RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B41 (2013), 161–171

Dressing 作用による可積分系の差分化について
Discretization of integrable systems via dressing actions

By

弘前大学 理工学研究科 小林 真平
Shimpei Kobayashi, Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University *

Abstract

We give a method of constructing discrete integrable systems via dressing actions of the extended frames of vacuum solutions. In particular, a new discrete Lax pair for the lattice mKdv equation will be propsed.

§1. はじめに

可積分系の差分化は，理論，応用双方にとって重要である．一方，可積分系は，幾何学においても自然な研究対象として 19 世紀から研究されて来た（例えば [1] を参照）．ここでは，幾何学への応用を念頭においた差分化を考える．

構造方程式が可積分系で表される曲面（曲線）には，定曲率曲面や平均曲率一定曲面等様々存在する．これらの曲面の性質を調べるには，構造方程式を見るだけでは不十分であり，曲面の接ベクトルと法ベクトルが定める動標構を調べる必要がある：

1. 動標構は可積分系の方程式を実現する際に現れる Lax 対と深い関係がある (しばしば一致する).
2. 曲面（曲線）を表現する微分公式 (いわゆる Sym の公式) や射影は，動標構に対して定義される．

Received October 27, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 37K10, 53A05.
Key Words: *Key Words*: Discrete integrable systems; moving frames; curves and surfaces.
Supported by Kakenhi 23740042.
*〒 036-8561 弘前市文京町 3
e-mail: shimpei@cc.hirosaki-u.ac.jp

3. 動標構（または Lax 対）の差分化をおこなう事によって幾何学的な性質が保たれる．

これらの動標構をしかるべく差分化すると，その両立条件が差分化された構造方程式となる．この差分構造方程式が既存の“良い”差分方程式（広田の差分方程式等）と一致していれば，良い差分化と言えるであろう．本論文では，次の手法を用いて動標構及びその構造方程式を差分化する：

> 可積分系の自明な解は**真空解**と呼ばれ，対応する動標構も簡単に求められる．真空解に対応する動標構を自然に差分化し，**dressing 作用**を用いて一般の動標構と構造方程式の差分化を導出する．

ここで dressing 作用とは，動標構の集合上の群作用（ループ群作用）である．上で述べた手法は Pedit-Wu[8] や Schiff[12] で考えられたものである．

節 2 では，ガウス曲率負一定曲面から動標構を求め，その差分化を Pedit-Wu の手続きによって与える．節 3 では，Pinkall による中心アフィン曲線の時間発展と KdV 方程式の対応を考え，Schiff の方法による potential KdV 方程式の Lax 対の構成とその差分化を与える．節 4 では，potential mKdV 方程式の差分化を dressing 作用を用いて行う．

§2. Sine-Gordon 方程式とガウス曲率負一定曲面

ガウス曲率負一定 $(K=-1)$ 曲面を

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$$

で表す事にする．この時ガウス曲率が負である事から漸近座標系 (x,y) が存在して, 第一基本形式と第二基本形式は次の様に表現される：

$$\begin{aligned} I &= A^2dx^2+2AB\cos\theta dxdy+B^2dy^2,\\ II &= 2AB\sin\theta dxdy. \end{aligned}$$

ここで $A=|\partial_x f|, B=|\partial_y f|$ であり θ は漸近線の間の角度である．さらにガウス曲率負一定曲面の場合, $A=B=1$ となる *Chebyshev* 座標系が存在する．この座標系の下, 正規直交枠 $\{e_1,e_2,e_3\}$ は次のように与えられる：

$$e_1=\frac{1}{2\cos\theta}\left(f_x+f_y\right),\ \ e_2=\frac{1}{2\sin\theta}\left(f_x-f_y\right),\ \ e_3:=e_1\times e_2,$$

ここで添字 x,y は x,y 方向の偏微分を表す．$F=(e_1,e_2,e_3)$ とおくと, F は 3 次特殊直交群 $SO(3)$ の元であり次の偏微分方程式系をみたす.

$$F_x=F\begin{pmatrix}0&\theta_x&-\sin\theta\\-\theta_x&0&-\cos\theta\\\sin\theta&\cos\theta&0\end{pmatrix},$$

$$F_y = F\begin{pmatrix} 0 & -\theta_y & -\sin\theta \\ \theta_y & 0 & \cos\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix},$$

F の事を**動標構** *(moving frame)* と呼ぶ. 2 次の特殊ユニタリー群 SU_2 と 3 次特殊直交群 SO_3 の間の 2 対 1 の対応とゲージを用いると F は次の様に 2 次の特殊ユニタリー群 SU_2 に値を持つ写像として表現される（例えば [5] 参照）:

$$F_x = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix} -\theta_x & 1 \\ 1 & \theta_x \end{pmatrix}, \quad F_y = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -e^{i\theta} \\ -e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

両立条件 $F_{xy} = F_{yx}$ を調べると

$$\theta_{xy} = \sin\theta,$$

つまり sine-Gordon 方程式を得る．ここで動標構にスペクトルパラメータ $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ を以下の様に挿入すると両立条件は不変であるので，ガウス曲率負一定の曲面の族（**随伴族**）が得られる：

$$F_x = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix} -\theta_x & \lambda \\ \lambda & \theta_x \end{pmatrix}, \quad F_y = F\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-1}e^{i\theta} \\ -\lambda^{-1}e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで F は λ に依存している事に注意する．$F|_{\lambda=1}$ は動標構になる．F を**拡張動標構**と呼ぶ．F を用いると曲面 f が次のように復元される：

$$f = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}F\right)\cdot F^{-1}\Big|_{\lambda=1} : \mathbb{R}^2 \to su_2 \cong \mathbb{R}^3.$$

§ 2.1. Dressing 作用

ここでループ群について復習しておく．実リー群 G に対して

$$\Lambda G := \{g : \mathbb{R}^\times \to G \mid g(-\lambda) = \mathrm{Ad}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) g(\lambda)\}$$

をループ群と呼ぶ（位相についてはここでは述べない事とするが，適当な位相を導入する事でバナッハリー群になる．詳しくは [10] を参照）．部分群として次の二つのループ群を考える：

$$\Lambda^+G := \left\{ g_+ \in \Lambda G \;\middle|\; g_+(\lambda) = \sum_{k\geqq 0} g_k\lambda^k \right\}, \quad \Lambda^-G := \left\{ g_- \in \Lambda G \;\middle|\; g_-(\lambda) = \sum_{k\leqq 0} g_k\lambda^k \right\}.$$

この時，ほとんど全ての $g \in \Lambda G$ に対して次の分解が成り立つ.

$$g = \tilde{g}_+\tilde{g}_- = \hat{g}_-\hat{g}_+,$$

ここで $\tilde{g}_\pm, \hat{g}_\pm \in \Lambda^\pm G$. つまり積写像

$$\Lambda^\pm G \times \Lambda^\mp G \to \Lambda G$$

は ΛG の稠密な部分リー群への微分同相写像である（証明は例えば [10] を参照）.

この Birkhoff 分解を用いて拡張動標構の集合の上に（局所的な）作用を定める．曲面に対しては定数であるようなループ群の元 $g_\pm \in \Lambda^\pm SU_2$ に対して，g_+F, g_-F の組を考え，$(g_+F)^{-1}(g_-F)$ の Birkhoff 分解を考える：

$$(g_+F)^{-1}(g_-F) = (\tilde{g}_+)^{-1}\tilde{g}_-,$$

ここで $\tilde{g}_+ \in \Lambda^+ SU_2, \tilde{g}_- \in \Lambda^-_* SU_2$ である (添字 $*$ の意味は $\lambda = \infty$ において Id の正規化をすると言う事である)．この時，次の定理が成立する事はよく知られている（例えば [8] 参照）.

Theorem 2.1. $\tilde{F} = g_-F(\tilde{g}_-)^{-1} = g_+F(\tilde{g}_+)^{-1}$ とおくと，$\tilde{F}$ は別のガウス曲率負一定曲面の拡張動標構を与える.

Sketch of proof. $\tilde{F}$ のモーレー・カルタン形式 (MC 形式) $\tilde{F}^{-1}d\tilde{F}$ を調べると

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{-1}d\tilde{F} &= \mathrm{Ad}(\tilde{g}_-)(F^{-1}dF) - d\tilde{g}_-\tilde{g}_-^{-1}\\ &= \mathrm{Ad}(\tilde{g}_+)(F^{-1}dF) - d\tilde{g}_+\tilde{g}_+^{-1}\end{aligned}$$

となる．これから $\tilde{F}$ の MC 形式の λ の分布がわかり，さらに対称性からガウス曲率負一定曲面の拡張動標構の MC 形式である事もわかる. □

従って $g_\pm \in \Lambda^\pm SU_2$ を用いて一つの拡張動標構 F から別の拡張動標構 $\tilde{F}$ が構成される．これを **dressing 作用**と呼ぶ.

$\theta = 0$ は明らかに sine-Gordon 方程式の解である（**真空解**と呼ばれる）．さらに拡張動標構は次の様に求める事ができる：

$$F_v = \exp\left((x\lambda - y\lambda^{-1})B\right),$$

ここで

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

拡張動標構 F_v 対応する曲面は直線である（厳密には曲面とは言えないが，動標構は定義されている）．F_v に対する dressing 作用を考えれば，さまざまな曲面を得る．ソリトン解，テータ関数解は全てこの方法で作る事ができる．しかしながら，dressing 作用で構成できない解が存在する事にも注意する.

Remark.

1. 特にsimple factor dressingと呼ばれる特別なdressing作用を考えるとそれはBäcklund変換に対応している．
2. この方法は，本質的にいわゆる伊達やItsの直接法と同じである（例えば [2] 参照）．

§2.2. Sine-Gordon方程式の差分化

真空解の拡張動標構 F_v の自然な差分化は次で与えられる：

$$F_{n+1,m} = F_{n,m}\frac{1}{\Delta_+}(Id + \delta\lambda B),$$
$$F_{n,m+1} = F_{n,m}\frac{1}{\Delta_-}(Id - \delta\lambda^{-1} B),$$

ここで δ は差分間隔，$\Delta_\pm = \sqrt{\det(Id \pm \delta\lambda^{\pm 1}B)}$, B は (2.1) で定義される行列である．つまり $F_{n,m}$ は明示的に次の行列で与えられる：

$$F_{n,m} = \frac{1}{\Delta_+^n\Delta_-^m}(Id + \delta\lambda B)^n(Id - \delta\lambda B)^m.$$

簡単な考察から

$$F_{n,m} : \mathbb{Z}^2 \to \Lambda SU_2$$

である事がわかる．

$F_{n,m}$ に対して，組 (g_+, g_-) を用いたdressing作用を考える：

$$F_{n,m} \to \tilde{F}_{n,m} = g_- F_{n,m}(G^-_{n,m})^{-1} = g_+ F_{n,m}(G^+_{n,m})^{-1},$$

ここで $(g_+F_{n,m})^{-1}(g_-F_{n,m}) = (G^+_{n,m})^{-1}G^-_{n,m}$ はBirkhoff分解であり $G^+_{n,m} \in \Lambda^+SU_2, G^-_{n,m} \in \Lambda^-_*SU_2$ である．この時，次の定理が成立する．

Theorem 2.2 (Pedit-Wu, [8]). $\tilde{F}_{n,m}$ は次の差分方程式系を満たす；

$$\tilde{F}_{n+1,m} = \tilde{F}_{n,m}\Omega_{n,m},$$
$$\tilde{F}_{n,m+1} = \tilde{F}_{n,m}\Theta_{n,m},$$

ここで

$$\Omega_{n,m} = \frac{1}{\Delta_+}\left(\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(u_{n+1,m}-u_{n,m})} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}(u_{n+1,m}-u_{n,m})} \end{pmatrix} + \delta\lambda B\right),$$
$$\Theta_{n,m} = \frac{1}{\Delta_-}\left(Id - \frac{i\delta\lambda^{-1}}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{i}{2}(u_{n+1,m}+u_{n,m})} \\ e^{\frac{i}{2}(u_{n+1,m}+u_{n,m})} & 0 \end{pmatrix}\right),$$

であり $u_{n,m}$ は $G^+_{n,m}|_{\lambda=0} = \mathrm{diag}(e^{\frac{i}{2}u_{n,m}}, e^{-\frac{i}{2}u_{n,m}})$ で定まる．さらに $u_{n,m}$ は差分 *sine-Gordon* 方程式を満たす：

$$\frac{4}{\delta^2}\sin\frac{u_{n+1,m+1}-u_{n+1,m}-u_{n,m+1}+u_{n,m}}{4} = \sin\frac{u_{n+1,m+1}+u_{n+1,m}+u_{n,m+1}+u_{n,m}}{4}.$$

Remark.

1. Birkhoff 分解は，局所的に定義されるが実は大域的に定義できる（SU_2 がコンパクト群であるため）.
2. 差分 sine-Gordon 方程式は広田の差分化 [4] と同じである.

$\tilde{F}_{n,m}$ の対数微分を取る事により離散ガウス曲率負一定曲面が得られる；

$$f_{n,m} = \left(\frac{\partial}{\partial_\lambda}\tilde{F}_{n,m}\right)\tilde{F}^{-1}_{n,m}\Big|_{\lambda\in\mathbb{R}^\times}.$$

Remark. この様に定義された $f_{n,m}$ は離散ガウス曲率負一定曲面としてふさわしい性質を持つ．同様にして sinh-Gordon の差分化も実行できるが，得られた式は複雑で既存の差分方程式との対応はついていない（複素座標を必要とする為）.

§ 3. KdV 方程式

§ 3.1. 中心アフィン曲線と KdV 方程式

はじめに Pinkall による中心アフィン曲線の時間発展による KdV 方程式の導出を与える, [9]．周期的な曲線 γ を

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

で表し，その周期を $L > 0$ としておく.

$$\gamma \text{ が中心アフィン平面曲線} \Leftrightarrow \det(\gamma, \gamma') \neq 0.$$

一般性を失わずに座標変換により $\det(\gamma, \gamma') = 1$ とできる．この式をさらにもう一回微分すると

$$\det(\gamma, \gamma'') = 0$$

を得る．従って $\gamma'' = -p\gamma$ となる周期が L の関数 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する．p を**中心アフィン曲率**と呼ぶ．$F = (\gamma, \gamma')$ を動標構とすれば，$(\gamma, \gamma') \in SL_2R$ であって

$$F' = F\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす．曲線の時間発展として次のような特別なものを考える：

$$\dot{F} = F \begin{pmatrix} p' & 2p \\ -2p^2 - p'' & -p' \end{pmatrix},$$

ここで $\cdot$ は時間発展のパラメータに関する微分を表す．この時両立条件が KdV 方程式

$$\dot{p} = p''' + 6pp'$$

と同値である事が知られている．

Schiff は論文 [11] において KdV 方程式を別の方法により導出している．次のような偏微分方程式系を考える：

$$F_x = F \begin{pmatrix} -b & \lambda - v \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad F_t = F \begin{pmatrix} -b\lambda - B & \lambda^2 - v\lambda - V \\ \lambda + v - b^2 & b\lambda + B \end{pmatrix},$$

ここで v, b, B, V は x と t の関数であって，両立条件 $F_{xt} = F_{tx}$ を調べる事により次の方程式系を満たす事がわかる：

$$\begin{aligned} v &= b_x + b^2, \\ B &= \frac{1}{2}b_{xx} + bb_x, \\ V &= \frac{1}{4}b_{xxx} + bb_{xx} + \frac{1}{2}b_x^2 + b^2 b_x - \delta(t), \\ b_t &= \frac{1}{2}b_{xxx} + 2b_x^2 + bb_{xx} + b^2 b_x - V, \end{aligned}$$

ここで δ は t のみに依存する任意関数とした．3 番目の式を 4 番目の式に代入すると，potential KdV 方程式

$$b_t = \frac{1}{4}b_{xxx} + \frac{3}{2}b_x^2 + \delta(t)$$

が得られる．F の事を potential KdV 方程式の拡張動標構と呼ぶ事とする．

Remark.

1. F はループ群 ΛGL_2R に値を取る写像であるが，捻り条件 $\mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1,-1))g(\lambda) = g(-\lambda)$ を満たしていない．混乱がない限り同じ記号を用いる．

2. b を potential KdV 方程式の解とすると，$u = b_x$ は KdV 方程式 $u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x$ の解である．

3. F は初期条件を考慮すれば ΛSL_2R の元であるがその幾何学的意味は不明である．

以下 $\delta = 0$ としておく．Potential KdV 方程式が $b = 0$ を解として持つことは明らかである（真空解）：特に動標構 F_v は

$$F_v = \exp\left(x\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix} + t\lambda\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \tag{3.1}$$

と表現する事ができる．

F_v に左から ΛGL_2R の元 g を掛け，Birkhoff 分解を行う（ここで g は x, t に対しては定数とする.）：

$$gF_v = \tilde{F}(S^-)^{-1},$$

ここで $\tilde{F} \in \Lambda^+GL_2R$, $S^- \in \Lambda_*^-GL_2R$ である．この時，次の定理が成立する．

Theorem 3.1 (Schiff, [11])**.** $\tilde{F}$ は *potential KdV* 方程式の拡張動標構である．また *potential KdV* 方程式の新しい解は S^- の $(2,1)$ 部分の λ^{-1} の係数にマイナスを掛けたものである．

Sketch of proof. Sine-Gordon 方程式で見た様に，$\tilde{F}$ の Maurer-Cartan 形式 $\tilde{F}^{-1}d\tilde{F}$ を調べる事により結論が得られる． □

Birkhoff 分解によって potential KdV 方程式の拡張動標構の集合に作用を定める事ができる．この事を用いて potential KdV 方程式の差分化を次節で行う．

§ 3.2. Potential KdV 方程式の差分化

前節で見たように potential KdV 方程式の真空解に対応する拡張動標構 F_v は (3.1) で与えらえる．従って自然な差分を考えるには sine-Gordon の時見た同様に

$$F_v = \exp\left(x\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix} + t\lambda\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

に対して行われるべきである．しかしながら，実は t の項 (つまり行列 $\lambda\left(\begin{smallmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$) は x の項 (つまり行列 $\left(\begin{smallmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$) と同じにして差分化するのが良い事がわかる．従って差分化としては次のものを考える：

$$F_{n+1,m} = F_{n,m}\left(Id + h\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right), \quad F_{n,m+1} = F_{n,m}\left(Id + k\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right).$$

ここでは行列式を正規化していない事に注意する．h, k は差分間隔である．この差分式は具体的に解くことができ，次のような明示的な表示を持つ：

$$F_{n,m} = \left(Id + h\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)^n\left(Id + k\begin{pmatrix}0 & \lambda\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)^m.$$

$F_{n,m}$ に左から ΛGL_2R の g を掛けて (g は n,m に依らない) Birkhoff 分解をする：

$$gF_{n,m} = \tilde{F}_{n,m}(S^-_{n,m})^{-1}.$$

ここで $\tilde{F}_{n,m} \in \Lambda^+GL_2R, S^-_{n,m} \in \Lambda^-_*GL_2R$ である．この時，次の定理が成立する．

Theorem 3.2 (Schiff, [12])**.** $\tilde{F}_{n,m}$ は次の差分方程式系を満たす：

$$F_{n+1,m} = F_{n,m}\begin{pmatrix} 1-hb_{n+1,m} & h\lambda + b_{n,m} - b_{n+1,m} - hb_{n,m}b_{n+1,m} \\ h & 1+hb_{n,m}\end{pmatrix},$$
$$F_{n,m+1} = F_{n,m}\begin{pmatrix} 1-kb_{n,m+1} & k\lambda + b_{n,m} - b_{n,m+1} - kb_{n,m}b_{n,m+1} \\ k & 1+kb_{n,m}\end{pmatrix}.$$

ここで $b_{n,m}$ は $S^-_{n,m}$ の λ^{-1} の係数行列の $(2,1)$ 成分にマイナスを掛けたものである．さらに $b_{n,m}$ は *lattice KdV* 方程式を満たす：

$$-\frac{b_{n+1,m+1} - b_{n,m+1} + b_{n+1,m} - b_{n,m}}{h} + \frac{b_{n+1,m+1} - b_{n+1,m} + b_{n,m+1} - b_{n,m}}{k} + (b_{n,m} - b_{n+1,m+1})(b_{n,m+1} - b_{n+1,m}) = 0.$$

Remark.

1. Lattice KdV 方程式は [7] で与えられた．
2. Schiff はこの考え方を推し進めて potential KdV 方程式の別の自然な差分化を実行している．そこでは，真空解に対応する拡張動標構を自然に差分化し，その dressing 作用を用いて差分 potential Kdv 方程式を与えている．
3. Lattice KdV 方程式の拡張動標構（Schiff による）の幾何学的意味は良くわかっておらず，松浦の差分曲線論 [6] との関係は不明である．

§ 4. Potential mKdV 方程式

この節では potential mKdV 方程式の差分化 lattice mKdV を dressing 作用を用いて与える．2×2 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する．この時，potential mKdV 方程式の真空解に対応する拡張動標構 F_v は

$$F_v = \exp(x\lambda B + t\lambda^3 B)$$

で与えられる（例えば [3] 参照，そこでは捻り条件 $\mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1,-1))g(\lambda) = g(-\lambda)$ は満たされていないが，同型写像を用いると捻り条件が満たされる）．F_v の自然な差分化と

dressing 作用を用いて potential mKdV 方程式の差分化が行われるべきである． しかしながら，節 3.2 で見たように t の項を x の項と同じにして差分化する事を考える．つまり真空解に対応する拡張動標構の差分化としては次のものを考える事にする：

$$F_{n+1,m} = F_{n,m}\frac{1}{\Delta^q}\left(Id + q\lambda B\right),\quad F_{n,m+1} = F_{n,m}\frac{1}{\Delta^p}\left(Id + p\lambda B\right),$$

ここで $\Delta^q = \sqrt{\det(Id+q\lambda B)}, \Delta^p = \sqrt{\det(Id+p\lambda B)}$ であり q, p は差分間隔である．この差分式は具体的に解くことができ（初期条件は Id としている），次のような明示的な表示を持つ：

$$F_{n,m} = \frac{1}{(\Delta^q)^n(\Delta^p)^m}\left(Id + q\lambda B\right)^n\left(Id + p\lambda B\right)^m.$$

$F_{n,m}$ に左から $\Lambda^{\pm}SL_2R$ の $g_{\pm}$ を掛けて ($g_{\pm}$ は n, m に依らないとする) 次の様に Birkhoff 分解をする：

$$(g_-F_{n,m})^{-1}g_+F_{n,m} = S^+_{n,m}(S^-_{n,m})^{-1},$$

ここで $S^+_{n,m} \in \Lambda^+SL_2R, S^-_{n,m} \in \Lambda^-_*SL_2R$ である．そこで $\tilde{F}_{n,m}$ を

$$\tilde{F}_{n,m} = g_-F_{n,m}S^+_{n,m} = g_+F_{n,m}S^-_{n,m}$$

で定める．この時，次の定理が成立する．

Theorem 4.1. $\tilde{F}_{n,m}$ は次の差分方程式系を満たす；

$$\tilde{F}_{n+1,m} = \tilde{F}_{n,m}L_{n,m},$$
$$\tilde{F}_{n,m+1} = \tilde{F}_{n,m}M_{n,m},$$

ここで

$$L_{n,m} = \frac{1}{\Delta^q}\left(\begin{pmatrix}\frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} & 0\\ 0 & \frac{v_{n,m}}{v_{n+1,m}}\end{pmatrix} + q\lambda B\right), \tag{4.1}$$

$$M_{n,m} = \frac{1}{\Delta^p}\left(\begin{pmatrix}\frac{v_{n,m+1}}{v_{n,m}} & 0\\ 0 & \frac{v_{n,m}}{v_{n,m+1}}\end{pmatrix} + p\lambda B\right), \tag{4.2}$$

であり $v_{n,m}$ は $S^+_{n,m}|_{\lambda=0} = \mathrm{diag}(v_{n,m}, v^{-1}_{n,m})$ で定義される．さらに $v_{n,m}$ は *lattice mKdV* 方程式を満たす：

$$p\frac{v_{n,m+1}}{v_{n+1,m+1}} - q\frac{v_{n+1,m}}{v_{n+1,m+1}} = p\frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} - q\frac{v_{n,m+1}}{v_{n,m}}. \tag{4.3}$$

Proof. $\tilde{F}_{n,m}$ のモーレー・カルタン形式 $\tilde{F}^{-1}_{n,m}\tilde{F}_{n+1,m}$ を調べる．$\tilde{F}_{n,m}$ の定義から

$$\begin{aligned}L_{n,m} = \tilde{F}^{-1}_{n,m}\tilde{F}_{n+1,m} &= (g_-F_{n,m}S^+_{n,m})^{-1}(g_-F_{n+1,m}S^+_{n+1,m})\\ &= (g_+F_{n,m}S^-_{n,m})^{-1}(g_+F_{n+1,m}S^-_{n+1,m})\end{aligned}$$

がわかる．$F_{n,m}^{-1}F_{n+1,m}$ は $\frac{1}{\Delta^p}(Id+p\lambda B)$ で与えられており，上の式の 1 行目の右辺に Δ^p を掛けたものが Λ^+GL_2R に値を取り，2 行目の右辺に Δ^p を掛けたものが $\Lambda_*^-GL_2R$ に値を取る事から $L_{n,m}$ が (4.1) で与えられる事がわかる．同様の議論で $M_{n,m}$ が (4.2) で与えられる事がわかる．両立条件

$$M_{n,m}L_{n,m+1} = L_{n,m}M_{n+1,m}$$

を計算すると (4.3) が得られる． □

Remark.

1. Lattice mKdV 方程式は [7] で与えられている．
2. Birkhoff 分解は，sine-Gordon の場合と違い，局所的に定義されるだけである（SL_2R が非コンパクト群であるため）．
3. Theorem 4.1 の差分化された拡張動標構 $\tilde{F}_{n,m}$ は [7] で考えられているものとは一致せず，新しい定式化であると思われる．

References

[1] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. I, II. *Éditions Jacques Gabay* (1993).
[2] E. Date, S. Tanaka, KdV 方程式− 非線型数理物理入門. 紀伊國屋数学叢書 **16** (1979).
[3] J. Dorfmeister, Banach manifolds of solutions to nonlinear partial differential equations, and relations with finite-dimensional manifolds. *Differential geometry: partial differential equations on manifolds* (Los Angeles, CA, 1990), 121–139.
[4] R. Hirota, Nonlinear partial difference equation III – discrete sine-Gordon equation. *J. Phys. Soc. Japan*, **43** (1977), 2079 – 2086.
[5] J. Inoguchi, 曲面の差分幾何. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B30* (2012), 77 – 99.
[6] N. Matsuura, Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves. *Int. Math. Res. Not.* **2012**, no. 8, 1681 – 1698.
[7] F. Nijhoff, H. Capel, The discrete Korteweg-de Vries equation. *Acta Appl. Math.* **39** (1995), no.1 – 3, 133 – 158.
[8] F. Pedit, H. Wu, Discretizing constant curvature surfaces via loop group factorizations: the discrete sine- and sinh-Gordon equations. *J. Geom. Phys.* **17** (1995), no. 3, 245–260.
[9] U. Pinkall, Hamiltonian flows on the space of star-shaped curves. *Results in Math.* **27** (1995), no.3 – 4, 328 – 332.
[10] A. Pressley, G. Segal, Loop groups. *Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications* (1986).
[11] J. Schiff, Symmetries of KdV and loop groups. *Preprint* (1996).
[12] J. Schiff, Loop groups and discrete KdV equations. *Nonlinearity* **16** (2003), no. 1, 257–275.