(x,t)Z(x,t) \tag{3.9}$$

という式が得られる. これは Z に関して線形の方程式なので, これで問題は解けたと思うかもしれないが, ノイズ η が乗法的に Z にかかっており, 話はそれほど簡単ではない.

(3.9) は虚時間の一体問題のシュレディンガー方程式の形をしているため, 方向性のあるポリマーの問題と見なす事ができる. ただしポテンシャル η は KPZ 方程式のノイズ項から来ているため, ランダムポテンシャル中のポリマーの問題ということになる. ポリマーの文脈では, $Z(x,0)=\delta(x)$ で記述される, 原点から出発する初期条件は自然なものである. KPZ 方程式に対しては, Cole-Hopf 変換を逆に用いて得られる初期条件 $h(x,0)=\log Z(x,0)=\log\delta(x)$ は特異的であるが, $Z(x,0)=\lim_\delta c_\delta e^{-|x|/\delta}$ と書く事により, 狭い wedge 型初期条件 $h(x,0)=-\lim_{\delta\to 0}|x|/\delta$ を表していると考える事が出来る.

3.2 ”KPZ 方程式は well-defined ではない”

普通”KPZ 方程式”という場合, (2.4) に書かれている方程式のことを指す. しかし (2.4) は, well-defined ではない. この方程式は, 発散の問題を内包しており, そのままでは数学的に正確な意味をつけることは出来ないのである. もちろん方程式 (2.4) に対する解析から得られた結果には何らかの真実が含まれていると考えられるが, 問題はその意味づけをどう考えるかである.

このような問題を考える場合, (2.4) のようにノイズが入った Langevin 型の方程式より, 確率微分方程式で考えた方が分かりやすい. 時間のみに依存する白色ノイズ $\eta(t)$ がある場合, 形式的にそれはブラウン運動の”微分” $dB(t)/dt = \eta(t)$ に対応していると考えることができる (ただしブラウン運動のサンプルパスは確率 1 で至る所微分不可能であることが知られていることに注意). その一般化として, 時空ホワイトノイズ $\eta(x,t)$ は, 形式的に, $dB(x,t)dB(x',t) = \delta(x-x')dt$ を満たす筒状ブラウン運動 $B(x,t)$ の時間微分 $\eta(x,t) = \partial B(x,t)/\partial t$ と考えることができる.

すると Z に対する方程式 (3.9) は

$$dZ(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}dt + Z(x,t) \times dB(x,t) \tag{3.10}$$

のように書き直すことが出来る. ここで問題となるのは $\times$ の意味である. よく知られているように, 確率積分には, Ito 型と Stratonovich 型がある. 2 つの大きな違いは, ブラウン運動の関数を考える際, Ito 型では有名な Ito の公式により補正項が現れるが, Stratonovich 型ではそのような項が現れず, 通常の合成関数の微分の公式が使えることである.

KPZ 方程式から (3.9) を導く際”形式的に ”と書いたのは, 式の変形に際して $h(x,t)$ や $Z(x,t)$ を通常の関数と見なし, 通常の合成関数の微分の公式を用いたという意味である. その意味では, (3.10) における $Z(x,t) \times dB(x,t)$ は Stratonovich 型 $Z(x,t) \circ dB(x,t)$ と解釈するのが自然である. 変換公式で Ito 型に移ると, $Z(x,t) \circ dB(x,t) = Z(x,t)dB(x,t) + \frac{1}{2}dZ(x,t)dB(x,t)$, となるが, ここで dZ に (3.10) を用いると引数が同じ $dB(x,t)$ の積が現れ, その共分散から $\delta(0)$ が現れることになる. これはもちろん定義されないものである. KPZ 方程式を書き換えていった式に定義されない無限大が含まれているから, KPZ 方程式そのものも well-defined ではない, ということになる.

一方で, KPZ 方程式が well-defined ではない”度合い”はそれほど悪く無いとも言える. つまり KPZ 方程式には無限大が含まれるといっても, それは $\delta(0)$ という一つの無限大だけであるから, 適当な”くりこみ ”を行って発散を取り除いたものがむしろ物理的に意味がある方程式である, と考える事も出来そうである. KPZ 方程式の場合, SHE で最初から Ito 解釈をとった方程式

$$dZ(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z(x,t)}{\partial x^2}dt + Z(x,t)dB(x,t) \tag{3.11}$$

は well-defined であることが知られている．この方程式の解 Z に対して, Cole-Hopf 変換の逆を行った $h = \log Z$ としたものを KPZ 方程式の解と考えることができる．これを KPZ 方程式の Cole-Hopf 解という [4].

$\delta(0)$ は, 時空ノイズの共分散に $\delta(x-x')$ が含まれることから現れた．この部分を"丸める" ことにより, 発散の度合いをより具体的に検討することも出来る [5]. また, Hairer は, Cole-Hopf 変換を使わずに KPZ 方程式の意味をつけることに成功した [6]. さらに最近になって Kupiainen が繰り込みを用いた正当化も可能であると述べている [7].

4 KPZ 方程式の厳密解

以上で意味付けのはっきりした 1 次元 KPZ 方程式において, 初期条件が $Z(x,0) = \delta(x)$ (KPZ に対しては狭い wedge 型) の場合に, 次のような公式が得られた [22, 9]:

$$\langle e^{-e^{h(x,t)+\frac{x^2}{2t}+\frac{t}{24}-\gamma_t s}}\rangle = \det(1-K_{s,t})_{L^2(\mathbb{R}_+)} \tag{4.12}$$

ただし $\gamma_t = (t/2)^{1/3}$ であり, s はパラメタである．右辺の"det" は Fredholm 行列式と呼ばれるものである．空間 X 上に作用する積分作用素 K があり, その積分核を $K(x,y)$ とすると, Fredholm 行列式は

$$\det(1-K)_{L^2(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_X dx_1 \cdots \int_X dx_n \det(K(x_i,k_j))_{i,j=1}^n \tag{4.13}$$

のように定義される．ただし右辺に現れた det は $n \times n$ 行列に対する通常の行列式を表す．(4.12) においては, 積分核 $K_{s,t}$ は次で与えられる．

$$K_{s,t}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{Ai}(x+\lambda)\mathrm{Ai}(y+\lambda)}{e^{\gamma_t(s-\lambda)}+1} \tag{4.14}$$

ただし Ai は Airy 関数である．

公式 (4.12) は, 高さ分布に対する次の公式と同等である．

$$\mathbb{P}\left[\frac{h(x,t)+\frac{x^2}{2t}+\frac{t}{24}}{(t/2)^{1/3}} \le s\right] = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{e}^{\gamma_t(s-u)}\right] \times \left(\det(1-P_u(B_t-P_{\mathrm{Ai}})P_u)_{L^2(\mathbb{R})} - \det(1-P_uB_tP_u)\right)_{L^2(\mathbb{R})}\mathrm{d}u \tag{4.15}$$

ただし $P_{\mathrm{Ai}}(x,y) = \mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}(y)$, P_u は $[u,\infty)$ への射影, 積分核 B_t は次で与えられる:

$$B_t(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{Ai}(x+\lambda)\mathrm{Ai}(y+\lambda)}{e^{\gamma_t\lambda}-1}. \tag{4.16}$$

これは有限の t に対する公式であり, これを用いて長時間の極限を考える事は難しくない. 結果は

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{h(x,t)+\frac{x^2}{2t}+\frac{t}{24}}{(t/2)^{1/3}}\le s\right]=F_2(s) \tag{4.17}$$

となる. ただし $F_2(s)$ は GUE Tracy-Widom 分布と呼ばれるものであり, 最初ガウシアン・ユニタリ・アンサンブル (Gaussian unitary ensemble,GUE) と呼ばれるランダム行列の最大固有値の分布として現れた [10].

GUE はエルミート行列のアンサンブルであり, その測度は $P(H)dH \propto e^{-\mathrm{Tr}H^2}dH$ の形に与えられる. ただしここで H は $N\times N$ のエルミート行列, dH は全ての独立成分 (i.e., $H_{ii}, 1\le i\le N, \Re H_{ij}, \Im H_{ij}, 1\le i<j\le N$) に関する Lebesgue 測度である. GUE ランダム行列 H の N 個の固有値を $x_i, 1\le i\le N$ で表そう. 同時固有値分布は, 次のように書き下せる.

$$\frac{1}{Z}\Delta(x)^2\prod_i e^{-x_i^2} \tag{4.18}$$

ここで $\Delta(x)=\prod_{1\le j<\le k\le N}(x_k-x_j)$ は Vandelmonde 行列式である. 最大固有値を $x_{\max}$ と表す事にすると, その分布で行列サイズ無限大で現れるのが GUE Tracy-Widom 分布である:

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[\frac{x_{\max}-\sqrt{2N}}{2^{-1/2}N^{-1/6}}\le s\right]=F_2(s)=\det(1-P_sK_2P_s)_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.19}$$

ただし P_s は $[s,\infty)$ への射影, K_2 は Airy 核である:

$$K_2(x,y)=\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \mathrm{Ai}(x+\lambda)\mathrm{Ai}(y+\lambda).$$

GUE はエルミート行列のアンサンブルであったが, 実対称行列に対する類似のアンサンブルとして, ガウシアン・直交・アンサンブル (Gaussian orthogonal ensemble, GOE) と呼ばれるものもある. GOE に対しても最大固有値の性質を調べる事が可能であり, 行列サイズ無限大の極限で現れる分布は GOE Tracy-Widom 分布 (F_1 と表す) と呼ばれる [11].

方程式 (4.17) は, 狭い wedge 型初期条件からスタートした KPZ 方程式で記述される界面の高さ分布が長時間の極限では GUE ランダム行列の最大固有値の分布と同じになるということを示している.

5 レプリカ法

レプリカ法は, ランダム系を調べる際に有用な方法である [12, 13]. ランダムネス η を持つハミルトニアン H で記述される系を考えよう. ハミルトニアンがラン

ダムであるから, 分配関数 $Z=\sum e^{-\beta H}$ も η に依存しランダムとなる. このような系に対する熱力学量を計算するには, 平均自由エネルギー $\langle \log Z\rangle$ を計算する必要があるが, これは多くの場合難しい問題である. いくつかの問題においては, $\langle Z^n\rangle$ という量の方が考えやすい. これは同じランダムネス η を持つ n 個のレプリカ系に対する分配関数と考える事ができ, レプリカ分配関数とも呼ばれる. 一旦 $\langle Z^n\rangle$ がわかると, 平均自由エネルギーを

$$\langle \log Z\rangle = \lim_{n\to 0}\frac{\langle Z^n\rangle - 1}{n} \tag{5.20}$$

という公式を用いて計算することが出来る可能性がある. これは $\langle Z^n\rangle = \langle e^{n\log Z}\rangle$ に注意し, n が小さいと思って展開すれば得られる式であるが, ここで問題は, 多くの場合, レプリカ分配関数が計算できるのは 非負整数 $n=0,1,2,\cdots$ に対してのみ, ということである. 上記公式を適用するためには n に関する解析接続を行う必要があるが, これは正当化されない場合も多い [13]. それにも関わらずレプリカ法による解析は多くの場合有益な情報を与え, ランダム系を扱う際の標準的な手法のひとつとなっている.

KPZ 方程式に対しては, レプリカ法をランダム媒質中のポリマーに適用することが出来る. この場合 Z は SHE (3.9) の解を表す. Z の対数はちょうど KPZ の高さ h に対応している事に注意. ただし, KPZ 方程式においては, 我々は h の平均のみではほく, その分布関数にまで興味があるので, (5.20) を適用する訳ではない.

SHE は一体の Schrödingier 方程式であるから, Feynmann-Kac の公式を用いて次のように表すことができる

$$Z(x,t)=\mathbb{E}_x\left(e^{\int_0^t \eta(b(s),t-s)ds}Z(b(t),0)\right). \tag{5.21}$$

ただしここで $\mathbb{E}_x$ は位置 x を出発点としたブラウン運動に関する平均を表す. この表式を用いてレプリカ分配関数 $\langle Z^N\rangle$ を考える. ノイズ η はガウシアンであることを用いると, ノイズ η に関する平均を先に実行することが出来る. その結果, レプリカ分配関数は (狭い wedge 型初期条件の場合) 次のように表すことができる:

$$\langle Z^N(x,t)\rangle = \langle x|e^{-H_N t}|0\rangle. \tag{5.22}$$

ただしここで H_N は引力的 δ-Bose 気体のハミルトニアン

$$H_N=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}-\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}^{N}\delta(x_j-x_k) \tag{5.23}$$

である. また $|x\rangle$ は N 個の粒子が全て x にいるような状態を表す [14].

(4.12) の左辺を展開すると,

$$\langle e^{-e^{h(x,t)+\frac{x^2}{2t}+\frac{t}{24}-\gamma_t s}}\rangle = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{\left(-e^{-\gamma_t s}\right)^N}{N!}\left\langle Z^N(x,t)\right\rangle e^{N\frac{\gamma_t^3}{12}} \tag{5.24}$$

となる. δ-Bose gas が可積分系の一種であることを用いると, $\langle Z^N\rangle$ に対する積分表示を得る事が出来るが, ここで KPZ 方程式に対するレプリカ法における困難が現れる. 積分表示を用いると $\langle Z^N\rangle$ は N が大きいとき e^{N^3} のように振る舞い, 母関数は収束しないのである. ただし, 現れる関数に対して適当な解析接続を採用すると発散の問題は解消し, 計算を進めると正しい Fredholm 行列式が得られる [15, 16]. このままではこの計算は正当化されないが, 発散の問題の無い離散モデルで同様な計算を行うことが出来る.

KPZ 方程式に対するレプリカ法は強力であり, 例えば平坦初期条件の下での高さ分布に対する解析も行われている [17, 18]. この場合, 長時間極限では GOE Tracy-Widom 分布が得られる.

6 定常 2 点相関関数

統計力学において, 2 点相関関数は基本的な物理量である. 例えば平衡系に対する臨界現象の理論においては, 同時刻の平衡 2 点相関は重要な役割を果たしている. その一般化である異時刻の 2 点相関は, 散乱実験で観測することもでき, やはり重要な物理量であるが, 理論的には計算が困難な場合が多い. これは平衡状態の性質に関して厳密解が得られているような系に対してもそうである.

非平衡系において対応する量は, 定常状態における時空 2 点相関関数であり, こちらも一般に計算が困難であるが, KPZ 方程式に対しては時空 2 点相関も厳密に計算された. 当初は上述のレプリカ法の一般化として結果が得られた [19, 20] が, 最近になってレプリカ法を用いない方法で再導出されている [21].

KPZ 方程式に対しては, (両側）ブラウン運動が定常状態となっており, これを初期条件とする場合を考える:

$$h(x,0) = B(x). \tag{6.25}$$

定常状態における 2 点相関関数は以下の形に書く事が出来る:

$$\langle \partial_x h(x,t) \partial_x h(0,0)\rangle = \frac{1}{2}(2t)^{-2/3} g_t''(x/(2t)^{2/3}). \tag{6.26}$$

関数 g_t の表式はかなり複雑となるため具体的な表式はここでは書かないが, 基本的には狭い wedge 型初期条件に対する高さ分布に対する公式を一般化したものといえる.

7 離散モデル

7.1 Asymmetric simple exclusion process(ASEP)

1 節で登場した ASEP は, 簡単なマッピングで界面成長のモデルと見なすこともでき, single step モデルなどと呼ばれる. このモデルにおいて適当な弱非対称性極限を

取ることにより, KPZ 方程式を得る事が出来る事が知られている [4]. ここで弱非対称性極限というのは, 小さいパラメター ϵ を用意して空間と時間を $j=x/\epsilon, t=\tau/\epsilon^2$ のように拡散的なスケーリングを行うと同時に, 非対称性を $q-p=\sqrt{\epsilon}$ と特定の仕方で小さくする極限のことである. 上では KPZ 方程式に対する厳密解をレプリカ法を用いて導出する方法について説明したが, ASEP に対する結果から導出することも出来る [8, 22, 23, 9]. そして ASEP に対しては上記のようなレプリカに関する困難は生じないというメリットがある.

7.2 q-TASEP と q-boson TAZRP

近年の KPZ 系に関する進展において重要な役割を果たしているもう一つの離散モデルは, q-TASEP である. これは TASEP(ASEP で粒子が一方向にのみ進む場合）の一般化であり, 通常の TASEP において粒子は常に rate 1 で右となりにホップを行うが, q-TASEP においては隣サイトへのホップの rate は前の粒子までの間隔に依存しているとする. j 番目の粒子の位置を x_j とするとき, j 番目の粒子がホップする rate は $1-q^{x_{j-1}-x_j-1}$ である. q-TASEP に対してもレプリカ法を一般化した手法を適用することにより, カレントの分布に関する性質を詳しく調べることが出来る. また, q-TASEP において, 粒子間距離 $y_i=x_{i-1}-x_i-1$ のダイナミクスに着目すると, q 変形されたボソンと関係するゼロレンジ過程と呼ばれる別の確率過程模型が得られる点も興味深い.

8 可積分系との関係

KPZ 方程式に対する厳密解が得られた際に生じた自然な疑問のひとつは, その背後にある, モデルが可解となる数学的な仕組みである. 基本的な答えは, 量子可積分系と関連していることであり, レプリカ法を用いると δ-Bose 気体が現れたり, ASEP が XXZ スピン鎖と関係していることが知られていることから理解が出来るが, その後他の量子可積分系との関連も見出されている.

8.1 ポリマーと量子戸田格子

O'Connell と Yor は, 空間が離散で時間が連続であるような有限温度のポリマーを導入した [24]. そのエネルギーは

$$E=-\sum_{i=1}^{N}(B_i(t_i)-B_i(t_{i-1}) \tag{8.27}$$

で与えられる．ただし $B_i(t), 1 \leq i \leq N$ は独立なブラウン運動．分配関数は

$$Z_t^N(\beta) = \int_{0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t} dt_1 \cdots dt_{N-1} \exp \beta \left(\sum_{i=1}^{N} (B_i(t_i) - B_i(t_{i-1}) \right) \tag{8.28}$$

と書ける．適当な連続極限をとると, KPZ 方程式に対応するポリマーの問題となる．

O'Connell は, このポリマーの分配関数の時間発展が, 量子戸田格子と関係している事を見いだした [25]．量子戸田格子のハミルトニアンは

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N-1} e^{x_i - x_{i-1}}. \tag{8.29}$$

で与えられる．

8.2 Macdonald 過程

Borodin, Corwin は, KPZ 方程式の可解性の背後に

$$\frac{1}{Z} P_\lambda(a) Q_\lambda(b) \tag{8.30}$$

という形に書かれる Macdonald 測度と呼ばれるものがあることを見いだした [26]．ここで P, Q は Macdonald 多項式 という多変数直交多項式である．Macdonald 多項式 $P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t)$ は，２つのパラメータ (q, t) に依存し, 分割 λ でラベル付けされる, 変数 x に関する多項式であるが, (8.30) においては, a, b はパラメータで, 分割 λ に対する確率を表す．

さらにこの測度に関係した, 分割 λ の確率的時間発展を導入することが出来るが, $t = 0$ の場合に λ_1 の運動を見ると, これが q-TASEP の粒子の運動と等価となっている．また適当なスケーリング極限をとると, λ の時間発展は上で見た量子戸田格子と関係したものとなる．

8.3 q-TASEP の一般化

その後さらに, q-TASEP の一般化がいくつか見出されている．粒子の移動確率が良い性質を持った直交多項式に付随する測度と関連しているが, Macdonald 過程との関連などはまだ分かっていない [27, 28]．

9 普遍性

KPZ 方程式は, 界面成長に現れる普遍性を示すシンプルなモデル方程式として導入されたものであった．当初は揺らぎや相関関数のスケーリング則特にその指数

に興味が集中していたが, その後の進展により 1 次元 KPZ 方程式に対しては高さの分布関数まで決定され, その長時間極限が Tracy-Widom 分布であると同定された. これらは, スケーリング関数そのものである. これらの量は可解なモデルの解析を通じで得られたのであるが, KPZ 系の普遍性を仮定すると, Tracy-Widom 分布や相関関数は可解性とは関係なく, KPZ 普遍性クラスに属する全ての物理系で見いだされると考えられる.

9.1 実験における普遍性

実験での KPZ 普遍性の検証は, 長い間臨界指数の確認に止まっていたが, 竹内・佐野は, 液晶乱流の 2 状態を用いる事で, 界面高さが Tracy-Widom 分布で記述される事を明瞭に示した [29, 30, 31].

9.2 Hamiltonian dynamics

KPZ 普遍性は, 元々界面成長における普遍性を表すものとして導入された. 同じ普遍性が ASEP のような伝導モデルにおいても見いだされるが, これは伝導モデルにおける粒子が界面の傾きに相当していると考えることで理解できる. ASEP のような伝導系においては, 粒子の個数が保存され, これが唯一の保存量である.

2012 年に, van Beijeren は広いクラスの 1 次元流体において, KPZ 系の普遍 2 点相関関数が見いだされる可能性があることを指摘した [32]. Spohn はより一般に 1 次元の多成分系において同様な現象が見いだされる事を整理して示した [33].

特に, 1 次元のハミルトニアン系においても同様な事が期待される. 例えば, 1 節で見た Fermi-Pasta-Ulam 系においても KPZ 2 点相関が見いだされると期待される. この場合, 粒子数 (より正確には粒子間距離）, 運動量, エネルギーと 3 つの保存量がある. これらは, 2 つの音波モードと 1 つの熱モードに変換され, 音波モードは $\pm c$ の速さで移動し, 熱モードは速さ 0 で移動しない. 音波モードの相関関数に KPZ 2 点相関が現れ, 熱モードには Levy 分布が現れると期待される. 実際これまでに多くのシミュレーションが行われ, 予想が確認されている.

10 まとめ

KPZ 方程式は, 元々界面成長における普遍性を理解するために導入された非線形確率微分方程式の形に書かれたモデル方程式である. その 1 次元版に対しては, 高さの分布関数や時空 2 点相関関数が厳密に計算され, その後種々の一般化が行われたり, 可解性に関する理解が深まっている. またその普遍性については, これまで考えられていた以上に適用範囲の広いものであることは明らかになりつつある.

本ゼミでは 1 次元 KPZ 系のみ扱った．高次元における KPZ 系はさらに興味深い面がある反面, 理論的には色々難しい点があるが, 1 次元系で得られた知見がその理解にも役立ちつつある． 例えば, Halpin-Healy は 2 次元において詳細な数値計算を行い, 分布関数が普遍的であることや, 初期条件に依存するという事実自体は 1 次元系に限らず高次元系においても成り立つことを確認した．もちろんそこに現れる分布は Tracy-Widom 分布とは違い, 現時点でどのような分布が現れるかを理論的に理解することはできていない．

参考文献

[1] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of Nonlinear Problems, Los Alamos Report LA-1940, 1955.

[2] M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56:889–892, 1986.

[3] A.L. Barabási and H.E. Stanley. *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge University Press, 1995.

[4] L. Bertini and G. Giacomin. Stochastic Burgers and KPZ Equations from Particle Systems. *Comm. Math. Phys*, 183:571–607, 1997.

[5] T. Imamura and T. Sasamoto. Replica approach to the KPZ equation with half Brownian motion initial condition. *J.Phys. A*, 44:385001, 2011.

[6] M. Hairer. Solving the KPZ equation. *Ann. Math.*, 178: 559–664, 2012.

[7] A. Kupiainen. Renormalization Group and Stochastic PDE's, arXiv: 1410.3094

[8] T. Sasamoto and H. Spohn. Universality of the one-dimensional KPZ equation. *Phys. Rev. Lett.*, 834:523–542, 2010.

[9] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel. Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1+1$ dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 64:466–537, 2011.

[10] C. A. Tracy and H. Widom. Level-spacing distributions and the Airy kernel. *Comm. Math. Phys.*, 159:151–174, 1994.

[11] C. A. Tracy and H. Widom. On orthogonal and symplectic matrix ensembles. *Comm. Math. Phys.*, 177:727–754, 1996.

[12] H. Nishimori. *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*. Oxford, 2001.

[13] T. Tanaka. Moment Problem in Replica Method. *Int. Info. Sci.*, 13:17–23, 2007.

[14] M. Kardar. Repica Bethe ansatz studies of two-dimensional interfaces with quenched random impurities. *Nucl. Phys. B.*, 290:582–602, 1987.

[15] V. Dotsenko. Bethe ansatz derivation of the Tracy-Widom distribution for one-dimensional directed polymers. *Euro. Phys. Lett.*, 90:200003, 2010.

[16] P. Calabrese, P. Le Doussal, A. Rosso. Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature. *Euro. Phys. Lett.*, 90:200002, 2010.

[17] P. Calabrese, P. Le Doussal. An exact solution for the KPZ equation with flat initial conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 106:250603, 2011.

[18] P. Calabrese, P. Le Doussal. The KPZ equation with flat initial condition and the directed polymer with one free end. *J. Stat. Mech.*, page P06001, 2012.

[19] T. Imamura and T. Sasamoto. Exact solution for the stationary KPZ equation. *Phys. Rev. Lett.*, 108:190603, 2012.

[20] T. Imamura and T. Sasamoto. Stationary correlations for the 1D KPZ equation . *J. Stat. Phys.*, 150:908–939, 2013.

[21] A. Borodin, I. Corwin, P. Ferrari, V. Veto, Height fluctuations for the stationary KPZ equation, arXiv: 1407.6977.

[22] T. Sasamoto and H. Spohn. The crossover regime for the weakly asymmetric simple exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 140:209–231, 2010.

[23] T. Sasamoto and H. Spohn. Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition. *Nucl. Phys. B*, 834:523–542, 2010.

[24] N. O'Connell and M. Yor, Brownian analogues of Burke's theorem, *Stochastic Process. Appl.* 96: 285–304, 2001.

[25] N. O'Connell. Directed polymers and the quantum Toda lattice. *Ann. Prob.*, 40:437–458, 2012.

[26] A. Borodin, I. Corwin, Macdonald processes. *Prob. Th. Rel. Fields*, 158: 225–400, 2014.

[27] A. Borodin, I. Corwin, L. Petrov, T. Sasamoto Spectral theory for interacting particle systems solvable by coordinate Bethe ansatz, arXiv: 1407.8534.

[28] I. Corwin, L. Petrov, Stochastic higher spin vertex models on the line, arXiv:1502.07374 .

[29] K.A. Takeuchi, M. Sano. Growing Interfaces of Liquid Crystal Turbulence: Universal Scaling and Fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, 104:230601, 2010.

[30] K.A. Takeuchi, M. Sano. Evidence for geometry-dependent universal fluctuations of the Kardar-Parisi-Zhang interfaces in liquid-crystal turbulence. *J. Stat. Phys.*, 147:853–890, 2010.

[31] K. A. Takeuch, M. Sano, T. Sasamoto and H. Spohn. Growing interfaces uncover universal fluctuations behind scale invariance. *Sci. Pep.*, 1:34, 2011.

[32] H. van Beijeren. Exact results for anomalous transport in one-dimensional Hamilto- nian systems. *Phys. Rev. Lett.*, 108:180601, 2012.

[33] H. Spohn. Nonlinear Fluctuating Hydrodynamics for Anharmonic Chains. *J. Stat. Phys.*, 154: 1191–1227, 2014.