RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B44 (2013), 115–139

Robba 環上の de Rham(φ, Γ)-加群の岩澤理論

By

中村　健太郎 (Kentaro NAKAMURA)*

Abstract

In this survey paper, we explain the results of the author's article "Iwasawa theory of de Rham (φ, Γ)-modules over the Robba ring". In §2, we first explain the definition of the Bloch-Kato exponential map for (φ, Γ)-modules over the Robba ring. In §3, we explain the results on the Perrin-Riou exponential map for de Rham (φ, Γ)-modules.

Contents

Received April 2, 2012. Revised February 27, 2013.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11F80; Secondary 11F85, 11R23.
Key Words: p-adic Hodge theory, (φ, Γ)-modules.
*北海道大学大学院理学研究院数学部門.
e-mail: `kentaro@math.sci.hokudai.ac.jp`

References

§1. 始めに: p-進表現の場合

本稿の目的は, 論文 "K.Nakamura, Iwasawa theory of de Rham (φ, Γ)-modules over the Robba ring. to appear in Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu" [Na13] の内容を解説することである. p を素数, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, G_K を K の絶対ガロア群とする. 論文の主結果は, G_K の p-進表現に対して定義される Bloch-加藤 exponential 射を Robba 環上の (φ, Γ)-加群の場合へ一般化し, G_K のクリスタリン表現に対して定義される Perrin-Riou exponential 射を Robba 環上の de Rham (φ, Γ)-加群の場合へ一般化することである.

Robba 環上の (φ, Γ)-加群とは, p 進体の p-進ガロア表現を一般化した p-進微分方程式的な対象である. 特に, p 進体の p-進ガロア表現の圏から Robba 環上の (φ, Γ)-加群の圏への自然な充満忠実関手が存在する. p-進局所 Langlands 対応や p-進保型形式の族 (eigenvariety) と密接に関連することが発見されて以来, Robba 環上の (φ, Γ)-加群に関する研究が近年活発に行われるようになってきている.

論文の内容の解説は 2 章以降に回し, この章では, まず p-進表現の場合に Bloch-加藤 exponential 射と Perrin-Riou exponential 射に関してこれまでに知られている結果を復習し, 次にこれらの結果を p-進表現から Robba 環上の (φ, Γ)-加群の場合へ拡張することの意義について (の筆者の考えを) 解説したい.

§1.1. Bloch-加藤 exponential 射

Bloch-加藤は, モチーフの L-関数の特殊値に関する玉河数予想の論文 [BK90] において, G_K の p-進表現に対して Bloch-加藤 exponential 射と呼ばれる重要な射を定義した. $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ を Fontaine の p-進周期環とする ([Fo94]). G_K の p-進表現 V の Bloch-加藤 exponential 射は, Bloch-加藤基本完全列と呼ばれる $\mathbb{Q}_p[G_K]$-加群の完全列

$$0 \to \mathbb{Q}_p \xrightarrow{x \mapsto (x,x)} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \xrightarrow{(x,y) \mapsto x-y} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \to 0$$

に V をテンソルした $\mathbb{Q}_p[G_K]$-加群の完全列

$$0 \to V \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$

のガロアコホモロジーを取って得られる長完全列

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{H}^0(K, V) \to \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \oplus \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \\ &\to \mathrm{H}^1(K, V) \to \mathrm{H}^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \oplus \mathrm{H}^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to \mathrm{H}^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \\ &\to \mathrm{H}^2(K, V) \to \mathrm{H}^2(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to 0 \end{aligned}$$

の境界射

$$\exp_{K,V} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) := \mathrm{H}^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to \mathrm{H}^1(K, V)$$

として定義される. V が de Rham 表現のときは, その双対として双対 exponential 射

$$\exp^*_{K,V^*(1)}: \mathrm{H}^1(K,V) \to \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)$$

が定義される ($V^*(1)$ は V の Tate 双対を表す).

円単数や加藤のゼータ元などの数論的に重要なガロアコホモロジーの元の双対 exponential 射による像は, 付随する L-関数の特殊値を用いて記述出来ることが知られており ([BK90], [Ka93],[Ka04]), Bloch-加藤 exponential 射と双対 exponential 射は L-関数の特殊値の研究において重要である.

§ 1.2. Perrin-Riou exponential 射

Perrin-Riou は, p-進表現の p-進 L-関数と岩澤理論に関する研究 [Per94],[Per95] において, Bloch-加藤 exponential 射を p-進補間する Perrin-Riou exponential 射と呼ばれる射を構成した. p-進 L-関数は, L-関数の特殊値を p-進補間する p-進的な関数として定義されるので, ガロアコホモロジーと L-関数の特殊値を結び付ける Bloch-加藤 exponential 射を p-進補間することは, p-進 L-関数や岩澤理論の研究において重要となる.

1 の原始 p^n 乗根 $\zeta_{p^n} \in \overline{K}^\times$ からなる集合 $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq 0} \subseteq \overline{K}^\times$ で, 各 $n \geqq 0$ に対して $\zeta^p_{p^{n+1}} = \zeta_{p^n}$ を満たすものを固定する. F を K の中の $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大, $K_n := K(\zeta_{p^n})$ $(n \geqq 0)$ (慣例とは異なるが, 本稿では $K_0 := K$ と記す), $K_\infty := \cup_{n\geqq 0} K_n$, $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ と定める. p-進円分指標を $\chi: \Gamma_K \hookrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ と記す (つまり, $\gamma \in \Gamma_K$ に対して $\gamma(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{\chi(\gamma)}$ $(n \geqq 1)$ を満たす指標). $\mathbf{e}_1 := \{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq 0} \in \varprojlim_n \mu_{p^n} =: \mathbb{Z}_p(1)$, $\mathbf{e}_k := \mathbf{e}_1^{\otimes k} \in \mathbb{Z}_p(k) := \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ と定める. G_K の p-進表現 V と $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $V(k) := V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(k)$ と定める.

$\Lambda_K := \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\Gamma_K/\Gamma_{K_n}]$ を Γ_K の岩澤代数とする. G_K の p-進表現 V に対して, V の岩澤コホモロジーを

$$\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,V) := (\varprojlim_n \mathrm{H}^q(K_n,T)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

(ここで, $T \subseteq V$ は G_K の作用で閉じている有限生成 $\mathbb{Z}_p$-加群で V の基底を含むものとし, 射影極限は co-restriction $\mathrm{H}^q(K_{n+1},T) \to \mathrm{H}^q(K_n,T)$ に対して取る) で定義される Λ_K-加群とする. 各 $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ に対して自然な射

$$\mathrm{pr}_{K_n,k}: \mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,V) \to \mathrm{H}^q(K_n, V(k))$$

が存在する. つまり, $\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ は $\{\mathrm{H}^q(K_n,V(k))\}_{n,k}$ を "p-進補間" する Λ_K-加群とみなせる.

K は $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐であると仮定する. このとき, $\chi: \Gamma_K \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ は同型となり, Λ_K は $\mathbb{Z}_p^\times$ の岩澤代数, つまり $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の $\mathbb{Z}_p$ に値を取る測度のなす環と自然に同型となる. $\Lambda_\infty \supseteq \Lambda_K$ を $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の $\mathbb{Q}_p$ に値を取る distribution のなす環とする.

G_K の p-進表現 V に対して $\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V) := (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$ と定める. Perrin-Riou[Per94] は, V がクリスタリン表現のときに $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V)$ の部分 Λ_∞-加群 $(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}$ と, $k\in\mathbb{Z}_{\leqq 0}$, $n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ に対して射

$$\Xi_{K_n,k} : (\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}\to K_n\otimes_K \mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V(k))$$

を定義し, さらに, 十分大きな $h\geqq 1$ に対して Λ_∞-加群の準同型

$$\Omega_{V,h} : (\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}\to \Lambda_\infty\otimes_{\Lambda_K}(\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)_{\mathrm{tor}})$$

を構成し, この射が任意の $0\geqq k\geqq -(h-1)$, $n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$, $x\in(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}$ に対して等式

$$\mathrm{pr}_{K_n,k}(\Omega_{V,h}(x)) = (h+k-1)!\exp_{K_n,V(k)}(\Xi_{K_n,k}(x))$$

を満たすことを証明した. さらに, $\Omega_{V,h}$ の "逆写像" は V の双対 exponential 射を p-進補間すると予想した (Rec(V)-予想). この予想は, Colmez [Col98], 加藤-栗原-辻 [KKT96], Benois [Ben00] らによって証明された. これらの性質から, 円単数や加藤のゼータ元を p-進補間するオイラーシステムから定まる岩澤コホモロジーの元が, $\Omega_{V,h}$ の逆写像によって対応する p-進 L-関数 (Λ_∞ の元として定義される) と結び付くようになる. 実際に, $V=\mathbb{Q}_p(1)$ のときは $\Omega_{\mathbb{Q}_p(1),1}$ の逆写像は Coleman 準同型と一致し, 円単数からなるオイラーシステムから久保田-Leopoldt の p-進 L-関数が得られる. さらに, f を Hecke 固有的なカスプ形式でレベルが p を割らないものとし, V を f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の二次元 p-進表現の $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限としたときには, 加藤のオイラーシステムから f の p-進 L-関数が得られる ([Ka04]).

§1.3. p-進表現から Robba 環上の (φ,Γ)-加群への一般化

筆者の見解では, p-進表現に関する様々な理論を Robba 環上の (φ,Γ)-加群の場合へ拡張することの意義は, 次の 2 点にあると思われる.

(1) p-進表現の研究に p-進解析的な手法が使えるようになる.

(2) より広い圏の中で考えることで, 従来は見ることが困難であった p-進ガロア表現の新たな構造を研究することが可能になる.

本節では (1), (2) について, 簡単な歴史を交えつつ解説したい.

まず (1) に関して. p-進体の p-進ガロア表現の研究に Robba 環上の (φ,Γ)-加群を導入したのは, Berger の研究 [Ber02] に始まる. Berger はこの論文で, Fontaine [Fo90] によるエタール (φ,Γ)-加群の理論, Cherbonnier-Colmez [CC98],[CC99] による過収束 (φ,Γ)-加群の理論及び Kedlaya[Ke04] の φ-加群の理論の結果を受けて, p-進表現から Robba 環上の (φ,Γ)-加群への充満忠実関手を構成し, Fontaine の関手 $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(-),\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(-)$ を Robba 環上の (φ,Γ)-加群のみを用いて定義することに成功した. このことにより, 対応する Robba 環上の (φ,Γ)-加群 (より正確には Frobenius 作用付きの p-進微分方程式) の Crew 予想 (André, Kedlaya, Mebkhout により解決された) に帰着することで, p-進局所モノドロミー

予想 (de Rham 表現ならば潜在的準安定表現となるという予想) が解決されたことは有名である．このように, p-進表現に関する問題を対応する (φ,Γ)-加群に関する p-進微分方程式的な問題に置き換えて研究することは, 近年では標準的かつ非常に強力な研究手法になっていて (例えば, Colmez[Co10] は (エタール)(φ,Γ)-加群の持つ p-進解析 (p-進 Fourier 変換) 的構造を駆使することで, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進局所 Langlands 対応を構成した), p-進 L-関数という p-進解析的な対象と密接に関係する Bloch-加藤 exponential 射及び Perrin-Riou exponential 射を Robba 環上の (φ,Γ)-加群の枠組みで研究することにも大きな意義があると思われる．実際に, Colmez[Co10] による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 "Banach ユニタリー許容的" 表現の局所代数的ベクトルの研究では, de Rham (φ,Γ)-加群の Perrin-Riou exponential 射に関する我々の研究と類似の議論が多くなされており, 両者の関係を研究することが今後重要になると期待している．

次に (2) に関して．Colmez[Co08] は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p-進局所 Langlands 対応に関する一連の研究の中で, Robba 環上の (φ,Γ)-加群の圏を用いて三角表現と呼ばれる p-進ガロア表現のクラスを定義した．三角表現は可約 p-進表現の一般化であり, 対応する Robba 環上の (φ,Γ)-加群が階数 1 の (φ,Γ)-加群による拡大の繰り返しで書けるような p-進表現と定義される．簡単な定義のために, 三角表現は明示的に分類することが可能であり, 非常に扱い易い表現のクラスである ([Co08], [Na09])．そして実際に, 多くの重要な既約 p-進表現が三角表現になる．例えば, 全てのクリスタリン表現及び準安定表現は三角表現となる．特に, レベルが p を割らない楕円保型形式に付随する p-進表現 (の p での分解群への制限) も三角表現となる．この性質を用いて, p で通常な保型形式の岩澤主予想の研究 ([Ka04]) を p で有限スロープを持つ場合へ一般化する研究 ([Po10],[Po11]) が行われている．より一般に, p で通常な p-進保型形式の肥田族を p で有限スロープを持つ場合へ一般化した eigenvariety と呼ばれるリジッド解析的多様体上に付随する p-進表現の族が, 三角表現の族となっていることが発見された ([Ki03], [Co08])．以来, eigenvariety 上の p-進表現の族と関連した三角表現の族の研究が近年活発に行われている ([Bel-Ch09],[Ch11],[Ch12],[Hel12],[KPX12], [Li12],[Na10],[Na11] など)．今後, Pottharst の研究 ([Po10],[Po11]) を精密化したり, eigenvariety 上の p-進ガロア表現の族に対する岩澤理論を研究したりする際にも, 我々の Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する exponential 射の理論が有用になるはずである．

§ 1.4. 本論の構成

ここでは, 本論第 2 章以降の構成を簡単に説明する．

第 2 章では Robba 環上の (φ,Γ)-加群の Bloch-加藤 exponential 射に関して筆者が得た結果を解説する．§2.1 では Robba 環及び関連する Fontaine の p-進周期環の定義を復習し, §2.2 では Robba 環上の (φ,Γ)-加群の定義を復習する．§2.3 では Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する Fontaine 関手 ($\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(-), \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(-)$ など) の定義を復習し, §2.4 では Robba 環上の (φ,Γ)-加群の "ガロアコホモロジー" に関する Liu の結果 [Li08] を復習する．§2.5 で Robba 環上の (φ,Γ)-加群の Bloch-加藤 exponential 射に関して筆者が得た結果を解説する．

第 3 章では de Rham (φ,Γ)-加群の Perrin-Riou exponential 射に関して筆者が得た

結果を解説する．§3.1 では Pottharst[Po10], [Po11] による解析的岩澤コホモロジーの理論を復習し, §3.2 では Berger [Ber08b] による de Rham (φ,Γ)-加群に付随する p-進微分方程式の構成を復習する．§3.3 で de Rham (φ,Γ)-加群に対する Perrin-Riou expoenential 射を定義し, その射が Bloch-加藤 exponential 射を p-進補間していることを表す定理を解説する．§3.4 では de Rham (φ,Γ)-加群に対する Perrin-Riou expoenential 射の行列式に関する定理 $(\delta(D))$ について解説する．§3.5 ではクリスタリン (φ,Γ)-加群の場合に制限し, §3.4, §3.5 の結果と Perrin-Riou expoenntial 射に関する従来の結果との比較について解説する．

§ 2. Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する Bloch-加藤 exponential 射の定義

この章では, Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する Bloch-加藤 exponential 射に関して筆者の得た結果を解説する．

§ 2.1. Robba 環の定義

Robba 環上の (φ,Γ)-加群を定義するため, まずは [Ber02] に従い K の Robba 環 $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ を定義する．

$\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の p-進完備化とし, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ をその整数環とする．$v_p:\mathbb{C}_p^{\times}\to\mathbb{Q}$ を $v_p(p)=1$ と正規化した付値とする．

$\widetilde{\mathbf{E}}^+ := \varprojlim_{n\geqq 0}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p$ を p-乗写像による射影極限とする．$x=(x_n)_{n\geqq 0}\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$ に対し, $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x) := \lim_{n\to\infty}p^n v_p(\tilde{x}_n)$ と定義することで, $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ は付値 $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ を持つ完備な付値環となり, さらにこの位相に関して G_K が連続に作用する．固定した $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq 0}$ に対して, $\varepsilon := (\overline{\zeta}_{p^n})_{n\geqq 0}\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$ と定義する．$\widetilde{\mathbf{E}}$ を $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ の商体とする．これは代数閉体となることが知られている．$\widetilde{\mathbf{E}}^+, \widetilde{\mathbf{E}}$ 上 p 乗写像は同型なので, それらの Witt 環 $\widetilde{\mathbf{A}}^+ := W(\widetilde{\mathbf{E}}^+), \widetilde{\mathbf{A}} := W(\widetilde{\mathbf{E}})$ が定義できる．これらは p 乗写像の唯一の持ち上げである Frobenius 作用 φ を持ち, 商写像 $\widetilde{\mathbf{A}}^{(+)}\to\widetilde{\mathbf{A}}^{(+)}/p\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathbf{E}}^{(+)}$ が連続となる最弱の位相を $\widetilde{\mathbf{A}}^{(+)}$ に入れると自然な G_K の作用は連続となる．$[\ ]:\widetilde{\mathbf{E}}\to\widetilde{\mathbf{A}}$ を Teichmüller 持ち上げとする．連続環準同型 $\theta:\widetilde{\mathbf{A}}^+\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ で $\theta([(x_n)_{n\geqq 0}])=\lim_{n\to\infty}\tilde{x}_n^{p^n}$ ($\tilde{x}_n\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は, $x_n\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p$ の持ち上げ) を満たすものが唯一つ存在する．θ は全射であり, $\omega := \frac{[\varepsilon]-1}{[\varepsilon^{1/p}]-1}\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$ とおくと, $\mathrm{Ker}(\theta)=(\omega)$ となることが知られている．$\widetilde{\mathbf{B}}^+ := \widetilde{\mathbf{A}}^+[1/p]$ とおき, p を可逆にした射も同様に $\theta:\widetilde{\mathbf{B}}^+\to\mathbb{C}_p$ と記す．$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} := \varprojlim_n\widetilde{\mathbf{B}}^+/\mathrm{Ker}(\theta)^n$ と定義する．θ は全射 $\theta:\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\to\mathbb{C}_p$ を誘導し, $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ は $\mathrm{Ker}(\theta)$ を極大イデアルに持つ完備離散付値環となる．$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ の商体を $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ とおく．$[\varepsilon]-1\in\mathrm{Ker}(\theta)$ であるから, $t := \log([\varepsilon]) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}([\varepsilon]-1)^n}{n}\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ となる．$\mathrm{Ker}(\theta)=t\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ となることが知られている．有理数 $0\leqq r\leqq s\leqq+\infty$ に対して, $\widetilde{\mathbf{A}}_{[r,s]} := \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\varepsilon-1]^r},\frac{[\varepsilon-1]^s}{p}]^{\wedge}$ (環 A に対して, $A^{\wedge}$ で A の p-進完備化を表す), $\widetilde{\mathbf{B}}_{[r,s]} := \widetilde{\mathbf{A}}_{[r,s]}[1/p]$ とおく (ただし, $s=+\infty$ の場合は, $\frac{[\varepsilon-1]^s}{p} := 1$ とおく)．これらには G_K が作用し, $\varphi:\widetilde{\mathbf{A}}_{[r,s]}\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathbf{A}}_{[pr,ps]}$ を満たす．$0\leqq r<+\infty$ 対して, $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r} := \widetilde{\mathbf{A}}_{[r,+\infty]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} := \widetilde{\mathbf{B}}_{[r,+\infty]}\subseteq\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}} := \cap_{r\leqq s<+\infty}\widetilde{\mathbf{B}}_{[r,s]}$ と定義し, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} := \cup_r\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}, \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} := \cup_r\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ とおく．$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}_p} := \mathbb{F}_p((\varepsilon-1))\subseteq\widetilde{\mathbf{E}}$ とし, その分離閉包を

$\mathbf{E}\subseteq\widetilde{\mathbf{E}}$ と書くことにする．$T:=[\varepsilon]-1\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$ とおき，$\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}:=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n|a_n\in\mathbb{Z}_p,\,a_n\to 0\,(n\to-\infty)\}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}$ とおく．$\varphi(T)=(1+T)^p-1$, $\gamma(T)=(1+T)^{\chi(\gamma)}-1$ $(\gamma\in\Gamma_{\mathbb{Q}_p})$ を満たす．$\mathbf{A}\subseteq\widetilde{\mathbf{A}}$ を $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}$ の強 Hensel 化の p-進完備化とし，$\mathbf{B}_{\mathbb{Q}_p}:=\mathbf{A}_{\mathbb{Q}_p}[1/p],\mathbf{B}:=\mathbf{A}[1/p]$, $\mathbf{A}^{\dagger,r}:=\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}\cap\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}:=\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}\cap\mathbf{B}$ とおく．$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}\subseteq\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ を Fréchet 位相に関する $\mathbf{B}^{\dagger,r}$ の閉包とし，$\mathbf{A}^\dagger:=\cup_r\mathbf{A}^{\dagger,r}$, $\mathbf{B}^\dagger:=\cup_r\mathbf{B}^{\dagger,r}$, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig}}:=\cup_r\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}$ とおく．これらにも $G_{\mathbb{Q}_p},\varphi$ が作用する．$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 K に対して，$\mathbf{A}^{\dagger,r}_K:=(\mathbf{A}^{\dagger,r})^{H_K}$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_K:=(\mathbf{B}^{\dagger,r})^{H_K}$, $\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}:=(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})^{H_K}$, $\mathbf{A}^\dagger_K:=(\mathbf{A}^\dagger)^{H_K}$, $\mathbf{B}^\dagger_K:=(\mathbf{B}^\dagger)^{H_K}$, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}:=(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig}})^{H_K}$ とおく．これらには Γ_K が作用し，$\varphi(\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K})\subseteq\mathbf{B}^{\dagger,pr}_{\mathrm{rig},K}$ を満たす．K が $\mathbb{Q}_p$ の不分岐拡大のときは，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\dagger,r}_K&=\{f(T)=\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n|a_n\in\mathcal{O}_K,f(T)\text{ は}\frac{1}{r}\geqq v_p(T)>0\text{ で収束する }\}\\ \mathbf{B}^{\dagger,r}_K&=\{f(T)=\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n|a_n\in K,f(T)\text{ は}\frac{1}{r}\geqq v_p(T)>0\text{ で収束し, 有界 }\}\\ \mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}&=\{f(T)=\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n|a_n\in K,f(T)\text{ は}\frac{1}{r}\geqq v_p(T)>0\text{ で収束する }\}\end{aligned}$$

となり，

$$\varphi(\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(a_n)((1+T)^p-1)^n,\gamma(\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n((1+T)^{\chi(\gamma)}-1)^n$$

$(\gamma\in\Gamma_K)$ と作用する．一般の K の場合は，$F'\subseteq K_\infty$ を $\mathbb{Q}_p$ の K_∞ 内での最大不分岐拡大とし，$e:=[K_\infty,F'(\zeta_{p^\infty})]$ とおくと，十分大きな $r(K)>0$ とある元 $\pi_K\in\mathbf{B}^{\dagger,r(K)}_{\mathrm{rig},K}$ が存在して，$r\geqq r(K)$ に対して，

$$\mathbf{B}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig},K}:=\{f(\pi_K)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\pi_K^n|a_n\in F',f(X)\text{ は}\frac{1}{er}\geqq v_p(X)>0\text{ で収束する }\}$$

$(\mathbf{A}^{\dagger,r}_K,\mathbf{B}^{\dagger,r}_K$ も同様) となることが知られている．$t\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ は，$t=\log([\varepsilon])=\log(1+T)$ なので，$\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}$ となることに注意．$n\in\mathbb{Z}_{\geqq0}$ に対して，$r_n:=(p-1)p^{n-1}$ とおく．$G_{\mathbb{Q}_p}$-同変な射を $\iota_n:\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig}}\xrightarrow{\varphi^{-n}}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_0}_{\mathrm{rig}}\xrightarrow{\mathrm{can}}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ と定義する．この射を $\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}$ に制限すると，

$$\iota_n:\mathbf{B}^{\dagger,r_n}_{\mathrm{rig},K}\hookrightarrow K_n[[t]]$$

を経由することが知られている．K が $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐のときは，

$$\iota_n(\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_mT^m)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\varphi^{-n}(a_m)(\zeta_{p^n}\exp(t/p^n)-1)^m$$

となる．

註記．　以上の定義の中で，T, t は $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq0}$ の選び方に依存し，また（一般の K に対しては) 不定元 π_K の標準的な選び方は存在しない（知られていない？）．しかし，この節に現れた全ての環及びそれらの間の射の定義は $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq0}$ の選び方に依存しないことに注意する．

§ 2.2. Robba 環上の (φ, Γ)-加群

以上の準備の下で, Robba 環上の (φ, Γ)-加群を次のようにして定義する.

定義 2.1. 以下の構造を持つ $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-加群 D を $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ, Γ)-加群と呼ぶ.

(1) D は有限生成自由 $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-加群,

(2) φ-半線形な準同型 $\varphi : D \to D$ を持ち, その線形化写像

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\varphi, \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}} D \to D : a \otimes x \mapsto a\varphi(x)$$

は同型となる,

(3) Γ_K-半線形な Γ_K の連続作用

$$\Gamma_K \times D \mapsto D : (\gamma, x) \mapsto \gamma(x)$$

を持つ,

(4) φ と Γ_K の作用は可換.

ここで, φ-半線形及び Γ_K-半線形とは, 任意の $a \in \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$, $x \in D$, $\gamma \in \Gamma_K$ に対して, $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x)$ 及び $\gamma(ax) = \gamma(a)\gamma(x)$ が成り立つこととする.

G_K の p-進表現と $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ, Γ)-加群との関係を述べるために次の定義をする.

定義 2.2. $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ, Γ)-加群 D がエタールであるとは, D の有限生成自由な部分 $\mathbf{A}^{\dagger}_{K}$-加群 D_0 で, 2 条件

(1) $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}_{K}} D_0 = D$,

(2) $\varphi(D_0) \subseteq D_0$ を満たし, さらに線形化写像

$$\mathbf{A}^{\dagger}_{K} \otimes_{\varphi, \mathbf{A}^{\dagger}_{K}} D_0 \to D_0 : a \otimes x \mapsto a\varphi(x)$$

は同型となる,

を満たすものが存在することと定義する.

次の定理によって, G_K の p-進表現の圏は $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ, Γ)-加群の圏に埋め込むことが出来る.

定理 2.3. (Fontaine [Fo90], Cherbonnier-Colmez [CC98], Kedlaya [Ke04]) 充満忠実な完全関手

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}} : \{G_K\text{の } p\text{-進表現の圏 }\} \hookrightarrow \{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}\text{上の } (\varphi, \Gamma)\text{-加群の圏 }\} : V \mapsto \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$$

が存在し, その本質的像 (essential image) は $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上のエタール (φ, Γ)-加群全体からなる充満忠実部分圏と一致する.

註記. 本稿では説明しないが, Berger は $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ と $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ を用いて, G_K の p-進表現の自然な一般化である $\mathbf{B}$-ペアと呼ばれる対象を定義した. そして, 上の定理の一般化として $\mathbf{B}$-ペアの圏と $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ 上の (φ,Γ)-加群の圏との圏同値を構成した ([Ber08a]). 従って, 本稿の全ての結果は, 原理的には $\mathbf{B}$-ペアを用いても同様にして得ることが出来るはずである. しかし, §1.3 で解説したように, p-進解析的な対象と関連付けることが重要な Bloch-加藤 exponential 射や Perrin-Riou's exponential 射の研究では Robba 環上の (φ,Γ)-加群で理論を組み立てる方が多くの利点があると考え, 論文 [Na13] では Robba 環上の (φ,Γ)-加群を選択した.

定義 2.4. 各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して, 階数 1 の (φ,Γ)-加群 $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}(k):=\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(k)=\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}\mathbf{e}_k$ を, $\varphi(\mathbf{e}_k):=\mathbf{e}_k,\gamma(\mathbf{e}_k):=\chi(\gamma)^k\mathbf{e}_k$ で定める. これはエタールであり, 自然な同型 $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(\mathbb{Q}_p(k))\xrightarrow{\sim}\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}(k)$ が存在する.

§ 2.3. Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する p-進 Hodge 理論

ここでは, p-進表現に対する Fontaine の関手 $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(V):=(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V):=(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$ の Robba 環上の (φ,Γ)-加群への一般化について解説する.

$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ 上の (φ,Γ)-加群 D に対して,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D):=(\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}[1/t]\otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}}D)^{\Gamma_K}$$

と定義する. D の φ 作用から自然に誘導される作用により, $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D)$ は F 上の φ-加群 (つまり, φ-半線形な同型 $\varphi:\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D)$ を持つ有限次元 F-ベクトル空間) となる.

次に, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D)$ の定義の為にいくつか準備をする. まず, D に対して正の整数 $n(D)$ と D の $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ 上の基底 $\{f_i\}_{1\leqq i\leqq d}$ で, 各 $n\geqq n(D)$ に対して $D^{(n)}:=\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r_n}f_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r_n}f_d$ とすると, $\varphi(D^{(n)})\subseteq D^{(n+1)}$ を満たし, かつ線形化 $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r_{n+1}}\otimes_{\varphi,\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r_n}}D^{(n)}\to D^{(n+1)}:a\otimes x\mapsto a\varphi(x)$ が同型となるようなものが存在する. さらに, このような $D^{(n)}$ は一意的に定まることが知られていて, 一意性により各 $D^{(n)}$ は Γ_K の作用でも閉じていることが示せる. 各 $n\geqq n(D)$ に対して

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D):=K_n[[t]]\otimes_{\iota_n,\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r_n}}D^{(n)}$$

と定義する. 射 $\iota_n:\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r_n}\hookrightarrow K_n[[t]]$ は Γ_K-同変なので, $\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D)$ は $D^{(n)}$ の Γ_K-作用から自然に誘導される Γ_K-作用を持つ. $K_\infty[[t]]:=\cup_{n=1}^{\infty}K_n[[t]]$ とし,

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D):=K_\infty[[t]]\otimes_{K_n[[t]]}\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D)$$

と定義する. Γ_K-同変な埋め込み $\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D)\hookrightarrow\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n+1}^{+}(D):a\otimes x\mapsto a\otimes\varphi(x)$ による帰納系によって, 自然な同型 $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}^{+}(D)\xrightarrow{\sim}\varinjlim_{n\geqq n(D)}\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D)$ を得るので $\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}^{+}(D)$ の定義は $n\geqq n(D)$ の選び方によらないことが分かる.

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}(D):=\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D)[1/t],\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D):=\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}^{+}(D)[1/t]$$

と定義する. 以上の定義の下で

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) := \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)^{\Gamma_K}$$

と定義し, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D)$ の部分 K-ベクトル空間による減少フィルトレイションを

$$\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) := (t^i\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}^{+}(D))^{\Gamma_K}\ \ (i \in \mathbb{Z})$$

と定義する.

定義 2.5. D を $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ 上の (φ, Γ)-加群とする.

(1) D がクリスタリンであるとは,

$$\dim_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D) = \mathrm{rank} D$$

を満たすことと定義する,

(2) D が de Rham であるとは,

$$\dim_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) = \mathrm{rank} D$$

を満たすことと定義する.

(3) D は de Rham とする. 有限集合 $\{h \in \mathbb{Z} | \mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D)/\mathrm{Fil}^{-h+1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) \neq 0\}$ の元を D の Hodge-Tate 重みと呼ぶ.

註記. p-進表現の場合と同様に, 一般には不等式

$$\dim_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D) \leqq \dim_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) \leqq \mathrm{rank} D$$

が成り立つ. よって, D がクリスタリンなら de Rham になる. D が de Rham なら自然な射

$$K_\infty((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D) : a \otimes x \mapsto ax$$

は同型となる. D がクリスタリンなら自然な射

$$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D) \xrightarrow{\sim} D[1/t] : a \otimes x \mapsto ax$$

は同型となり, $\iota_n : D^{(n)} \hookrightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}^{+}(D)$ $(n \geqq n(D))$ により誘導される射

$$K \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(D) : a \otimes x \mapsto a \cdot \iota_n(\varphi^n(x))$$

は n によらず, さらに同型になる. この同型により, D がクリスタリンのときは, $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^{K}(D)$ に K 上のフィルトレイション付き φ-加群の構造が入る.

§2.4. Robba 環上の (φ,Γ)-加群のコホモロジー

ここでは [Li08] に従い, p-進表現のガロアコホモロジーの Robba 環上の (φ,Γ)-加群への一般化について復習する.

Γ_K の有限捻れ部分加群 $\Delta \subseteq \Gamma_K$ で, その商 Γ_K/Δ が位相的生成元を持つものを一つ固定する. $\gamma \in \Gamma_K$ で, その Γ_K/Δ への像が位相的生成元となるものを一つ固定する. $\mathbb{Z}[\Delta]$-加群 M に対して, $M^{\Delta} := \{m \in M | \sigma(m) = m \ (任意の\sigma \in \Delta)\}$ とする. 以上の固定したデータの下, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ,Γ)-加群 D に対して, $D_0 = D, D[1/t], D_1 = \mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif}}(D), \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)$ とし, 次数 $[0,2]$, $[0,1]$ にそれぞれ項を持つ $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間の複体を

$$\begin{aligned} C^{\bullet}_{\varphi,\gamma,\Delta}(D_0) &:= [D_0^{\Delta} \xrightarrow{d_1} D_0^{\Delta} \oplus D_0^{\Delta} \xrightarrow{d_2} D_0^{\Delta}], \\ C^{\bullet}_{\gamma,\Delta}(D_1) &:= [D_1^{\Delta} \xrightarrow{d_1'} D_1^{\Delta}], \end{aligned}$$

ただし

$$d_1(x) := ((\gamma-1)x, (\varphi-1)x),\ \ d_2(x,y) := (\varphi-1)x - (\gamma-1)y,\ \ d_1'(x) := (\gamma-1)x$$

と定義する. これらのコホモロジーを

$$\mathrm{H}^q(K, D_0) := \mathrm{H}^q(C^{\bullet}_{\varphi,\gamma,\Delta}(D_0)),\ \ \mathrm{H}^q(K, D_1) := \mathrm{H}^q(C^{\bullet}_{\gamma,\Delta}(D_1))$$

と記す. 定義より, $\mathrm{H}^0(K, \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) = \mathbf{D}^{K}_{\mathrm{dR}}(D)$ であることに注意する.

$\mathrm{H}^q(K,D)$ の基本性質について, 次の定理が成り立つ.

定理 2.6. (Liu [Li08])

(1) $q \neq 0,1,2$ に対し, $\mathrm{H}^q(K,D) = 0$,

(2) $\mathrm{H}^q(K,D)$ は有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間,

(3) (Euler-Poincaré 公式)

$$\sum_{q=0}^{2} (-1)^q \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^q(K,D) = -[K:\mathbb{Q}_p]\mathrm{rank}D$$

が成り立つ,

(4) (トレース射) “留数写像” により定まる標準的な同型

$$j : \mathrm{H}^2(K, \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$$

が存在する,

(5) (Tate 双対性) $q=0,1,2$ に対して, カップ積により定まる次数付き可換なペアリング

$$<,>: \mathrm{H}^q(K,D)\times \mathrm{H}^{2-q}(K,D^*(1)) \xrightarrow{\cup} \mathrm{H}^2(K,D\otimes D^*(1)) \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathrm{H}^2(K,\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}(1)) \xrightarrow{j} \mathbb{Q}_p$$

は完全である. ここで, $D^* := \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}}(D,\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})$ は D の双対, $\mathrm{ev}:\mathrm{H}^2(K,D\otimes D^*(1))\to \mathrm{H}^2(K,\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}(1))$ は evaluation map $D\otimes D^*(1)\to \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}(1): x\otimes f\mathbf{e}_1\mapsto f(x)\mathbf{e}_1$ から自然に誘導される射とする.

§ 2.5. Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する Bloch-加藤 exponential 射の定義

V を G_K の p-進表現とする. Bloch-加藤の基本完全列

$$0\to\mathbb{Q}_p\to\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}\oplus\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\to 0$$

に V をテンソルした短完全列のコホモロジー長完全列をとることで完全列

$$\begin{aligned}0&\to \mathrm{H}^0(K,V)\to \mathrm{H}^0(K,\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\oplus \mathrm{H}^0(K,\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\to \mathrm{H}^0(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\\ &\to \mathrm{H}^1(K,V)\to \mathrm{H}^1(K,\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\oplus \mathrm{H}^1(K,\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\to \mathrm{H}^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\\ &\to \mathrm{H}^2(K,V)\to \mathrm{H}^2(K,\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\to 0\end{aligned}$$

が得られる. 論文 [Na13] の最初の結果は, この完全列の (φ,Γ)-加群の場合への一般化に関する次の定理である.

定理 2.7. ([Na13] Theorem 2.8, Theorem 2.19)

(1) V を G_K の p-進表現とする. V に関して関手的な次の同型が存在する.

(i) $\mathrm{H}^q(K,V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^q(K,\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V))$,

(ii) $\mathrm{H}^q(K,\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^q(K,D[1/t])$,

(iii) $\mathrm{H}^q(K,\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^q(K,\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif}}(D))$, $\mathrm{H}^q(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^q(K,\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$.

(2) D を $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ,Γ)-加群とする. D に関して関手的な次の完全列が存在する.

$$\begin{aligned}0&\to \mathrm{H}^0(K,D)\to \mathrm{H}^0(K,D[1/t])\oplus \mathrm{H}^0(K,\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif}}(D))\to \mathrm{H}^0(K,\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))\\ &\to \mathrm{H}^1(K,D)\to \mathrm{H}^1(K,D[1/t])\oplus \mathrm{H}^1(K,\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif}}(D))\to \mathrm{H}^1(K,\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))\\ &\to \mathrm{H}^2(K,D)\to \mathrm{H}^2(K,D[1/t])\to 0.\end{aligned}$$

(3) $D=\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ のとき (1) の同型は, (2) の完全列と V に対して Bloch-加藤の基本完全列を用いて定義される長完全列との同型を誘導する.

註記. 定理 (1) (i) は Liu [Li08] による. [Na13] Theorem 2.19 ではより一般に, $\mathbf{B}$-ペア W と対応する $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ,Γ)-加群 $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(W)$ に対して (1), (3) と同様の主張を証明している.

定義 2.8. 上の定理 (2) の完全列の境界準同型

$$\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D) = \mathrm{H}^0(K, \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) \to \mathrm{H}^1(K, D)$$

を D の Bloch-加藤 exponential 射と呼び, $\exp_{K,D}$ と書くことにする. 定義より $\exp_{K,D}$ は $\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ を経由する.

D が de Rham の場合, 双対 exponential 射を次のように定義する. まず, evaluation map $\mathrm{ev} : D \otimes D^*(1) \to \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}(1)$ と同型 $\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig}}(1)) = K\frac{1}{t}\mathbf{e}_1 \xrightarrow{\sim} K : \frac{a}{t}\mathbf{e}_1 \mapsto a$ (この同型は $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq 1}$ の選び方によらない) により, K-双線形なペアリング

$$[\,,]_{\mathrm{dR}} : \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D) \times \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D^*(1)) \to \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D \otimes D^*(1)) \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}(1)) \xrightarrow{\sim} K$$

を得る.

定義 2.9. 双対 exponential 射

$$\exp^*_{K,D} : \mathrm{H}^1(K, D^*(1)) \to \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D^*(1))$$

を, 任意の $x \in \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$, $y \in \mathrm{H}^1(K, D^*(1))$ に対し

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}([x, \exp^*_{K,D}(y)]_{\mathrm{dR}}) =< \exp_{K,D}(x), y >$$

を満たす唯一の射と定義する. p-進表現のときと同様に, $\exp^*_{K,D}$ の像は $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D^*(1))$ に含まれる.

$\exp_{K,D}$ 及び $\exp^*_{K,D}$ は, 次のようにして明示的な方法で定義することが出来る.

命題 2.10. ([Na13] Lemma 2.12, Proposition , 2.16)

(1) $n \geqq n(D)$ を $\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D) = (\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}(D))^{\Gamma_K}$ を満たす整数とする. $x \in \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ に対し, 任意の $m \geqq n$ に対して

$$\iota_m(\tilde{x}) - x \in \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},m}(D)$$

を満たす $\tilde{x} \in (D^{(n)}[1/t])^\Delta$ を取る (このような $\tilde{x}$ は必ず存在することが証明できる). このとき, $(\varphi-1)\tilde{x}, (\gamma-1)\tilde{x} \in D^\Delta$ であり,

$$\exp_{K,D}(x) = [((\gamma-1)\tilde{x}, (\varphi-1)\tilde{x})] \in \mathrm{H}^1(K, D)$$

が成り立つ.

(2) D は de Rham とする. このとき, 射

$$g_D : \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D) \to \mathrm{H}^1(K, \mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D)) : x \mapsto [\log(\chi(\gamma)) \otimes x]$$

は同型であり, $\exp^*_{K,D^*(1)}$ は合成写像

$$\mathrm{H}^1(K,D)\xrightarrow{\mathrm{can}}\mathrm{H}^1(K,\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))\xrightarrow{g_D^{-1}}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$$

と一致する. ただし, $\mathrm{can}:\mathrm{H}^1(K,D)\to\mathrm{H}^1(K,\mathbf{D}_{\mathrm{dif}}(D))$ は, $\mathrm{can}([(x,y)]):=[\iota_n(x)]$ (十分大きな $n\geqq n(D)$) で定義される射とする.

§ 3. de Rham(φ,Γ)-加群に対する Perrin-Riou exponential 射

この章では, de Rham (φ,Γ)-加群に対する Perrin-Riou exponential 射に関して筆者が得た結果を解説する.

§ 3.1. 解析的岩澤コホモロジー

ここでは Pottharst [Po10], [Po11] に従い, p-進表現の岩澤コホモロジーの Robba 環上の (φ,Γ)-加群への一般化である解析的岩澤コホモロジーの理論を復習する.

$\Lambda_K:=\varprojlim_n\mathbb{Z}_p[\Gamma_K/\Gamma_{K_n}]$ を Γ_K の岩澤代数とする. $[\ ]:\Gamma_K\to\Lambda_K:\gamma\mapsto[\gamma]$ を, γ に対して群環の元 $[\overline{\gamma}]\in\mathbb{Z}_p[\Gamma_K/\Gamma_{K_n}]$ を対応させることにより定まる射とする. $\Gamma_K\xrightarrow{\sim}\Delta_K\times\mathbb{Z}_p$ (Δ_K は Γ_K の捻れ部分群) と Γ_K を分解したとき, $\{1\}\times\mathbb{Z}_p$ の生成元 $(1,1)$ を $1\otimes(1+X)$ に対応させることで, $\mathbb{Z}_p$-代数の同型 $\Lambda_K\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p[\Delta_K]\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[[X]]$ が得られる. $\mathfrak{m}\subseteq\Lambda_K$ を Λ_K の Jacobson 根基とし, 各 $n\geqq1$ に対して $\Lambda_{K,n}:=(\Lambda_K[\frac{\mathfrak{m}^n}{p}])^\wedge\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ と定める（ここで, $(\Lambda_K[\frac{\mathfrak{m}^n}{p}])^\wedge$ は $\Lambda_K[\frac{\mathfrak{m}^n}{p}]$ の p-進完備化とする). 自然な射 $\Lambda_{K,n+1}\to\Lambda_{K,n}$ に関する射影極限を $\Lambda_{K,\infty}:=\varprojlim_n\Lambda_{K,n}$ と記す. リジッド幾何的には, $\Lambda_{K,\infty}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の形式スキーム $\mathrm{Spf}(\Lambda_K)$ の Berthelot 生成ファイバーの大域切断として定義される.

$\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}:=\{f(X):=\sum_{n\geqq0}^\infty a_nX^n|a_n\in\mathbb{Q}_p, f(X)$ は $0\leqq|X|<1$ で収束する $\}$ と定義すると, 同型 $\Lambda_K\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p[\Delta_K]\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[[X]]$ は同型 $\Lambda_{K,\infty}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_p[\Delta_K]\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}$ に一意的に延びる. 指標 $\eta:\Delta_K\to\mathbb{Q}_p^\times$ に対応する $\mathbb{Q}_p[\Delta_K]$ のベキ等元を $e_\eta:=\frac{1}{|\Delta_K|}\sum_{\gamma\in\Delta_K}\eta(\gamma)^{-1}[\gamma]$ と記す. $\widehat{\Delta}_K$ を Δ_K の指標群とすると, $\Lambda_{K,\infty}=\oplus_{\eta\in\widehat{\Delta}_K}\Lambda_{K,\infty}e_\eta$ と分解し, 各成分 $\Lambda_{K,\infty}e_\eta$ は $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}$ と同型, 特に整域となる.

各 $n\geqq1$ に対し, Γ_K が作用する階数 1 の自由 $\Lambda_{K,n}$-加群 $\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n}:=\Lambda_{K,n}e^{(n)}$ を, $\gamma(\lambda e^{(n)}):=[\gamma]^{-1}\lambda e^{(n)}$ ($\gamma\in\Gamma_K,\lambda\in\Lambda_{K,n}$) と作用させることにより定める.

D を $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ,Γ)-加群とする. $D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n}$ を $\varphi(x\hat{\otimes}y):=\varphi(x)\hat{\otimes}y,\gamma(x\hat{\otimes}y):=\gamma(x)\hat{\otimes}[\gamma]^{-1}y$ で定義される $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\Lambda_{K,n}$ 上の (φ,Γ)-加群とする (ここで, $\widehat{\otimes}$ は $\mathbb{Q}_p$-Banach 空間の完備テンソル積を $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ の場合に自然に一般化したものである, 詳細は略). D の場合と同様に, $D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n}$ に対して $\Lambda_{K,n}$-加群の複体 $C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n})$ を定義し, $\mathrm{H}^q(K,D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n}):=\mathrm{H}^q(C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n}))$ と定義する. 各 $n\geqq1$ に対して自然な射 $\Lambda_{K,n+1}\to\Lambda_{K,n}:e^{(n+1)}\mapsto e^{(n)}$ は, 射

$$\mathrm{H}^q(K,D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n+1})\to\mathrm{H}^q(K,D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^\iota_{K,n})$$

を誘導する．

以上の準備の下, D の解析的岩澤コホモロジーを

$$\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D) := \varprojlim_n \mathrm{H}^q(K, D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n})$$

と定義する．これは $\Lambda_{K,\infty}$-加群になる．

$\Lambda_{K,\infty}$-加群 M, $\eta \in \widehat{\Delta}_K$ に対して，

$$(e_\eta M)_{\mathrm{tor}} := \{m \in e_\eta M| \text{ ある } a(\neq 0) \in \Lambda_{K,\infty}e_\eta \text{が存在して } am = 0\}$$

とし, $M_{\mathrm{tor}} := \oplus_{\eta\in\widehat{\Delta}_K}(e_\eta M)_{\mathrm{tor}}$ と定める．

次に, 有限生成 Λ_K-加群のリジッド幾何版に対応する次の定義を復習する．M を $\Lambda_{K,\infty}$-加群とする．M が co-admissible $\Lambda_{K,\infty}$-加群であるとは, 各 $n \geqq 1$ に対して有限生成 $\Lambda_{K,n}$-加群 M_n と同型 $\Lambda_{K,n} \otimes_{\Lambda_{K,n+1}} M_{n+1} \xrightarrow{\sim} M_n$ があり, 同型 $M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n M_n$ が存在することと定義する．リジッド幾何的には co-admissible $\Lambda_{K,\infty}$-加群とは, $\mathrm{Spf}(\Lambda_K)$ の Berthelot 生成ファイバー上のある連接層の大域切断と同型になる $\Lambda_{K,\infty}$-加群として定義される．このとき, 各 $n \geqq 1$ に対して自然な射 $\Lambda_{K,n} \otimes_{\Lambda_{K,\infty}} M \to M_n$ は同型となることが知られている．

Perrin-Riou [Per92] による p-進表現の岩澤コホモロジーの理論の一般化として, Pottharst は次の定理を証明した．

定理 3.1. (Pottharst [Po10], [Po11])

(1) G_K の p-進表現 V に対して, 関手的な同型

$$\Lambda_{K,\infty} \otimes_{\Lambda_K} \mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V))$$

が存在する．

(2) $\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D)$ は co-admissible $\Lambda_{K,\infty}$-加群となる．

(3) $q \neq 1,2$ に対し, $\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D) = 0$.

(4) $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)_{\mathrm{tor}}, \mathbf{H}^2_{\mathrm{Iw}}(K,D)$ は有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間, 特に co-admissible 捻れ $\Lambda_{K,\infty}$-加群となる．

(5) $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)_{\mathrm{tor}}$ は階数 $[K:\mathbb{Q}_p]\mathrm{rank}\,D$ の有限自由 $\Lambda_{K,\infty}$-加群.

$\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)$ は, φ の左逆作用素 ψ を用いると, 次のようにしてより直接的に記述することが可能となる．まず, $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K} = \oplus_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K})$ という事実と D の φ-構造から, $D = \oplus_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(D)$ となることが分かる．この事実を用いて, $\psi : D \mapsto D$ を $\psi(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i))) := x_0$ と定義する．定義より, $\psi\varphi = \mathrm{id}_D$ を満たし, 特に ψ は全射である．さらに, Γ_K の $(1+T)^i$ への作用の定義と, φ と Γ_K の作用の可換性から, ψ と Γ_K

の作用も可換であることが分かる．この ψ を使って, 複体 $C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D), C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n})$ を, $C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D), C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n})$ の定義に現れる全ての φ を ψ に入れ替えたものとして定義する．このとき, 射

$$C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D_0) \to C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D_0)$$

$(D_0 = D, D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n})$ を

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D_0) : [D_0^\Delta \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & D_0^\Delta \oplus D_0^\Delta \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}\oplus(-\psi)"] & D_0^\Delta] \arrow[d, "-\psi"] \\
C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D_0) : [D_0^\Delta \arrow[r, "(\gamma-1,\psi-1)"] & D_0^\Delta \oplus D_0^\Delta \arrow[r, "(\psi-1)\oplus(1-\gamma)"] & D_0^\Delta]
\end{tikzcd}$$

で定義する．ψ の全射性から, この複体の射は全射であり, 核は

$$[0 \to 0 \oplus (D_0^\Delta)^{\psi=0} \xrightarrow{0\oplus(1-\gamma)} (D_0^\Delta)^{\psi=0}]$$

となる．この複体に関して次の定理が成り立つ．この定理は, エタール (φ,Γ)-加群の場合には Cherbonnier-Colmez [CC98], [CC99] により, 一般の場合には Liu [Li08], Pottharst [Po10] らにより証明された.

定理 3.2.

(1) $D_0 = D, D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n}$ に対し,

$$(1-\gamma) : (D_0^\Delta)^{\psi=0} \to (D_0^\Delta)^{\psi=0}$$

は同型となる．特に, 複体の射 $\{C^\bullet_{\varphi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n}) \to C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n})\}_{n\geqq 1}$ の系列は同型

$$\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^q(C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n}))$$

を導く.

(2) 次で定義される射は, $\Lambda_{K,\infty}$-加群の同型となる.

$$D^{\psi=1} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^q(C^\bullet_{\psi,\gamma,\Delta}(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n})) : x \mapsto ([(|\Gamma_{K,\mathrm{tor}}|\log_0(\chi(\gamma))p_\Delta(x\hat{\otimes}1), 0)])_{n\geqq 1}.$$

ここで, $|\Gamma_{K,\mathrm{tor}}|$ は Γ_K の捻れ部分群の位数, $\log_0(a) := \frac{\log(a)}{p^{v_p(\log(a))}}$, $p_\Delta := \frac{1}{|\Delta|}\sum_{\sigma\in\Delta}\sigma \in \Lambda_K$ とする．さらに, D の $\mathbb{Q}_p[\Gamma_K]$-加群の構造は, 一意的に連続 $\Lambda_{K,\infty}$-加群の構造に延びることが知られており, これにより $D^{\psi=1}$ を $\Lambda_{K,\infty}$-加群とみなしている.

定理 (2) の同型と (1) の逆射の合成により, $\Lambda_{K,\infty}$-加群の同型

$$D^{\psi=1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)$$

を得る.

各 $n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$, $k\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathrm{pr}_{K_n,k}:\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D)\to\mathrm{H}^q(K_n,D(k))$$

を, 環準同型 $h_{n,k}:\Lambda_{K,m}\to\mathbb{Q}_p[\Gamma_K/\Gamma_{K_n}]:[\gamma]\mapsto\chi(\gamma)^{-k}[\overline{\gamma}]^{-1}$ による $D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,m}$ の底変換

$$(D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,m})\otimes_{\Lambda_{K,m},h_{n,k}}\mathbb{Q}_p[\Gamma_K/\Gamma_{K_n}]\xrightarrow{\sim}D\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p[\widetilde{\Gamma_K/\Gamma_{K_n}}](k):(x\widehat{\otimes}\lambda e^{(m)})\otimes a\mapsto x\otimes h_{n,k}(\lambda)a\mathbf{e}_k$$

(ここで, $\mathbb{Q}_p[\widetilde{\Gamma_K/\Gamma_{K_n}}]:=\mathbb{Q}_p[\Gamma_K/\Gamma_{K_n}]$ は, $\gamma(x):=[\overline{\gamma}]x$ により定まる Γ_K-加群とする) から自然に誘導される射

$$\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D)\to\mathrm{H}^q(K,D\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p[\widetilde{\Gamma_K/\Gamma_{K_n}}](k))$$

と Shapiro の補題により定まる同型

$$\mathrm{H}^q(K,D\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p[\widetilde{\Gamma_K/\Gamma_{K_n}}](k))\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^q(K_n,D(k))$$

の合成として定義する. また, $k\in\mathbb{Z}$ に対して, $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間の同型

$$f_{D,k}:\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D)\xrightarrow{\sim}\mathbf{H}^q_{\mathrm{Iw}}(K,D(k))$$

を, $\mathbb{Q}_p[\varphi,\Gamma_K]$-加群の同型 $D\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n}\xrightarrow{\sim}D(k)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\widetilde{\Lambda}^{\iota}_{K,n}:x\widehat{\otimes}\lambda e^{(n)}\mapsto x\mathbf{e}_k\widehat{\otimes}f_k(\lambda)e^{(n)}$(ここで, $f_k:\Lambda_{K,n}\xrightarrow{\sim}\Lambda_{K,n}:[\gamma]\mapsto\chi(\gamma)^{-k}[\gamma]$) により誘導される同型として定義する.

註記. 射 $\mathrm{pr}_{K_n,k}$ と $f_{D,k}$(ただし, $k\neq 0$) の定義は $\mathbf{e}_k$ の選び方, つまり $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq 0}$ の選び方に依存する.

§ 3.2. p-進微分方程式 $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$

ここでは, Berger [Ber08b] に従い, de Rham(φ,Γ)-加群 D に付随する Frobenius 作用付きの p-進微分方程式 $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ の構成法とその基本性質の復習をする.

捻れ元でない任意の $\gamma\in\Gamma_K$ に対して, $\nabla_0:=\frac{\log([\gamma])}{\log(\chi(\gamma))}\in\Lambda_{K,\infty}$ と定義する. これは γ の選び方によらない. 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\nabla_i:=\nabla_0-i\in\Lambda_{K,\infty}$ と定める. (φ,Γ)-加群 D への ∇_0 の作用は, Leibniz ルール $\nabla_0(ax)=\nabla_0(a)x+a\nabla_0(x)$ ($a\in\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K},x\in D$) を満たす. ∇_0 は, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},F'}$ 上では $\nabla_0=t(1+T)\frac{d}{dT}$ として作用する.

D を $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の de Rham(φ,Γ)-加群とする. このとき, 各 $n\geqq n(D)$ に対して $\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}(D)=K_n((t))\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ が成り立つ. この同一視により, $K_n[[t]]\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ は $\mathbf{D}_{\mathrm{dif},n}(D)$ の Γ_K-作用で閉じている $K_n[[t]]$-lattice となる.

定理 3.3. (Berger [Ber08b]) D を de Rham (φ,Γ)-加群とする. 各 $n\geqq n(D)$ に対して

$$\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{(n)}:=\{x\in D^{(n)}[1/t]|\iota_m(x)\in K_m[[t]]\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)(\text{任意の }m\geqq n)\}$$

と定め, $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D):=\cup_n\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{(n)}$ と定める. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ は $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の (φ,Γ)-加群で, $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)[1/t]=D[1/t]$ が成り立つ.

(2) $n \geqq n(D)$ に対して, $\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif},n}(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))=K_n[[t]]\otimes_K \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ が成り立つ.

(3) $\nabla_0(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))\subseteq t\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ が成り立つ.

註記. 実際は, 定理の条件 (1), (2) を満たす $D[1/t]$ の部分 (φ,Γ)-加群として $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ は一意的に定まり, (3) の条件は (1), (2) の条件から自動的に従う.

条件 (3) と等式 $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^1_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}/\mathbb{Q}_p}=\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}dT$ (これは, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p}\subseteq \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ が有限エタールであることから従う) を用いて, $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ に接続 ∇_D を

$$\nabla_D:\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)\to \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)\otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^1_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}/\mathbb{Q}_p}:x\mapsto \frac{\nabla_0(x)}{t}\otimes\frac{dT}{(1+T)}$$

と定義する. これは $\varphi(\nabla_D(x))=\nabla_D(\varphi(x))$ を満たす. つまり, $(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D),\varphi,\nabla_D)$ は $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の Frobenius 作用付きの p-進微分方程式となる.

同様に, 自然な同型 $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D(-1))\xrightarrow{\sim}\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p t\mathbf{e}_{-1}$ を用いて, 微分作用素 ∂ を

$$\partial:\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)\to\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D(-1)):x\mapsto\frac{\nabla_0(x)}{t}\otimes t\mathbf{e}_{-1}$$

と定義する.

註記. ∂ の定義も $\mathbf{e}_{-1}$ の選び方, つまり $\{\zeta_{p^n}\}_{n\geqq 0}$ の選び方に依存する.

§ 3.3. de Rham (φ,Γ)-加群に対する Perrin-Riou exponential 射の定義

以上の準備の下, de Rham (φ,Γ)-加群に対して Perrin-Riou exponential 射の一般化と見なせる射を以下のようにして構成する.

まず, 次の補題が成り立つ.

補題 3.4. *D を de Rham (φ,Γ)-加群とし, $h\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$ を $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)=\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ を満たす正整数とする. このとき, 次が成り立つ.*

(1) ($D[1/t]$ の部分加群として) $t^h\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)\subseteq D$ が成り立つ.

(2) $\nabla_{h-1}\nabla_{h-2}\cdots\nabla_0(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))\subseteq D$ が成り立つ.

Proof. (1) は, $\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif},n}(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))=K_n[[t]]\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ であることと, $\mathbf{D}^{+}_{\mathrm{dif},n}(D)=\mathrm{Fil}^0(K_n((t))\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D))$ であることから従う (詳細は略). (2) は, (1) と $\nabla_i(t^ix)=t^i\nabla_0(x)$ となることと定理 3.3 の条件 (3) から 従う. □

この補題と定理 3.2 を用いて, $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)=\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ となる各 $h\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$ に対して, $\Lambda_{K,\infty}$-加群の射 $\mathrm{Exp}_{D,h}$ を

$$\mathrm{Exp}_{D,h}:\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))\xrightarrow{\sim}\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}\xrightarrow{\nabla_{h-1}\cdots\nabla_0}D^{\psi=1}\xrightarrow{\sim}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)$$

と定義する.

定義により, $\mathrm{Exp}_{D,h}$ は次の性質を満たす.

補題 3.5.

(1) $\mathrm{Exp}_{D,h+1} = \nabla_h \mathrm{Exp}_{D,h}$.

(2) 次の図式は可換,

$$\begin{CD} \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D(1))) @>{\partial}>> \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \\ @V{\mathrm{Exp}_{D(1),h+1}}VV @VV{\mathrm{Exp}_{D,h}}V \\ \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, D(1)) @>{f_{D(1),-1}}>> \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, D). \end{CD}$$

次に, 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ に対して $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))$ から $\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(D)$ への射

$$T_{D,K_n} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \to \mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(D)$$

を, 十分大きな $m \geqq n$ に対して定義される次の 3 つの射

$$\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1} \xrightarrow{\iota_m} \mathbf{D}^+_{\mathrm{dif},m}(\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) = K_m[[t]] \otimes_{K_m} \mathbf{D}^{K_m}_{\mathrm{dR}}(D),$$

$$K_m[[t]] \otimes_{K_m} \mathbf{D}^{K_m}_{\mathrm{dR}}(D) \to \mathbf{D}^{K_m}_{\mathrm{dR}}(D) : \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \mapsto a_0,$$

$$\frac{1}{[K_m : K_n]} \mathrm{Tr}_{K_m/K_n} : \mathbf{D}^{K_m}_{\mathrm{dR}}(D) \to \mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(D)$$

の合成として定義する. “$\psi = 1$” という条件から, この射は m の取り方に依存しないことが分かる.

次の定理が [Na13] の主定理である. この定理は, 射 $\mathrm{Exp}_{D,h}$ が D の円分捻りの exponential 射, 及び双対 exponential 射を p-進補間する射であることを意味している.

定理 3.6. ([Na13] Theorem 3.10) D を $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の de Rham (φ, Γ)-加群とし, $h \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$ を $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D) = \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ を満たすものとする. このとき, $\mathrm{Exp}_{D,h}$ は次の性質を満たす.

(1) $k \geqq 1$ かつ $\partial^k(x_k) = x$ を満たす $x_k \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D(k)))$ が存在するとき, または, $0 \geqq k \geqq -(h-1)$ で $x_k := \partial^{-k} x \in \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D(k)))$ とするとき,

$$\mathrm{pr}_{K_n,k}(\mathrm{Exp}_{D,h}(x)) = \frac{(-1)^{h+k-1}(h+k-1)!|\Gamma_{K_n,\mathrm{tor}}|}{p^{m(K_n)}} \exp_{K_n,D(k)}(T_{D(k),K_n}(x_k))$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ で成り立つ.

(2) $-h \geqq k$ のとき,

$$\exp^*_{K_n,D^*(1-k)}(\mathrm{pr}_{K_n,k}(\mathrm{Exp}_{D,h}(x)) = \frac{|\Gamma_{K_n,\mathrm{tor}}|}{(-h-k)!p^{m(K_n)}} T_{D(k),K_n}(\partial^{-k}(x))$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ で成り立つ.

ただし, $m(K_n) := \min\{v_p(\log(\chi(\gamma))|\gamma \in \Gamma_{K_n}\}$ と定める.

註記. 定理の等式に現れる $(h+k-1)!$ や $\frac{1}{(-h-k)!}$ などの数は, ガンマ関数 $\Gamma(z)$ の整数点での特殊値 (Taylor 展開の先頭項の係数)$\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \geqq 1)$, $\Gamma^*(n) = \frac{(-1)^n}{(-n)!}$ と関係している.

§ 3.4. $\mathrm{Exp}_{D,h}$ の行列式: $\delta(V)$-予想の一般化

Perrin-Riou exponential 射を p-進 L-関数の研究へ応用する際には, それの "逆写像" を用いて, オイラーシステムから得られる岩澤コホモロジーの元から p-進 L-関数を構成することが重要となる. よって, Perrin-Riou exponential 射の "行列式" をなるべく具体的に計算することが重要な問題になる. そこで本節では, $\mathrm{Exp}_{D,h}$ の行列式に関する公式 (ここでは定理 $\delta(D)$ と呼ぶ) を解説したい.

この公式は, co-admissible $\Lambda_{K,\infty}$-加群の特性イデアルの概念を用いて定式化されるので, まずはこの概念を復習する. M を co-admissible 捻れ $\Lambda_{K,\infty}$-加群とする. このとき, 各 $n \geqq 1$ に対し $M_n := \Lambda_{K,n} \otimes_{\Lambda_{K,\infty}} M$ は有限生成捻れ $\Lambda_{K,n}$-加群である. すると, $\Lambda_{K,n}$ は単項イデアル整域の有限個の直積なので, M_n の特性イデアル $\mathrm{char}_{\Lambda_{K,n}}(M_n) \subseteq \Lambda_{K,n}$ を定義することが出来る. このとき, 任意の $n \geqq 1$ に対して等号 $\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}(M) \cdot \Lambda_{K,n} = \mathrm{char}_{\Lambda_{K,n}}(M_n)$ を満たす $\Lambda_{K,\infty}$ の単項イデアル $\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}(M)$ が唯一つ存在することが知られている (Lazard の定理). この単項イデアル $\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}(M)$ を M の特性イデアルと呼ぶことにする.

次に, M_1, M_2 を co-admissible $\Lambda_{K,\infty}$-加群で, かつ $M_1/M_{1,\mathrm{tor}}, M_2/M_{2,\mathrm{tor}}$ が同じ階数の有限自由 $\Lambda_{K,\infty}$-加群となっているものとする. $f : M_1 \to M_2$ を $\Lambda_{K,\infty}$-加群の射とし, $\overline{f} : M_1/M_{1,\mathrm{tor}} \to M_2/M_{2,\mathrm{tor}}$ を f から誘導される射とする. このとき, f の行列式 $\det_{\Lambda_{K,\infty}}(f : M_1 \to M_2)$ を

$$\begin{aligned}\det_{\Lambda_{K,\infty}}(f : M_1 \to M_2) := &\det_{\Lambda_{K,\infty}}(\overline{f} : M_1/M_{1,\mathrm{tor}} \to M_2/M_{2,\mathrm{tor}}) \\ &\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}(M_{1,\mathrm{tor}})^{-1}\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}(M_{2,\mathrm{tor}}) \subseteq \mathrm{Frac}(\Lambda_{K,\infty})\end{aligned}$$

で定まる $\Lambda_{K,\infty}$ の単項分数イデアルとして定義する.

以上の概念を, 射 $\mathrm{Exp}_{D,h} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \to \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, D)$ に対して適応することで (適応可能なことは定理 3.1 が保証している), $\Lambda_{K,\infty}$ の単項分数イデアル

$$\det_{\Lambda_{K,\infty}}(\mathrm{Exp}_{D,h} : \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, \mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)) \to \mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K, D))$$

が定義される. この行列式に関して次の定理が成り立つ.

定理 3.7. ($\delta(D)$, [Na13] Theorem 3.14) D を階数 d の $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上の de Rham (φ,Γ)-加群, D の Hodge-Tate 重みを (重複度も込めて) $\{h_1,h_2,\cdots,h_d\}$ とする. $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)=\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ を満たす任意の $h\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$ に対して, $\Lambda_{K,\infty}$ の単項分数イデアルの次の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{(\prod_{i=1}^d\prod_{j_i=0}^{h-h_i-1}\nabla_{h_i+j_i})^{[K:\mathbb{Q}_p]}}\det_{\Lambda_{K,\infty}}(\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))\xrightarrow{\mathrm{Exp}_{D,h}}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D))$$
$$=\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}(\mathbf{H}^2_{\mathrm{Iw}}(K,D))(\mathrm{char}_{\Lambda_{K,\infty}}\mathbf{H}^2_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)))^{-1}.$$

註記. 定理より, 左辺は h に依存しないことが分かる.

§ 3.5. クリスタリン (φ,Γ)-加群の場合

本節では, K が $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐で D がクリスタリンの場合に, § 3.3, § 3.4 の結果と Perrin-Riou exponential 射について以前に知られていた結果とを比較する.

以下, K は $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐 (つまり, $K=F$) であるとする. このとき, $\chi:\Gamma_K\xrightarrow{\sim}\Gamma_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p^{\times}$ は同型であり, 特に $\Lambda_{K,\infty}\xrightarrow{\sim}\Lambda_{\mathbb{Q}_p,\infty}=:\Lambda_\infty$ となっている. さらに,

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}:=\{f(T)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n|a_n\in K,\text{ある }0\leqq r<1\text{があり }f(T)\text{ は }r\leqq|T|<1\text{で収束する}\},$$

$$\varphi(f(T)):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi(a_n)((T+1)^p-1)^n,\ \gamma(f(T)):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n((T+1)^{\chi(\gamma)}-1)^n$$

となっていることに注意する. これより, (φ,ψ,Γ_K)-作用で保たれる $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ の部分環

$$\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},K}:=\{f(T)=\sum_{n\geqq 0}a_nT^n|f(T)\text{ は }0\leqq|T|<1\text{ で収束する }\}$$

を定義することが出来る. さらに, 重要な事実として, 次で定義される射

$$\Lambda_\infty\xrightarrow{\sim}(\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p})^{\psi=0}:\lambda\mapsto\lambda\cdot(1+T)$$

は Λ_∞-線形な同型射となることが知られている.

D を $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ 上のクリスタリン (φ,Γ)-加群とする. 特に, 同型 $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}[1/t]\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)\xrightarrow{\sim}D[1/t]$ が成り立っている.

我々の結果と従来の結果を比較するためには, $\mathrm{Exp}_{D,h}$ の定義域 $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$ と (従来の)Perrin-Riou exponential 射の定義域 $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)$ とを比較することが重要である. まず, $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)$ の特徴付けから次の補題が成り立つ.

補題 3.8. ($D[1/t]$ の部分 (φ,Γ)-加群としての) 次の等式が成り立つ.

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)=\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D).$$

この補題により, $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K \mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=1}$ は $\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}$ の部分 Λ_∞-加群となる. 次に, $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K \mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=1}$ と $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)$ を比較する. まず, 同型 $\Lambda_\infty \xrightarrow{\sim} (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p})^{\psi=0} : \lambda\mapsto\lambda\cdot(1+T)$ より, 次の同型を得る

$$\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)\xrightarrow{\sim}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},\mathbb{Q}_p})^{\psi=0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)=(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=0}.$$

Λ_∞-加群の射

$$\Delta:\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)\to\oplus_{k\geqq 0}t^k\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)/(1-\varphi)(t^k\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))$$

を

$$\Delta(f(T)\otimes x):=(\overline{t^k\cdot\partial^k(f)(0)\cdot x})_{k\geqq 0}$$

で定義する. この射に関して次の補題が成り立つ.

補題 3.9. (*[Per94]* §2.2, *[Na13]* Lemma 3.18) 次の完全列が存在する.

$$\begin{aligned}0&\to(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\varphi=1}\to(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=1}\\&\xrightarrow{1-\varphi}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=0}\xrightarrow{\Delta}\oplus_{k\geqq0}t^k\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D)/(1-\varphi)(t^k\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))\to 0.\end{aligned}$$

特に, 同型

$$(1-\varphi):(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=1}/(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\varphi=1}\xrightarrow{\sim}(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\Delta=0}$$

を得る.

定義 3.10. D を $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig},K}$ 上のクリスタリン (φ,Γ)-加群, $h\in\mathbb{Z}_{\geqq1}$ を $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)=\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(D)$ を満たす整数とする. このとき, Λ_∞-加群の射

$$\Omega_{D,h}:(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\Delta=0}\to\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)_{\mathrm{tor}}$$

を次の射の合成として定義する,

$$\begin{aligned}\Omega_{D,h}:(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\Delta=0}&\xrightarrow{(1-\varphi)^{-1}}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\psi=1}/(\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}\otimes_K\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(D))^{\varphi=1}\\&\xrightarrow{\text{canonical injection}}\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\psi=1}/\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D)^{\varphi=1}\xrightarrow{\sim}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))_{\mathrm{tor}}\\&\xrightarrow{\mathrm{Exp}_{D,h}}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)_{\mathrm{tor}}\end{aligned}$$

(ここで, 一般の D に対して $D^{\varphi=1}\xrightarrow{\sim}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)_{\mathrm{tor}}$ となる事実を用いた).

註記. V を G_K のクリスタリン表現とする. 自然な同型

$$\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V)\xrightarrow{\sim}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)),\ \Lambda_\infty\otimes_{\Lambda_K}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)\xrightarrow{\sim}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V))$$

を用いて,

$$\begin{aligned}\Omega_{V,h}:(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V))^{\Delta=0}&\xrightarrow{\sim}(\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V))^{\Delta=0}\\&\xrightarrow{\Omega_{\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V),h}}\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V))/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V))_{\mathrm{tor}}\xrightarrow{\sim}\Lambda_\infty\otimes_{\Lambda_K}(\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)_{\mathrm{tor}})\end{aligned}$$

と定義すると, これは Perrin-Riou exponential 射 ([Per94]) と一致することが Berger により証明されている ([Ber03]).

定理 3.11. (Perrin-Riou's $\delta(D)$) D をクリスタリン (φ,Γ)-加群, $\{h_1,\cdots,h_d\}$ を D の Hodge-Tate 重み, $h\in\mathbb{Z}_{\geqq 1}$ を $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(D)=\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(D)$ となる整数とする. このとき, Λ_∞ の単項分数イデアルの次の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{(\prod_{1\leqq i\leqq d}\nabla_{h_i}\nabla_{h_i+1}\cdots\nabla_{h-1})^{[K:\mathbb{Q}_p]}}\det{}_{\Lambda_\infty}(\Omega_{D,h}:\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(D)\to\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D))$$
$$=\mathrm{char}_{\Lambda_\infty}(\mathbf{H}^2_{\mathrm{Iw}}(K,D)).$$

註記. この定理の主張は, クリスタリン表現の場合に Perrin-Riou [Per94] により予想された. Perrin-Riou はさらに, 「$\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ と $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,V^*(1))$ との自然なペアリングと $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(V)$ と $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(V^*(1))$ との自然なペアリングが $\Omega_{V,h}$ と $\Omega_{V^*(1),1-h}$ に対して両立している」という $\mathrm{Rec}(V)$ と呼ばれる予想を立て, $\delta(V)$ がこの予想から従うことを証明した. その後, $\mathrm{Rec}(V)$ が Colmez [Col98], 加藤-栗原-辻 [KKT96], Benois [Ben00] らによって証明され, 結果として $\delta(V)$ も証明された.

一方, Pottharst [Po11] はスロープフィルトレイション定理と呼ばれる重要な定理を用いて p-進表現の場合に帰着させるという方法で, $\delta(D)$-定理をクリスタリン (φ,Γ)-加群の場合に拡張した.

§3.4 の $\delta(D)$ と Perrin-Riou の $\delta(D)$ との比較に関して, 我々は次の命題を証明した.

命題 3.12. ([Na13] Proposition 3.24) 上の定理の状況で, Λ_∞ の単項分数イデアルの次の等式が成り立つ.

$$\det{}_{\Lambda_\infty}(\mathrm{Exp}_{D,h}:\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,N_{\mathrm{rig}}(D))\to\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D))\mathrm{char}_{\Lambda_\infty}(\mathbf{H}^2_{\mathrm{Iw}}(K,N_{\mathrm{rig}}(D)))$$
$$=\det{}_{\Lambda_\infty}(\Omega_{D,h}:\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(D)\to\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,D)),$$

特に, K が不分岐で D がクリスタリンのとき, 定理 3.8 と定理 3.13 は同値である.

註記. 定理 3.8 の証明では, $\mathrm{Rec}(V)$ に相当する定理もスロープフィルトレイション定理も使わない. よってこの命題により, Perrin-Riou の $\delta(D)$ のより直接的な別証明が得られたことになる.

註記. 上で説明したように, D がクリスタリンの場合は, $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))$ と $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(D)$ とを明示的な仕方で関係づけることが出来た. $\Omega_{D,h}$ の逆写像を用いた p-進 L-関数の構成では, $\Lambda_\infty\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(D)$ の基底として $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(D)$ の φ の固有ベクトルからなる基底が取れるという事実が重要である. これらの事実を鑑みると, クリスタリンでない場合に p-進 L-関数の構成を一般化するためには, $\Lambda_{K,\infty}$-加群 $\mathbf{H}^1_{\mathrm{Iw}}(K,\mathbf{N}_{\mathrm{rig}}(D))$ と $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(D)$, より一般に $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(D)$ との関係を調べることが重要になってくると思われる.

References

[Bel-Ch09] J. Bellaïche, G.Chenevier, Families of Galois representations and Selmer groups, Astérisque, **324** (2009).

[Ben00] D. Benois, On Iwasawa theory of crystalline representations, Duke Math. J., **104** (2000), 211–267.

[Ber02] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.

[Ber03] L. Berger, Bloch and Kato's exponential map: three explicit formulas, In: Kazuya Kato's fiftieth birthday, Documenta Math., extra volume, (2003), 99–129.

[Ber08a] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules: représentations p-adiques et B-paires, Algebra Number Theory, **2** (2008), 91–120.

[Ber08b] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et $(\varphi$,N)-modules filtres, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[BK90] S. Bloch, K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives, In: The Grothendieck Festschrift, I, Progr. Math. **86**, Birkhäuser, Boston, (1990), 333–400.

[Ch11] G. Chenevier, On the infinite fern of Galois representations of unitary type, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **44** (2011), 963–1019.

[Ch12] G. Chenevier, Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, Math. Ann., **335** (2013), 1469–1525.

[CC98] F. Cherbonnier and P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[CC99] F. Cherbonnier and P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques dun corps local, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 241–268.

[Col98] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math., **148** (1998), 485–571.

[Co08] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque, **319** (2008), 213–258.

[Co10] P. Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[Fo90] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, I, In: The Grothendieck Festschrift, II, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, Boston, (1990), 249–309.

[Fo94] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, Astérisque, **223** (1994), 59-111.

[Hel12] E. Hellmann, Families of trianguline representations and finite slope spaces, preprint arXiv:1202.4408.

[Her98] L. Herr, Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, Bull. Soc. Math. France, **126** (1998), 563–600.

[Her01] L. Herr, Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate, Math. Ann., **320** (2001), 307–337.

[Ka93] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, In: Arithmetic algebraic geometry, Lecture Notes in Math., **1553**, Springer, Berlin, (1993), 50–63.

[Ka04] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque **295**, (2004), 117–290.

[KKT96] K. Kato, M. Kurihara and T. Tsuji, Local Iwasawa theory of Perrin-Riou and syntomic complexes, Preprint, 1996.

[Ke04] K. Kedlaya, A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math., **160** (2004), 93–184.

[KPX12] K. Kedlaya, J. Pottharst and L. Xiao, Cohomology of arithmetic families of (φ,Γ)-modules, preprint arXv:1203.5718.
[Ki03] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math., **153** (2003), 373–454.
[Li08] R. Liu, Cohomology and duality for (φ,Γ)-modules over the Robba ring, Int. Math. Res. Not. (2008), Art. ID rnm150.
[Li12] R. Liu, Triangulation of refined families, preprint arXiv:1202.2188.
[Na09] K. Nakamura, Classification of two dimensional split trianguline representations of p-adic fields, Compositio Math., **145** (2009), 865–914.
[Na10] K. Nakamura, Deformations of trianguline B-pairs and Zariski-density of two-dimensional crystalline representations, preprint arXiv:1006.4891.
[Na11] K. Nakamura, Zariski density of crystalline representations for any p-adic field, preprint arXiv:1104.1760.
[Na13] K. Nakamura, Iwasawa theory of de Rham (φ,Γ)-modules over the Robba ring, to appear in J. Inst. Math. Jussieu.
[Per92] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques, Invent. Math., **109** (1992), 137–185.
[Per94] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math., **115** (1994), 81–161.
[Per95] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, Astérisque, **229** (1995).
[Po10] J. Pottharst, Analytic families of finite-slope selmer groups, preprint on his webpage.
[Po11] J. Pottharst, Cyclotomic Iwasawa theory of motives, preprint on his webpage.