

# 非可積分系の離散化と超離散化 Discretization and ultradiscretization of non-integrable systems

By

村田 実貴生 (Mikio MURATA)\*

## Abstract

Ultradiscretization is a limiting procedure transforming a given difference equation into a cellular automaton. In addition the cellular automaton constructed by this procedure preserves the essential properties of the original equation, such as the structure of exact solutions. A systematic approach to the construction of ultradiscrete analogues for differential systems was presented by the author. This method is tailored to first-order differential equations and reaction-diffusion systems. The discretizing method is applied to the Gray-Scott model. The resulting ultradiscrete system gives a travelling pulse, a self-replication pattern and a Sierpinski gasket pattern from appropriate initial data and parameters. The system is directly related to the elementary cellular automaton Rule 90. A  $(2 + 1)$ D ultradiscrete Gray-Scott model that gives a ring pattern, a self-replication pattern and a chaotic pattern, is also constructed.

## § 1. はじめに

超離散化 [12] は差分方程式をセル・オートマトンに変換する極限操作である。この手法でソリトン・セル・オートマトンが数多く構成されているが、元の方程式の厳密解の構造などの本質的な特徴を保存していることが知られている。超離散化の手法を適用すると、元の差分方程式の加算、乗算、除算がそれぞれ新しい方程式の大小比較、加算、減算に置き換わり、セル・オートマトンの時間発展則とみなすこともできる区分線形方程式に変換される。

---

Received October 30, 2012.

2000 Mathematics Subject Classification(s): 2000 Mathematics Subject Classification(s):39A14, 37L60

*Key Words:* 離散化, 超離散化, セル・オートマトン, 反応拡散系

本研究は松家敬介氏, 時弘哲治氏の助言を受けたものです。一部の画像は松家敬介氏の提供を受けたものです。本研究は JSPS 科研費 23740125 の助成を受けたものです。

\*Institute of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology, 2-24-16 Nakacho Koganei-shi, Tokyo 184-8588, Japan.

e-mail: mmurata@cc.tuat.ac.jp

© 2013 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

超離散反応拡散系は例えば [10] などで研究されている。そこで示された系は適当な初期値から始めると進行波やターゲットパターン、らせんパターンが観察される。しかし、同じようなパターンを持つ差分、微分方程式との対応関係は明らかでない。また、逆超離散化の手法を用いて、セル・オートマトンと微分方程式を対応付ける試みが例えば [5, 11] ではなされているが、一般的な手法とは言い難い。このように、ソリトン系でない微分方程式とセル・オートマトンの研究は残念ながら乖離している現状にある。

著者は [7] において、一般の微分方程式に対して超離散化を行う系統的な方法を提案した。その方法は 1 階の常微分方程式に適用すると、例えば [4, 8, 13] の離散化で得られたような差分方程式を構成できるものである。また、その方法は放物型偏微分方程式である反応拡散方程式に適用でき、1 成分の反応拡散方程式としてよく知られている Allen-Cahn 方程式にその方法を適用して超離散方程式を導出した。超離散方程式は区分線形方程式であるので、その「線形性」から様々な厳密解を得ることができる。得られた方程式に対して、定常解や進行波解および大域解を与えた。これらの解は元の方程式の解と凡そ類似していることが分かる。

本論文では、2 成分の反応拡散系としてよく知られる Gray-Scott モデル [1, 2, 3] に対して、この手法により超離散モデルを構成する。そのモデルは時空パターンがフラクタル図形を描くエレメンタリー・セル・オートマトンのルール 90 と呼ばれるものを含むなど、連続系と同様に興味深いパターンをもつものとなっている。また、空間 2 次元の Gray-Scott モデルにもこの手法を適用して、空間 2 次元の超離散モデルを構成する。その系もパラメータの違いにより様々なパターンが現れることが分かる。

反応拡散系においては、偏微分方程式を用いる連続モデルとセル・オートマトンを用いる離散モデルの研究が並行して行われているが、両者のつながりは専ら挙動の定性的な性質にのみにより論じられており、直接的な対応は明らかでない。トロピカル離散化では、連続モデルに直接対応するセル・オートマトンモデルを構成することができる。したがって、両者の知見を他者に生かした研究が進められるものと期待される。

2 節では微分方程式を超離散化する系統的な方法について説明する。3 節ではその手法を用いて、Gray-Scott モデルの超離散対応物を与え、パラメータによるパターンの差異を示す。その超離散系とエレメンタリー・セル・オートマトンのルール 90 の関係についても議論する。4 節では空間 2 次元の Gray-Scott モデルの超離散対応物を与え、パラメータの違いにより様々なパターンが現れることを示す。5 節ではまとめと今後の課題などについて述べる。

## § 2. トロピカル離散化

この節では、反応拡散系などの放物型偏微分方程式から超離散化が適用可能な離散方程式を系統的に構成する「トロピカル離散化」を説明する。

次の形の反応拡散系の偏微分方程式

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - g(u)$$

の離散化を考える．ここでは  $u > 0$  の解を考えることにし， $f(u), g(u) \geq 0$  とする．つまり，非線形項が例えば  $u - u^2$  のときは， $f(u) = u, g(u) = u^2$  とする．この式の離散化は函数

$$(2.2) \quad m(u_n^j) = \frac{1}{2} (u_n^{j+1} + u_n^{j-1})$$

を用いて，

$$(2.3) \quad u_{n+1}^j = m(u_n^j) \frac{\varepsilon^{-1} m(u_n^j) + f(m(u_n^j))}{\varepsilon^{-1} m(u_n^j) + g(m(u_n^j))}$$

とすればよい．(2.3) を

$$\frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{\varepsilon} = \frac{\delta^2}{2\varepsilon} \frac{2m(u_n^j) - 2u_n^j}{\delta^2} + \frac{m(u_n^j) \{f(m(u_n^j)) - g(m(u_n^j))\}}{m(u_n^j) + \varepsilon g(m(u_n^j))}$$

と変形して  $t = \varepsilon n, x = \delta j$  とおき， $\delta = \sqrt{2D\varepsilon}$  としてから  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると，式 (2.1) が得られることにより，離散化になっていることが確認できる．また，この式は正值性が保障されるために超離散化も適用可能である．具体的には，(2.3) に対して，パラメータと従属変数に次の指数函数型の変換

$$\varepsilon = \exp(E/\lambda), u_n^j = \exp(U_n^j/\lambda), f(u_n^j) = \exp\{F(U_n^j)/\lambda\}, g(u_n^j) = \exp\{G(U_n^j)/\lambda\}$$

を行い， $\lambda \rightarrow +0$  の極限をとることで実現される．そのとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lambda \log(e^{U/\lambda} + e^{V/\lambda}) = \max(U, V)$$

のような操作を行うことになる．例えば，(2.2) の超離散化は

$$(2.4) \quad M(U_n^j) = \max(U_n^{j+1}, U_n^{j-1})$$

となる．函数 (2.4) を用いて，(2.3) は

$$U_{n+1}^j = M(U_n^j) + \max\{M(U_n^j) - E, F(M(U_n^j))\} - \max\{M(U_n^j) - E, G(M(U_n^j))\}$$

という式に変換される．元の方程式の乗算，除算，加算がそれぞれ加算，減算，最大値函数に変換されていることがわかる．また，空間  $d$  次元のラプラシアン  $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial^2 / \partial x_k^2$  を用いた

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u) - g(u)$$

という偏微分方程式についても

$$m(u_n^j) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d (u_n^{j+e_k} + u_n^{j-e_k})$$

を用いて,

$$u_{n+1}^j = m(u_n^j) \frac{\varepsilon^{-1}m(u_n^j) + f(m(u_n^j))}{\varepsilon^{-1}m(u_n^j) + g(m(u_n^j))}$$

とすればよい. このような放物型偏微分方程式の離散化の方法は [6] で用いられているものである. 更に, この離散化の式も超離散化可能であり,

$$M(U_n^j) = \max_{k=1, \dots, d} (U_n^{j+e_k}, U_n^{j-e_k})$$

を用いて,

$$U_{n+1}^j = M(U_n^j) + \max \{M(U_n^j) - E, F(M(U_n^j))\} - \max \{M(U_n^j) - E, G(M(U_n^j))\}$$

となる.

### § 3. Gray-Scott モデルの離散化と超離散化

Gray-Scott モデル [3] は

$$(3.1a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uv^2 + a(1 - u),$$

$$(3.1b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv^2 - bv$$

で与えられる. パルスの衝突や分裂現象が見られることから, 反応拡散系においてよく研究されているモデルである. ここでは, (3.1) を  $w = v + 1$ ,  $D_w = D_v$  と変数変換し,

$$(3.2a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(w - 1)^2 + a(1 - u),$$

$$(3.2b) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = D_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u(w - 1)^2 - b(w - 1)$$

に対して離散化を適用する. 式 (3.2) を式 (2.1) を元に離散化する. 連立系のときは

$$(3.3) \quad m_p(u_n^j) = \frac{1}{2} (u_n^{j+p} + u_n^{j-p}), \quad m_q(w_n^j) = \frac{1}{2} (w_n^{j+q} + w_n^{j-q})$$

という函数を用いて,

$$(3.4a) \quad u_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1}m_p(u_n^j) + 2m_p(u_n^j)w_{n+1}^j + a}{\varepsilon^{-1} + (w_{n+1}^j)^2 + 1 + a},$$

$$(3.4b) \quad w_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1}m_q(w_n^j) + m_p(u_n^j) \{m_q(w_n^j)^2 + 1\} + b}{\varepsilon^{-1} + 2m_p(u_n^j) + b}$$

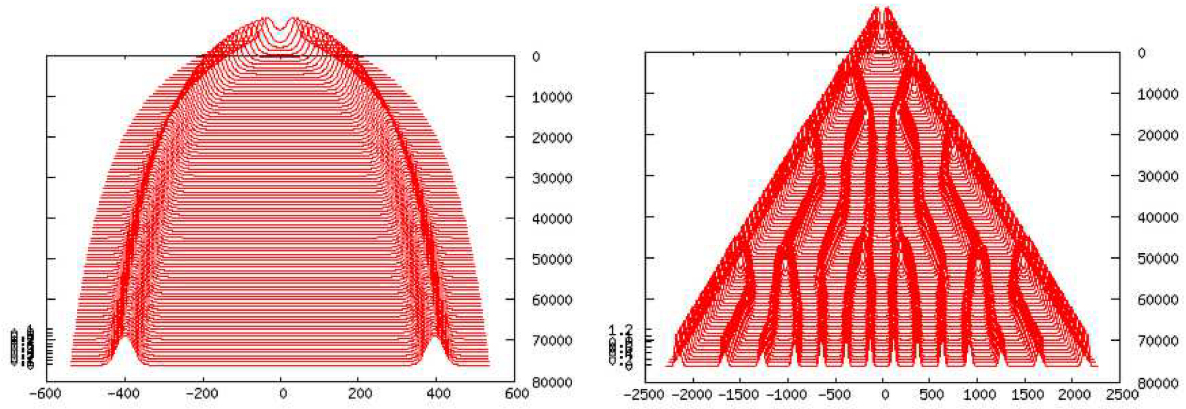


Figure 1.  $a = 0.01, b = 0.07, p = 5, q = 1$ , Figure 2.  $a = 0.02, b = 0.08, p = 5, q = 1$ ,  
 $\varepsilon = 0.05$  のときの  $w_n^j$  の時空パターン  $\varepsilon = 0.05$  のときの  $w_n^j$  の時空パターン

とできる. 系 (3.4) に対して,  $t = \varepsilon n, x = \delta j$  とおき,  $\delta = \sqrt{2D\varepsilon}$  としてから  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすると (3.2) において,  $D_u = p^2 D, D_w = q^2 D$  としたものが得られる. この離散モデルをもとに数値計算を行うと,  $\varepsilon$  が比較的大きいときにも, 連続モデルと同様の時空パターンが確認できる. 例えば, Figure 1 ではトラベリングパルスが観察される. また, パラメータを変えると, Figure 2 のように自己複製パターンがみられる.

次に, 離散系 (3.4) に超離散化の手法を適用する. パラメータと従属変数  $\varepsilon, a, b, u_n^j, w_n^j$  をそれぞれ

$$\varepsilon = \exp(E/\lambda), \quad a = \exp(A/\lambda), \quad b = \exp(B/\lambda),$$

$$u_n^j = \exp(U_n^j/\lambda), \quad w_n^j = \exp(W_n^j/\lambda),$$

と置き換えて,  $\lambda \rightarrow +0$  の極限をとる. 函数 (3.3) の超離散化がそれぞれ

$$(3.5) \quad M_p(U_n^j) = \max(U_n^{j+p}, U_n^{j-p}), \quad M_q(W_n^j) = \max(W_n^{j+q}, W_n^{j-q})$$

となることに注意すると, (3.5) を用いて超離散化した系は

$$(3.6a) \quad U_{n+1}^j = \max \left\{ M_p(U_n^j) - E, M_p(U_n^j) + W_{n+1}^j, A \right\} - \max \left( -E, 2W_{n+1}^j, 0, A \right),$$

$$(3.6b) \quad W_{n+1}^j = \max \left[ M_q(W_n^j) - E, M_p(U_n^j) + \max \{ 2M_q(W_n^j), 0 \}, B \right] - \max \{ -E, M_p(U_n^j), B \}$$

となる. 以降  $W_n^j \geq 0$  のときを考えることにし, さらに簡単のために  $E \rightarrow \infty$  とすると (3.6) は

$$(3.7a) \quad U_{n+1}^j = \max \left\{ M_p(U_n^j) + W_{n+1}^j, A \right\} - \max \left( 2W_{n+1}^j, A \right),$$

$$(3.7b) \quad W_{n+1}^j = \max \left\{ M_p(U_n^j) + 2M_q(W_n^j), B \right\} - \max \left\{ M_p(U_n^j), B \right\}$$

とまとめられる．この式を超離散 Gray-Scott モデルと呼ぶことにする．

超離散系 (3.7) はとり得る値が有限個になるように制限するとセル・オートマトン [14] にすることができる．たとえば  $B \geq 1$  とすると,  $-U_n^j \in \{0, 1\}$ ,  $W_n^j \in \{0, 1\}$  に制限できる．このときはパラメータの取り方で5通りのセル・オートマトンになる．

タイプ I:  $A \leq -1, B = 1$  のときのルール表:

$$\frac{-M_p(U_n^j), M_q(W_n^j)}{-U_{n+1}^j, W_{n+1}^j} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 & & \\ \hline 1, 0 & 1, 0 & 1, 1 & 0, 0 & & \end{array} \right.$$

1 の塊のある初期値から発展させると, その塊が分裂し 2 つの進行パルスになる．更にそのパルスは対消滅することが観測される．ランダムな初期値から始めるといくつかの進行パルスが生成し, やはりそれらは対消滅する (Figure 3).

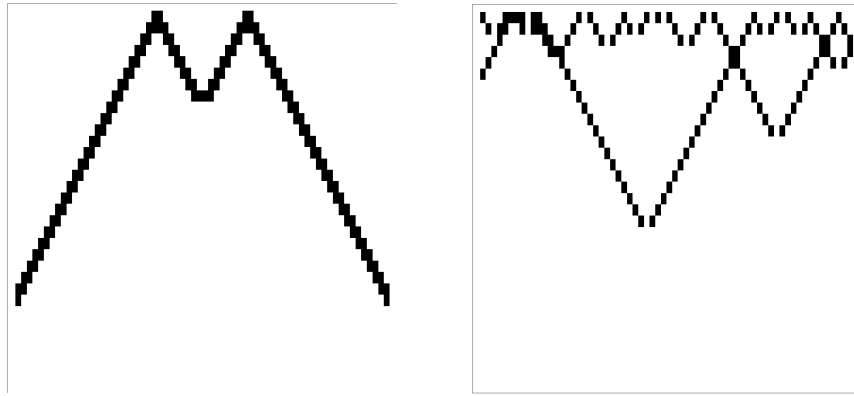


Figure 3.  $A = -1, B = 1$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $W_n^j$  の時空間パターン．左は 2カ所にだけ 1 を配した初期値, 右はランダムな初期値.

タイプ II:  $0 \leq A \leq 1, B = 1$  のときのルール表:

$$\frac{-M_p(U_n^j), M_q(W_n^j)}{-U_{n+1}^j, W_{n+1}^j} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 & & \\ \hline 0, 0 & 0, 0 & 1, 1 & 0, 0 & & \end{array} \right.$$

このとき  $U_{n+1}^j = -W_{n+1}^j$  となるので, この関係を使って  $W_n^j$  の単独の方程式とみることができる．さらに  $p = q = 1$  のときはフラクタル図形を描くことで知られる ECA ルール 90:

$$\frac{W_n^{j-1} W_n^j W_n^{j+1}}{W_{n+1}^j} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

と等価になる．したがって, Figure 4 のような時空間パターンが実現される．また拡散比を  $p = 2, q = 1$  に変えると, このときはフラクタル図形は現れず, Figure 5 のような定在型自己複製パターンが観察される．幅  $p = 2$  の 1 の塊を配して時間発展させるとその塊が増幅し, それが定在するのが確認できる．ランダムな初期値から始めると, 幅  $p = 2$  の

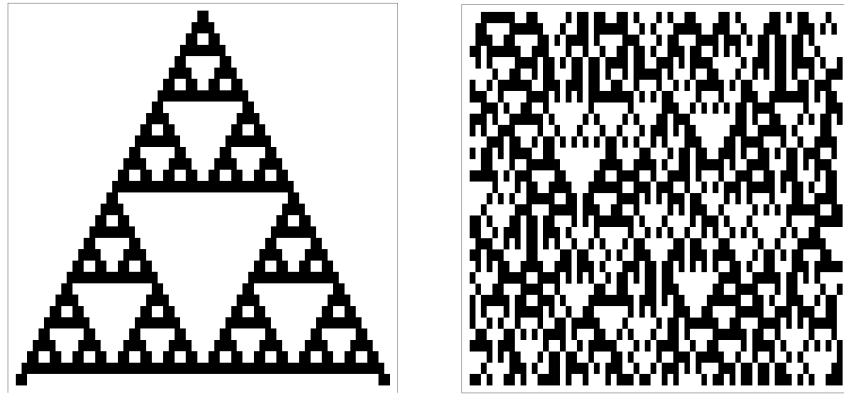


Figure 4.  $A = 0, B = 1$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $W_n^j$  の時空パターン. 左は1カ所にだけ1の塊を配した初期値, 右はランダムな初期値.

1の塊が定在している部分と, 1と0で振動している部分のいずれかで安定することがわかる.

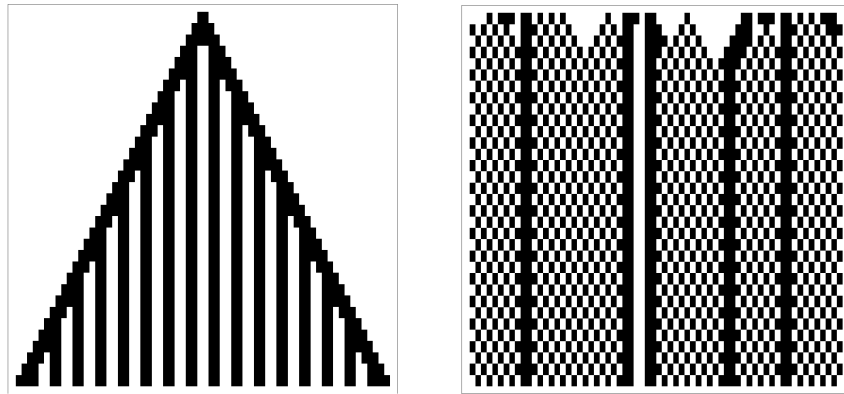


Figure 5.  $A = 0, B = 1$  かつ  $p = 2, q = 1$  のときの  $W_n^j$  の時空パターン. 左は1カ所に幅  $p = 2$  の1の塊を配した初期値, 右はランダムな初期値.

タイプ III :  $A \geq 2, B = 1$  のときのルール表 :

$$\frac{-M_p(U_n^j), M_q(W_n^j)}{-U_{n+1}^j, W_{n+1}^j} \left| \begin{array}{c|c|c|c} 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline 0, 0 & 0, 0 & 0, 1 & 0, 0 \end{array} \right.$$

このとき  $U_{n+1}^j = 0$  であるので,  $W_n^j$  は単独の超離散拡散方程式  $W_{n+1}^j = M_q(W_n^j)$  に従う.

タイプ IV :  $A \leq -1, B \geq 2$  のときのルール表 :

$$\frac{-M_p(U_n^j), M_q(W_n^j)}{-U_{n+1}^j, W_{n+1}^j} \left| \begin{array}{c|c|c|c} 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline 1, 0 & 1, 0 & 0, 0 & 0, 0 \end{array} \right.$$

このとき  $W_{n+1}^j = 0$  であるので,  $U_n^j$  は単独の超離散拡散方程式  $U_{n+1}^j = M_p(U_n^j)$  に従う.

タイプ V:  $A \geq 0, B \geq 2$  のときのルール表:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -M_p(U_n^j), M_q(W_n^j) & 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline -U_{n+1}^j, W_{n+1}^j & 0, 0 & 0, 0 & 0, 0 & 0, 0 \end{array}$$

これは  $U_{n+1}^j = W_{n+1}^j = 0$  である. つまり, 速やかに定常状態になる.

もし (3.7) において  $B \geq L$  とすると,  $-U_n^j \in \{0, 1, \dots, L\}$  かつ  $W_n^j \in \{0, 1, \dots, L\}$  に制限できるので,  $U_n^j$  も  $W_n^j$  も  $L+1$  個の状態をもつセル・オートマトンになる.  $L$  が大きくなるに従い, ルールの種類も増加していくが, そのときの時空パターンは先の 5 種類に大別することができる.

タイプ I	タイプ II	タイプ III	タイプ IV	タイプ V
$A \leq -1$	$0 \leq A \leq 2L - 1$	$A \geq 2L$	$A \leq -1$	$A \geq 0$
$B = L$	$B = L$	$B = L$	$B \geq L + 1$	$B \geq L + 1$

たとえば,  $L = 2$  のとき, タイプ II で  $p = q = 1$  のときは Figure 6 のように「影付き」のシェルピンスキー三角形が現れる. このときも, 拡散比を変えて  $p = 2, q = 1$  とする

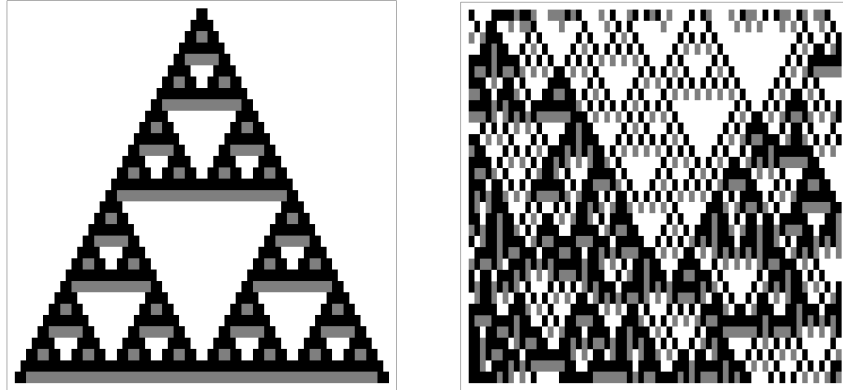


Figure 6.  $A = 3, B = 2$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $W_n^j \in \{0, 1, 2\}$  の時空パターン. 左は 1カ所にだけ 2 の塊を配した初期値, 右はランダムな初期値.

と, Figure 7 のような影の付いた定在型自己複製パターンが観察される. 幅  $p = 2$  の値  $L = 2$  の塊を配して時間発展させると, その塊が増幅するが, その塊の間の値は 1 となる. ランダムな初期値から始めると, やはり定在している部分と, 振動している部分のいずれかで安定することがわかる.

なお, タイプ II で  $A \geq L$  のときには, (3.7a) は

$$U_{n+1}^j = -\max\left(2W_{n+1}^j - A, 0\right)$$

と書けるので, この関係を使って (3.7b) から  $W_n^j$  のみの単独の式を得ることができ,

$$W_{n+1}^j = \max\left[2M_q(W_n^j) - L - \max\{-2M_p(-W_n^j) - A, 0\}, 0\right]$$



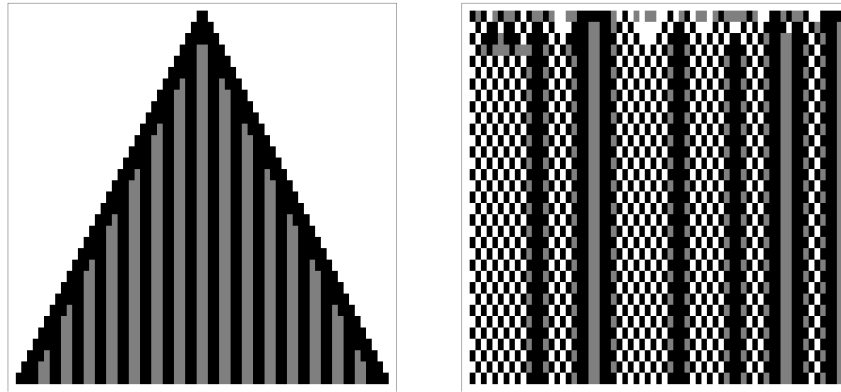


Figure 7.  $A = 3, B = 2$  かつ  $p = 2, q = 1$  のときの  $W_n^j \in \{0, 1, 2\}$  の時空パターン. 左は 1カ所にだけ 2 の塊を配した初期値, 右はランダムな初期値.

とまとめられる. このように, 場合によっては連立系の反応拡散系から出発して, 最終的に 1 変数の方程式を導出できることもある.

#### § 4. (2 + 1) 次元 Gray-Scott モデル

空間 2 次元の Gray-Scott モデルは,

$$(4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - uv^2 + a(1 - u),$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + uv^2 - bv$$

となる. 系 (4.1) に対しても変数を  $w = v + 1$ ,  $D_w = D_v$  と変換すると,

$$(4.3a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u(w - 1)^2 + a(1 - u),$$

$$(4.3b) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = D_w \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + u(w - 1)^2 - b(w - 1)$$

となり, 変換後の系 (4.3) に対してトロピカル離散化を適用する. 相加平均関数

$$(4.4a) \quad m_p(u_n^{j,k}) = \frac{1}{4} (u_n^{j+p,k} + u_n^{j-p,k} + u_n^{j,k+p} + u_n^{j,k-p}),$$

$$(4.4b) \quad m_q(w_n^{j,k}) = \frac{1}{4} (w_n^{j+q,k} + w_n^{j-q,k} + w_n^{j,k+q} + w_n^{j,k-q})$$

を用いて、離散系は

$$(4.5a) \quad w_{n+1}^{j,k} = \frac{\varepsilon^{-1}m_p(u_n^{j,k}) + 2m_p(u_n^{j,k})w_{n+1}^{j,k} + a}{\varepsilon^{-1} + (w_{n+1}^{j,k})^2 + 1 + a},$$

$$(4.5b) \quad w_{n+1}^{j,k} = \frac{\varepsilon^{-1}m_q(w_n^{j,k}) + m_p(u_n^{j,k}) \{m_q(w_n^{j,k})^2 + 1\} + b}{\varepsilon^{-1} + 2m_p(u_n^{j,k}) + b}$$

とできる. もし  $t = \varepsilon n$ ,  $x = \delta j$ ,  $y = \delta k$ ,  $\delta = 2\sqrt{D\varepsilon}$  と置いて,  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとると, (4.3a) と (4.3b) でそれぞれ  $D_u = p^2D$ ,  $D_w = q^2D$  としたものが得られる.

次に, 離散系 (4.5) に超離散化の手法を適用する. パラメータと従属変数  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $u_n^{j,k}$ ,  $w_n^{j,k}$  をそれぞれ

$$\varepsilon = \exp(E/\lambda), \quad a = \exp(A/\lambda), \quad b = \exp(B/\lambda),$$

$$u_n^{j,k} = \exp(U_n^{j,k}/\lambda), \quad w_n^{j,k} = \exp(W_n^{j,k}/\lambda)$$

と置き換えて,  $\lambda \rightarrow +0$  の極限をとる. 函数 (4.4) の超離散化がそれぞれ

$$(4.6a) \quad M_p(U_n^{j,k}) = \max(U_n^{j+p,k}, U_n^{j-p,k}, U_n^{j,k+p}, U_n^{j,k-p}),$$

$$(4.6b) \quad M_q(W_n^{j,k}) = \max(W_n^{j+q,k}, W_n^{j-q,k}, W_n^{j,k+q}, W_n^{j,k-q})$$

となることに注意すると, (4.6) を用いて超離散化した系は

$$U_{n+1}^{j,k} = \max \left\{ M_p(U_n^{j,k}) - E, M_p(U_n^{j,k}) + W_{n+1}^{j,k}, A \right\} - \max \left( -E, 2W_{n+1}^{j,k}, 0, A \right),$$

$$W_{n+1}^{j,k} = \max \left[ M_q(W_n^{j,k}) - E, M_p(U_n^{j,k}) + \max \{ 2M_q(W_n^{j,k}), 0 \}, B \right]$$

$$- \max \{ -E, M_p(U_n^{j,k}), B \}$$

と書ける. 以降  $W_n^{j,k} \geq 0$  かつ  $E \rightarrow \infty$  の場合を扱う. このとき系は

$$(4.7a) \quad U_{n+1}^{j,k} = \max \left\{ M_p(U_n^{j,k}) + W_{n+1}^{j,k}, A \right\} - \max \left( 2W_{n+1}^{j,k}, A \right),$$

$$(4.7b) \quad W_{n+1}^{j,k} = \max \left\{ M_p(U_n^{j,k}) + 2M_q(W_n^{j,k}), B \right\} - \max \left\{ M_p(U_n^{j,k}), B \right\}$$

と書ける. 系 (4.7) も空間 1 次元の系と同じく, とり得る値を有限個に制限してセル・オートマトンにすることができる. 例えば  $B \geq 1$  とすると,  $-U_n^{j,k} \in \{0, 1\}$ ,  $W_n^{j,k} \in \{0, 1\}$  に制限できる. このときも, パラメータ  $A, B$  の選び方で 5 通りのセル・オートマトンが得られる. パラメータの条件が  $A \leq -1, B = 1$  のときには, ルール表は

$$\frac{-M_p(U_n^{j,k}), M_q(W_n^{j,k})}{-U_{n+1}^{j,k}, W_{n+1}^{j,k}} \left| \begin{array}{ccc} 1, 1 & 1, 0 & 1, 0 \\ 1, 0 & 1, 0 & 1, 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} 0, 0 \\ 0, 0 \end{array}$$

となる. このときは Figure 8 のように「リング」が外側に拡がってがっていくのが観測される. また,  $0 \leq A \leq 1, B = 1$  のときは, ルール表は

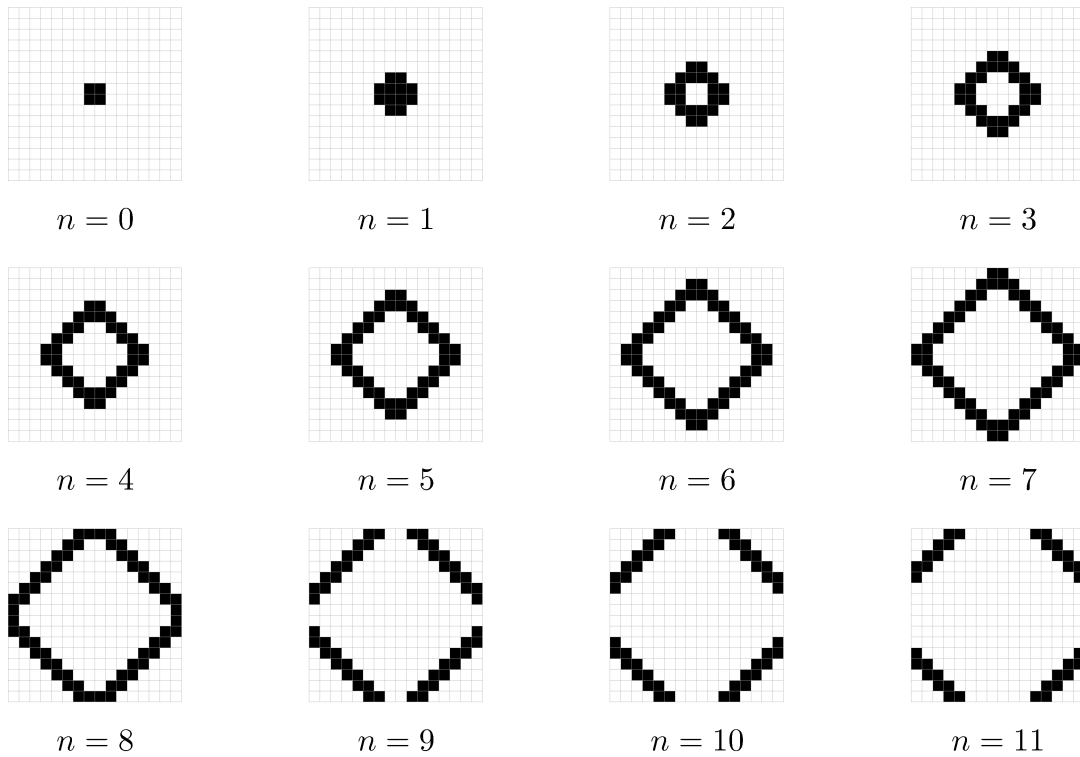


Figure 8.  $2 \times 2$  の塊のある初期値から始めると、そこから「リング」が広がる。

$$\frac{-M_p(U_n^{j,k}), M_q(W_n^{j,k})}{-U_{n+1}^{j,k}, W_{n+1}^{j,k}} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline 0, 0 & 0, 0 & 1, 1 & 0, 0 \end{array} \right.$$

となる。拡散比が等しい  $p = q = 1$  のときは、Figure 9 に見られるようにパターンはカオス的な振る舞いをする。拡散比を変えて  $p = 2, q = 1$  とすると、 $2 \times 2$  の塊のある初期値から始めると、Figure 10 に見られるように、その塊が増殖するのが観察される。

### §5. まとめ

1 階の常微分方程式や放物型偏微分方程式を系統的に超離散方程式に変換する手順である「トロピカル離散化」の方法を用いて、2 成分の反応拡散系である Gray-Scott モデルを元に超離散モデルを構成した。そのモデルはとり得る値を有限個に制限することでセル・オートマトンとみなすことができ、パラメータの違いでルールの異なるセル・オートマトンを得ることができた。それらのセル・オートマトンについて、時空パターンの分類を行い、エレメンタリー・セル・オートマトンのルール 90 と等価になるものも含まれることが分かった。この結果は Wolfram によるセル・オートマトン理論の 20 の問題のうちの第 9 問題「セル・オートマトンと連続系の対応」[14] に対して 1 つの答えを与えるものとする。しかし、トロピカル離散化により ECA ルール 90 と等価なものが得られるのはこれだけではない。例えば、BZ 反応のモデル化の 1 つであるブリュッセレータ [9] と呼

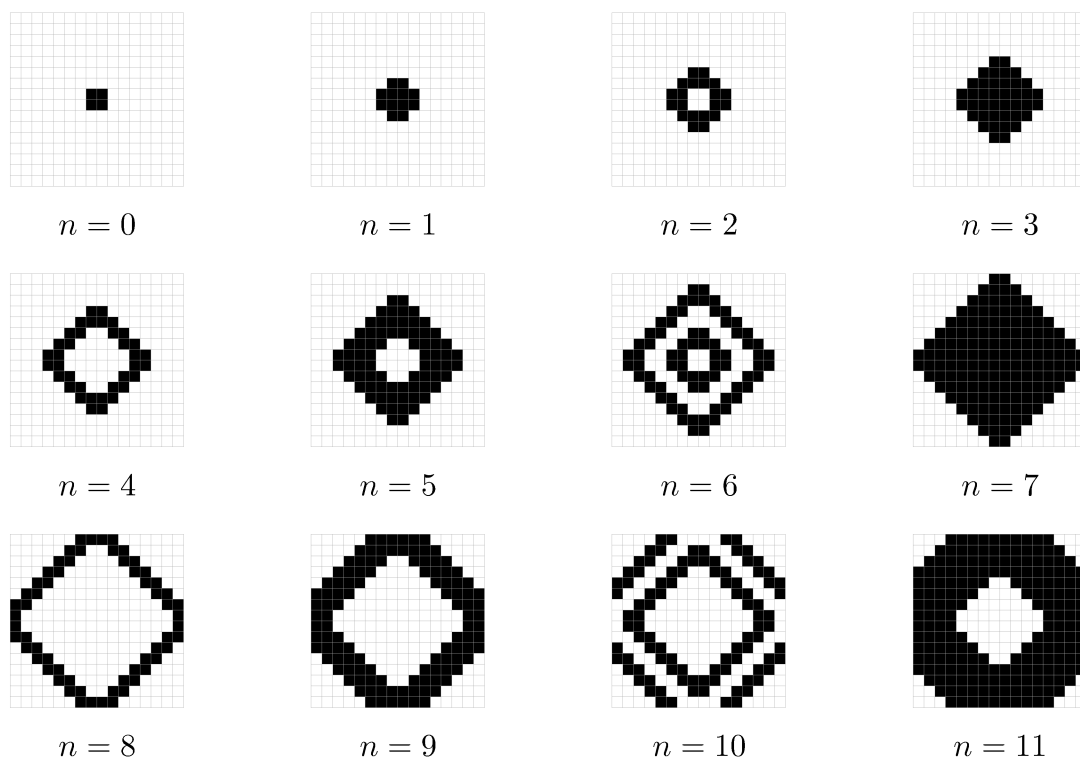


Figure 9. カオスパターン. 消滅と生成を複雑に繰り返しながら拡散していく.

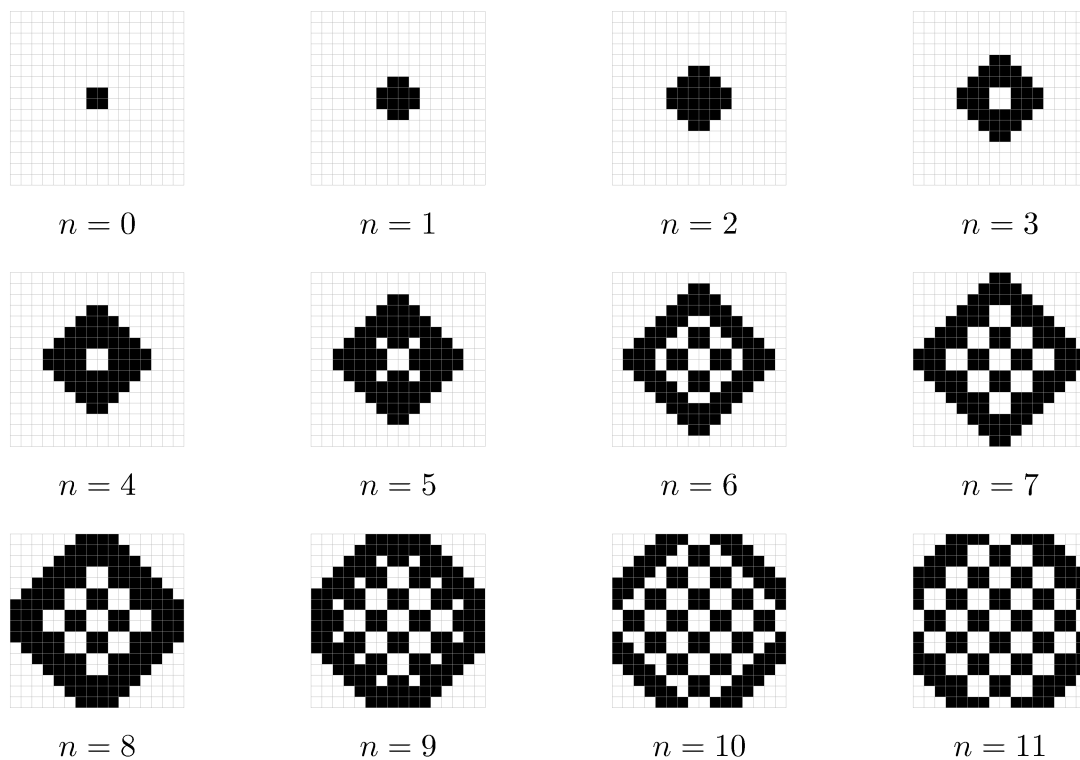


Figure 10. 自己複製パターン.  $2 \times 2$  の塊が増殖するのが確認できる.

ばれる数理モデルは

$$(5.1a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a - (b+1)u + u^2 v,$$

$$(5.1b) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bu - u^2 v$$

という反応拡散系であるが, (5.1) にトロピカル離散化を行うと

$$(5.2a) \quad u_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1} m_p(u_n^j) + a + m_p(u_n^j)^2 m_q(v_n^j)}{\varepsilon^{-1} + b + 1},$$

$$(5.2b) \quad v_{n+1}^j = \frac{\varepsilon^{-1} m_q(v_n^j) + b u_{n+1}^j}{\varepsilon^{-1} + (u_{n+1}^j)^2}$$

を得て, (5.2) に超離散化を行うと

$$U_{n+1}^j = \max \{ M_p(U_n^j) - E, A, 2M_p(U_n^j) + M_q(V_n^j) \} - \max(-E, B, 0),$$

$$V_{n+1}^j = \max \{ M_q(V_n^j) - E, B + U_{n+1}^j \} - \max(-E, 2U_{n+1}^j)$$

を得る. 特に  $E \rightarrow \infty$  のときは

$$(5.3a) \quad U_{n+1}^j = \max \{ A, 2M_p(U_n^j) + M_q(V_n^j) \} - \max(B, 0),$$

$$(5.3b) \quad V_{n+1}^j = B - U_{n+1}^j$$

となるので, (5.3b) の関係を (5.3a) に代入して,  $U_n^j$  のみの式

$$U_{n+1}^j = \max \{ A, 2M_p(U_n^j) + M_q(-U_n^j) + B \} - \max(B, 0)$$

に単独化できる. パラメータが  $A = 0, B = -L < 0$  のときは

$$U_{n+1}^j = \max \{ 0, 2M_p(U_n^j) + M_q(-U_n^j) - L \}$$

となり,  $U_n^j \in \{0, 1, \dots, L\}$  に制限することができる.  $L = 1$  のとき, ルール表は

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} M_p(U_n^j), -M_q(-U_n^j) & 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline U_{n+1}^j & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

となり, Gray-Scott セル・オートマトンのタイプ II と等価になる. したがって  $p = q = 1$  のときは ECA90 と等価になることがわかる.  $L$  を大きくすると Gray-Scott セル・オートマトンとは異なるものになる.  $L = 2$  で  $p = q = 1$  のときは Figure 11 のように時間がたつと値は 0 か 2 の 2 値しかとらないようになり, このルールの  $U_n^j \in \{0, 2\}$  への制限は  $L = 1$  のときのルールと等価であるため, その後は Figure 4 のパターンと酷似する. このときも, 拡散比を変えて  $p = 1, q = 2$  とすると, Figure 12 のような定在型自己複製パ

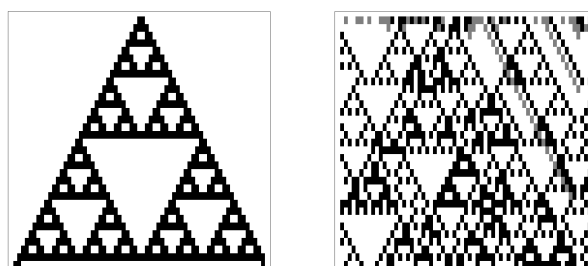


Figure 11.  $L = 2$  かつ  $p = q = 1$  のときの  $U_n^j \in \{0, 1, 2\}$  の時空パターン. 左は1カ所にだけ  $L = 2$  の塊を配した初期値, 右はランダムな初期値.

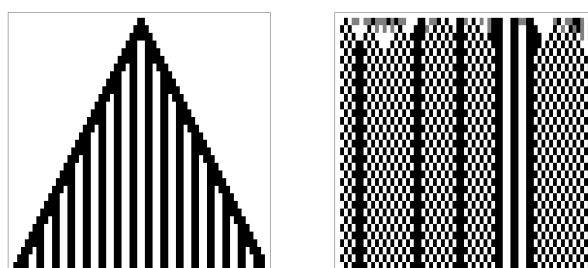


Figure 12.  $L = 2$  かつ  $p = 1, q = 2$  のときの  $U_n^j \in \{0, 1, 2\}$  の時空パターン. 左は1カ所にだけ  $L = 2$  の塊を配した初期値, 右はランダムな初期値.

ターンが観察される. この場合も時間がたつと値は0か2の2値しかとらないようになり, その後は Figure 5 のパターンと酷似する. このように, 異なる微分方程式が同じような現象を示すという場合に, もしこの離散化により同じセル・オートマトンが得られるとすれば, それは微分方程式の間に共通の構造が存在することを明示的に示したことになるのではないかと考える.

本論文では, 主に超離散系のパターンを提出し, 連続系のパターンと類似したものが見られることを確認した. 今後は超離散系の導出に用いた差分系の数値計算を行うことで, 微分, 差分, 超離散の3つのモデルに対して解の対応関係を与えたい. また, 他の反応拡散系についてもこのような手法で超離散モデルを構成し, 連続系の特徴を保持しているか検証を行いたい. 更に, 放物型以外の偏微分方程式に対して, 連続系の特徴を保持する超離散化の一般的な手法を提出することも課題である.

超離散方程式は, 区分別形方程式であるため厳密解を求めやすい, 解析が容易であるという優れた特徴がある. 既存の微分方程式モデルに対してトロピカル離散化の手法を用いて新たな数理モデルが構成され, モデル化された現象についてより一層の解明がなされることも期待される.

## References

- [1] P. Gray, S. K. Scott: “Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor”, Chem. Engrg. Sci. **38** (1983), 29–43.
- [2] P. Gray, S. K. Scott: “Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor; Oscillations and instabilities in the system  $A + 2B \rightarrow 3B, B \rightarrow C$ ”, Chem. Engrg. Sci. **39** (1984), 1087–1097.
- [3] P. Gray and S. K. Scott: “Sustained oscillations and other exotic patterns of behavior in isothermal reactions”, J. Phys. Chem. **89** (1985), 22–32.
- [4] R. Hirota, K. Iwao, A. Ramani, D. Takahashi, B. Grammaticos and Y. Ohta: “From integrability to chaos in a Lotka-Volterra cellular automaton”, Phys. Lett. A **236** (1997), 39–44.
- [5] W. Kunishima, A. Nishiyama, H. Tanaka and T. Tokihiro, “Differential equations can create complex cellular automaton patterns”, J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004), 2033–2036.
- [6] K. Matsuya and T. Tokihiro: “Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation”, Discrete Contin. Dyn. Syst. **31** (2011), 209–220.
- [7] M. Murata: “Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-Cahn equation”, J. Difference Equ. Appl.
- [8] M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani and B. Grammaticos: “How to discretize differential systems in a systematic way”, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), 315203 (15pp).
- [9] I. Prigogine, R. Lefever, “Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. II”, J. Chem. Phys. **48** (1968), 1695–1700.
- [10] D. Takahashi, A. Shida and M. Usami, “On the pattern formation mechanism of (2+1)D max-plus models”, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001), 10715–10726.
- [11] H. Tanaka, A. Nakajima, A. Nishiyama and T. Tokihiro, “Derivation of a Differential Equation Exhibiting Replicative Time-Evolution Patterns by Inverse Ultra-Discretization”, J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009), 034002 (5pp).
- [12] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma: “From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure”, Phys. Rev. Lett. **29** (1996), 3247–3250.
- [13] R. Willox, B. Grammaticos, A. S. Carstea and A. Ramani: “Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models”, Phys. A **328** (2003), 13–22.
- [14] S. Wolfram, “Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata”, Physica Scripta. **1985** (1985), 170–183.