研究ノート

真理のデフレ主義とその振る舞いのモデル
——真理の改訂理論とフリードマン・シェアーの公理的理論の関係に関するノート——

矢田部 俊介 *

Deflationism of truth and its model:
Arevision theory of truth and axiomatic truth theory of Friedman-Sheard

Shunsuke YATABE

§1　はじめに

真理概念は，言語哲学等で重要な役割を果たす．真理理論の研究には，集合論のようなメタ理論の上で真理理論のモデルを構成する意味論的アプローチと，真理を基礎概念と見なしその振る舞いを公理的に研究する公理論的アプローチに大別される．もちろん，公理論的アプローチをとるからと言って理論のモデルを考えなくてよいということにはならず，結局両者の研究が必要になる．

筆者は，真理概念を T-図式を満たす原始概念であるとし，「算術の定理はみな真である」のような一般化された表現を可能にするツールであると考える形式的なデフレ主義（Halbach 1996; Horsten 2012）の擁護をモチベーションとする．デフレ主義は公理論的アプローチを推奨する．公理的理論において，真理概念が原始概念と見なされるということは，真理理論は真理述語の**振る舞い**を規定する，ということである．例えば，真理述語と他の量化子とは可換なのか（つまり任意の論理式について，例えば $\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi_0 \to \varphi_1\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi_0\urcorner) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi_1\urcorner)$ を保証するのか）．また，一般化された表現に関し，算術の定理は無限個あり，またこの文は無限個の定理の連言であると見なせるため，これは無限的表現を許すということでもある．デフレ主義の難点の一つとして，無限的表現と強い循環的定義が可能なため，素朴集合論などの循環的定義を許す体系と共通の，ω-矛盾性のパラドックスに直面する事があげられる．

* 京都大学大学院文学研究科

一方，意味論的なアプローチにおいて，デフレ主義との親和性が指摘されているのが真理の改訂理論である．真理の改訂理論は，タルスキの真理定義と同じ意味で，真理概念を意味論的な概念（指示など）に還元するが，真理概念の本質は，その性質（対応説，整合説，真理メーカー）ではなく，その振る舞いであると考える．また，真理の改訂理論は，公理的な真理理論の一つである Friedman-Sheared の真理理論 **FS** の有限部分のモデルを提供する．

しかし，**FS** と共通の問題点がある．**FS** と全く同じ現象により，階層理論の最も簡明なフォームは，ω-矛盾となってしまうことが知られている．それを排除するため，真理の階層理論では ω-無矛盾な理論を得ることを優先し，超限帰納法による真理定義を採用し，ω-無矛盾な自然数論のモデルを作るため，ω よりずっと上の順序数の階層まで真理理論を伸ばす必要が出てくる．

本ノートでは，**FS** と階層理論の関係を検討し，同時に ω-矛盾性の問題の分析を行う．本ノートの内容は皆，既出で既知であるが，本ノートが論点整理に多少は役立つことを望んでいる．

§2　改訂意味論と公理的真理理論 FS

本節では，グプタとベルナップの改訂意味論，およびフリードマンとシェアーの公理的意味論 **FS** を紹介する．

2.1　T-図式とウソツキのパラドックス

真理理論とは，真理概念を形式化した理論であり，通常は，形式的な算術をベース理論とし，それに真理述語に関する規則を付加することで得られる．真理概念を形式化する際に，最も広く認められた形はタルスキによる **T-図式**（T-schemata）である（Tarski 1944）．

定義 1　**Tr** を真理概念を表現する述語だとした場合，任意の論理式 φ について，φ に相対化された T-図式とは，**Tr** が以下を満たす必要があることを主張する．

$$\varphi \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

本来であれば，ある真理理論 T が真理概念の形式化として望ましいものであるためには，T-図式の無制限な形式，つまり **Tr** を含む言語の任意の論理式 φ に対し，φ に相対化された T-図式を帰結できるようにする必要がある．しかし残念ながら，古典論理上

において，十分な表現力を持つそのような理想的な真理理論は存在しない．

その証明は簡単で，まず **不動点補題**が証明できる．

補題 1（不動点補題） $P(x)$ を任意の一変数述語とする．このとき，ある閉論理式 ψ が存在し，以下が成立する．

$$\psi \equiv P(\ulcorner\psi\urcorner)$$

この ψ のことを P の「**不動点**」と呼ぶ．

この不動点補題により，ウソツキのパラドックスがおこり，以下を証明することができる．

定理 1（ウソツキのパラドックス） 古典論理上で，T-図式の無制限な形式を導出するような，無矛盾な真理概念の形式化は存在しない．

proof 不動点補題により，$\Lambda \equiv \neg\mathbf{Tr}(\ulcorner\Lambda\urcorner)$ を満たす文 Λ を構成すればよい．よく知られた議論により，Λ を真だと仮定すると偽となり，偽だと仮定すると真という結論となる．□

2.2 グプタとベルナップの真理の改訂理論 $\Gamma*$

タルスキの階層理論を代表とする意味論的な真理理論は，みな真理述語の外延を決定しようというものであった．その外延は，どれもシャープな境界線を持つ．タルスキの階層的理論の場合，その真理述語の外延がシャープで固定的な外延を持つ事は自明であろう．ではクリプキの不動点意味論の場合はどうか．一見，特に三値論理上の意味論として解釈した場合，述語の外延の内側と外側の他に，曖昧な境界線部分を持つように見えるため，シャープな外延とは見えないかもしれない．しかし，三値論理で色づけすると言うことは，境界線上の論理式（例えば嘘つき文 Λ）は，真 t でも偽 f でもない，確定的な真理値 u を持つ．その意味で外延は確定的である（違いは「領域を２つの確定的に分割」を「３つ」に変更しただけである）．

真理の改訂理論とは，論理式の真理値を確定することを目的とするのではなく，その真偽の振る舞いを対象とする理論である．ウソツキ文 Λ の挙動を見てみよう．出発点の集合を $L_0 = \{\Lambda\}$ とすると，その改訂列（簡略化のため，通常の算術的な論理式及びそれに真理述語を付加した式等は省略する）は $\langle\{\Lambda\}, \{\neg\Lambda\}, \{\Lambda\}, \{\neg\Lambda\} \cdots\rangle$ となる．この改訂列は，「ウソツキ文の本質は，その真理値が，真と仮定すれば偽，偽と仮定すれば真と，振動し続ける点にある」ことを表現するとも見なすことが可能である．この

枠組みでは，ウソツキ文は，真理値が定まらず，改訂列は振動し続ける．しかし，それは，ウソツキ文が病的なので理論から排除するべきだということを意味するものではない．ウソツキ文は，その「真理値が一つに定まらず，真と偽の間で振動を続ける」という点に特色がある，循環的な文だという特徴付けられる，一つの文である，というだけの存在である．

ここでは，まず真理の改訂意味論の**簡略化版**（Gupta and Belnap（1993）と定義は違うが，本証明の目的には充分である）を定義しよう（Halbach 1996; Horsten 2012）．

定義 2　任意の $S \subseteq \omega$ に対し，

- $(\mathbb{N}, S) \models \varphi$ であるとは，$(\mathbb{N}, S) \models \mathbf{Tr}(x) \iff x \in S$ がすべての真理述語の登場箇所について成立するとしたときに φ が真となる場合を言う．
- S に対し Γ が改訂オペレーターであるとは，$\Gamma(S) = \{\ulcorner\varphi\urcorner : (\mathbb{N}, S) \models \varphi\}$ を満たす場合を言う．
- 任意の自然数 n に対し Γ^n を，$\Gamma^0(S) = S$ であり，$\Gamma^{n+1}(S) = \Gamma(\Gamma(S))$ を満たすものとして定義する．
- S を先頭とする真理の改訂列を以下のように定義する：

$$\langle \Gamma^0(S), \Gamma^1(S), \cdots, \Gamma^n(S), \cdots \rangle$$

もちろん，φ が算術的な式（真理述語 **Tr** を含まない）である場合は，$(\mathbb{N}, S) \models \varphi \iff \mathbb{N} \models \varphi$ である．

また，改訂列に関しては，全体の振る舞いではなく，ある特定の文（例えば Λ など）の振る舞いに興味がある場合がある．その場合は，S として $\{\Lambda\}$（および $\{\neg\Lambda\}$）を考え，それを「Λ の改訂列」と呼ぶこととする．

この改訂列は，一目で分かるように，クリプキの不動点意味論の構成を大分参考にしている．違いは，クリプキの場合は Γ は単調増加オペレータであり，帰納的に真理述語の領域を増やしていくものであった．一方，階層理論の場合は，Λ の例が示すように，増加となっていなくて良い（そのかわりその場合は不動点に到達することはできない）．もちろん，真理値が収束する場合は，階層理論であっても，クリプキ流の不動点まで到達ケースを考えることは有意義であろうということで，収束列をクリプキの不動点意味論に準じて，改訂列を，有限だけではなく，無限の順序数まで考えることとする．

定義 3　任意の順序数 α に対し，

- $\Gamma^{\alpha+1}(S) = \Gamma(\Gamma^{\alpha}(S))$,
- α が極限順序数の時，$\Gamma^{\alpha}(S) = \cup_{\beta<\alpha}\Gamma^{\beta}(S)$

なお，今後，自然数を有限の順序数と同一視する．

さて，クリプキの不動点意味論の場合と同じく，ステージ ω までに登場しない文の例は，以下のような文である．

$$\mathbf{Tr}(\ulcorner\forall x\mathbf{Tr}(g(x))\urcorner)\ \text{ただし}\ g(n) = \ulcorner\underbrace{\mathbf{Tr}(\cdots\mathbf{Tr}}_{n\,\text{個}}(\ulcorner\bar{0} = \bar{0}\urcorner)\urcorner$$

任意の n について $\mathbf{Tr}(g(n))$ はステップ n で真理述語の外延に入り，その上限として $\forall x\mathbf{Tr}(g(x))$ はステップ ω でやっと $\mathbf{Tr}$ の外延に含まれ，上の式はステップ $\omega+1$ で外延に含まれる．その意味で，サイクルが ω より長い文の評価は，極限順序数が必要となる．

ただし，真理述語を持つ算術の文は，高々可算個しか存在しない．従って，以下が言える．

補題 2　ある順序数 $\alpha<\beta$ が存在し，$\Gamma^{\alpha}(S) = \Gamma^{\beta}(S)$ が任意の S に対し成立する．

つまり，改訂列は，順序数の長さで見た場合，周期的であるということである．

さて，真理の振る舞いをみるためには，その振る舞いの分類方法が必要である．以下に，代表的な例を載せる．

定義 4　任意の論理式 φ を考える．

- φ が**安定的**（stable）であるとは，ある順序数 α が存在し，任意の $\beta \geq \alpha$ に対し $\varphi \in \Gamma^{\beta}(\{\varphi\})$ である場合を言う．同様に，「安定的に真である」「安定的に偽である」という概念も定義出来る．
- φ が**ほとんど安定的** (nearly stable) に真（偽）であるとは，ある β が存在し，任意のステージ $\alpha > \beta$ においてある自然数 n が存在し，任意の $m > n$ に対し $\varphi \in \Gamma^{\alpha+m}(S)$ となる（$\varphi \notin \Gamma^{\alpha+m}(S)$ となる）場合を言う．
- φ が**パラドキシカル**（paradoxical）であるとは，φ が安定的でない場合を言う．

例としては，例えば（多くの）人間は，身長が 140cm を超えると，その後ずっと 140cm を越え続ける．この意味で身長が 140cm より高いことは安定的に真である．一方，毎年度，前半は暑い日もあるが，10 月を過ぎると寒くなる．この意味で天候が寒いことはほとんど安定的に真である．改訂意味論の本来の意図は，安定的に真（偽）な文を

「真（偽）である」とみなそう，というものであった．通常の算術の定理（およびその否定）は安定的に真（偽）である．それだけでなく，一部の非基底的な文，例えば「ホントツキ文」(truth teller)

$$\tau \equiv \mathbf{Tr}(\tau)$$

も安定的である．τ は，真であると仮定すると安定的に真だし，偽であると仮定すると安定的に偽である．一方，嘘つき文は当然パラドキシカルになる．

真理の改訂理論は，「真理の振る舞い」を記述する理論である．ウソツキ文のような真理理論においてパラドックスを起こすような文を，真理値が一つに決まらず，その真理値がずっと改訂を続けるものとして分析する．パラドキシカルな文の真理値そのものではなく，その真理値の振る舞いに注目した，直感的にわかりやすい理論であり，グプタとベルナップ以外にも複数の源流を持ち，広く研究が行われている．

しかし，この理論は，そもそも部分的定義に関する一般理論としてスタートしたものであり，真理は部分的に定義される概念であるためにその一応用例として扱われているにすぎないことはよく看過されている．真理の改訂理論は，真理概念とは本質的に循環的なものであり，真理の表現力は循環性によって生まれるとして扱う．そして循環的に定義される概念を表現するための中核的な概念が**仮説性**である．真理述語の外延は確定的ではなく，状況によって変化する動的なものであると見なされる．動的であるとは，例えば Λ は，真であると仮定されると偽となり，偽と仮定されると真となるなど，状況によって真理値の割り当てが異なるということである．このような状況は，定義の**仮説性**と呼ばれる．そして，真理値の割り当ては，まさしく部分的再帰関数における数値の計算のように，安定的な文の多くは真理値計算が有限ステップで停止し，割り当てが成功するが，そうでないパラドキシカルな文の場合は，計算が無限に続き，その文の真理値は計算できない．真理のような部分的に定義される概念は仮説的である，すなわちその概念の外延は固定的なものではなく，ある前提の下ではそれが元として含まれる／含まれないことが決まるというものであると考えられている．このような部分的に定義される概念の他の例として，彼らは，たとえば素朴集合論における集合概念をあげている．

ただし，問題がある．単にウソツキ文の振る舞いを表現するだけであれば，たしかに階層理論で充分である．また，それをクリプキの不動点意味論のように古典論理上のモデルとして読み替えたければ，安定的に真となる文を「真」，安定的に偽となる文を「偽」と考えればそれなりのものができるように思われた．しかし，ω-矛盾性という問題が起こるため，数学的帰納法と自然数の標準性を，安定的に真な文を真と読み

替える路線で両方維持することは困難だということである．次章でこの問題を扱う．

2.3 公理的真理理論 FS

前述のように，ウソツキのパラドックスを乗り越え，妥当な形式的真理理論を得るために，大きく分けて二種類の解決法が提案された．最初の方法は，古典論理を優先し，古典論理は維持しつつ，T-図式を制限し，ウソツキ文を定義出来なくし排除する方法であり，もう一つは T-図式を優先し，非古典論理を採用する道である．後者も興味深いものではあるが，ここでは前者を検討する．その典型例が，本論で扱う **FS**（Friedman and Sheared 1987）である．

定義 5（FS） フリードマン・シェアーの形式的真理理論 **FS** は，算術の言語に真理述語 $\mathbf{Tr}(x)$ を付加した言語上で，以下の公理からなる真理理論である．

- 形式的算術 **PA** の公理系（ただし数学的帰納法は，真理述語を含む文にも可能である），
- 真理述語の論理結合子との形式的可換性に関する公理，
  - 任意の原子論理式 ψ に対し $\mathbf{Tr}(\ulcorner\psi\urcorner) \equiv \psi$,
  - $(\forall x \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(\dot{\neg} x) \equiv \neg\mathbf{Tr}(x)]$,
  - $(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x \dot{\wedge} y) \equiv \mathbf{Tr}(x) \wedge \mathbf{Tr}(y)]$,
  - $(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x \dot{\vee} y) \equiv \neg\mathbf{Tr}(x) \vee \mathbf{Tr}(y)]$,
  - $(\forall x, y \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(x \dot{\rightarrow} y) \equiv (\mathbf{Tr}(x) \rightarrow \mathbf{Tr}(y))]$,
- 真理述語の量化子との形式的可換性に関する公理，
  - $(\forall x \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(\dot{\forall} z\, x(z)) \equiv \forall z \mathbf{Tr}(x(z))]$,
  - $(\forall x \in \mathbf{Form})[\mathbf{Tr}(\dot{\exists} z\, x(z)) \equiv \exists z \mathbf{Tr}(x(z))]$,
- 特別な推論規則：

$$\frac{\varphi}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}\ \mathbf{NEC} \qquad \frac{\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\varphi}\ \mathbf{CONEC}$$

ただし **Form** を論理式のゲーデル数の集合とする．

注意として，任意の具体的な論理式 φ, ψ 等に対し，論理結合子との可換性（$\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ など）を証明することは **NEC**, **CONEC** のみから可能であり，それらに対しては形式的可換性公理は必要ない．しかし，一般のゲーデル数（超準数である）に対し，可換性を証明することは不可能であり，そのために可換性公理が導入さ

れている点をここで指摘しておく.

この体系の特徴は，まず，任意の具体的な論理式 φ に対し，T-文を証明することができる点にある．しかしウソツキ文は作れない．ウソツキ文を作るためには，T-図式の自由変数の箇所（論理式のゲーデル数をいれる部分）について対角線論法を行う必要がある．しかし，**NEC**, **CONEC** では，特定の論理式について真理述語の導入と除去はできても，一般の自由変数にたいし真理述語の導入や除去を行えない．この制限が，ウソツキ文に相対化された T-図式が真理理論の定理となることを防ぐ.

より本質的な点は，この理論では，真理に関し T-文を満たす以上の，一般的な性質も証明できるということである．たとえば，タルスキの真理定義の場合，その意味論において以下の式が成立する（ただし **Fml** は L_ω の文のゲーデル数の集合とする）:

$$(\forall x \in \mathbf{Fml})(\exists y)[\mathbf{Tr}_y(x) \vee \mathbf{Tr}_y(\dot{\neg}x)]$$

この文は「**任意の論理式について排中律が成立する**」ことを主張する．単に T-文を寄せ集めたような真理理論の場合，この排中律のような，真理に関するメタな原理の真理性を証明できない．タルスキをして T-文は興味深い一般化を証明するにはあまりに弱すぎると言わしめた理由はこの点である．しかし **FS** の場合，真理述語の可換性に関する公理群が，こういう一般的言明を可能にしてくれる．そして，一般的言明を可能にする規則の中でも特別なのが **NEC**, **CONEC** 規則である．これらは，**反映原理**，つまり「証明可能な文は真である」という直観を表現する.

さて，**FS** の無矛盾性に関し，**FS** は非常に良いモデルを持つ事が知られている.

定理 2　**FS** は無矛盾である．すなわち **FS** の任意の有限部分断片はモデルを持つ.

proof T を **FS** の任意の有限断片とする．**FS** の任意の有限断片は，真理の改訂意味論の ω までの階層がモデルを提供することが知られている．通常の改訂意味論の場合と違い，**FS** のモデル構成においては，改訂規則に当たるのは **NEC**，**CONEC** 規則の適用にあたる（本来の改訂意味論に対し，**FS** の改訂意味論は大分性格が異なっている）．実際に S のモデルとして，以下の改訂列 $\langle S_i : i \in \omega \rangle$ を構成してみよう.

$$S_0 = \emptyset$$
$$S_{i+1} = \Gamma(S_i)$$

さて，S に含まれる有限個の論理式のうち，もっとも真理述語を含む個数が多いもの φ を取りだそう．φ は n 個の真理述語を含むとする．このとき，φ の正規な証明には

NEC と **CONEC** は合わせて多くても $2n$ 回までしか使われていないため，$(\mathbb{N}, S_{2n}) \models \varphi$ となる．

以上により **FS** の任意の有限部分断片はモデルを持つので，コンパクトネスにより **FS** 全体も無矛盾である．□

注意として，**FS** のモデルとしては，階層は ω までで充分だということである．さきほどの $\mathbf{Tr}(\ulcorner\forall x\mathbf{Tr}(g(x))\urcorner)$ の例で言えば，形式的な真理述語の可換性が，この文が $\forall x\mathbf{Tr}(g(x+1))$ と同値な事を保証するため，階層 ω までで評価が可能となる．

グプタ・ベルナップによる真理の改訂理論は真理述語の無限に続きうる振る舞いを扱う枠組みであるが，本定理は，改訂理論と本論における **FS** の無限的な振る舞いの分析との間の密接な関係を強く示唆するものである．なお，以上は **FS** の有限部分のモデルの構成であったが，一方，**FS** 全体のモデルの構成に関しては大きな困難があることが知られている．

なお，補足として，真理の改訂理論において以下が成立する．

定理 3　**FS** の定理は全て，この意味論においてほとんど真なる文と評価される．

proof **FS** の公理は全てほとんど真なる文である．それより先は，その定理の証明法に関する帰納法により証明される．□

なお，階層を ω より上で考えた場合，否定と真理述語の可換性のみは安定的に真ではないが，他は安定的に真である．

§3　ω-矛盾性：FS と改訂意味論の ω-矛盾性

3.1　FS の ω-矛盾性

ω-矛盾性は，多くの場合，強い循環性（不動点定理）により直観的意味が無限列を生成する元が定義可能なのが原因である．**FS** の場合も同様である（マッギーのパラドックス）．まず，ラフな説明を与えよう．大まかに言うと，「この文は真である」という文が生成する無限列の否定文を考える：

$$\lambda \equiv \neg(\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\cdots)\urcorner)\urcorner)\urcorner))$$

この λ の直感的意味は「文「文「文「…」は真」は真」は偽」である．さて，この文の真偽はどうなるのだろうか．λ が真だと仮定する（偽のケースは省略）．このとき「λ

は真である」も真である．同様に任意の自然数 n について $\underbrace{\mathbf{Tr}(\cdots\mathbf{Tr}}_{n\,個}(\lambda)\cdots)$ が成立する．従って，もし体系が ω-無矛盾（つまり ω の元が $0,1,2,3,\cdots$ という普通の自然数のみ）であれば，$\mathbf{Tr}(\mathbf{Tr}(\mathbf{Tr}(\cdots)))$ という無限列も真であるはずである．しかしこの文は $\neg\lambda$ と同値であり，矛盾である

つまり，デフレ主義的な真理観は，λ のような無限列の定義を可能にする．このような無限列は，計算機科学でよく研究されているストリーム（余帰納的対象）の一種であり，計算機科学的にも面白い構造を持つ．このパラドックスのフォーマルな証明を以下に再掲する．

補題 3（マッギー） 任意の形式的な真理理論 T は，**PA** と **NEC** 規則を含み，以下を証明する無矛盾な理論だと仮定する．

(1) $(\forall x,y)[x,y\in\mathbf{Form}\to(\mathbf{Tr}(x\dot{\to}y)\to(\mathbf{Tr}(x)\to\mathbf{Tr}(y)))]$,

(2) $\mathbf{Tr}(\bot)\to\bot$,

(3) $(\forall x)[x\in\mathbf{Form}\to\mathbf{Tr}(\dot{\forall}yx(y))\to(\forall y\mathbf{Tr}(x(y)))]$

このとき T は ω-矛盾になる．

proof 不動点補題により，以下の論理式 γ を定義することができる．

$$\gamma\equiv\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))$$

ただし g は以下を満たす再帰関数だとする．

$$g(0,\ulcorner\varphi\urcorner)=\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner$$
$$g(x+1,\ulcorner\varphi\urcorner)=\ulcorner\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\varphi\urcorner))\urcorner$$

本証明では，この γ が **FS** で証明可能であり，同時に ω-矛盾性の証拠となることを示す．

まず，$\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\to\gamma$ を示す．補題で仮定された可換性から，以下の式変形が可能である：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma\quad\equiv\quad\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\to\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}\,\mathbf{NEC}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\to\mathbf{Tr}(\ulcorner\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}\,補題\,(1)}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\to\neg\forall x\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))\urcorner)}\,補題\,(3)}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\to\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x+1,\ulcorner\gamma\urcorner))}}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\to\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))}\,結論の弱化}{\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\to\gamma}$$

ただし補題 (3) の適用の箇所は，詳細に書くと，$\mathbf{Tr}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi \to \bot\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\bot\urcorner) \equiv \mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \bot \equiv \neg\mathbf{Tr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と，$\to$ に関する可換性を使用している．

さて，γ の定義より以下も成立する．

$$\cfrac{\cfrac{\neg\gamma \to \forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))}{\neg\gamma \to \mathbf{Tr}(g(\bar{0},\ulcorner\gamma\urcorner))}}{\neg\gamma \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)}$$

以上より，$\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \gamma$ かつ $\neg\gamma \to \mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)$ であるため，$\mathbf{FS} \vdash \gamma$ となる．これは $\mathbf{FS} \vdash \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$ を意味する．

一方，γ が証明可能なため，$\mathbf{Tr}(g(\bar{0},\ulcorner\gamma\urcorner)), \mathbf{Tr}(g(\bar{1},\ulcorner\gamma\urcorner)), \mathbf{Tr}(g(\bar{2},\ulcorner\gamma\urcorner)), \cdots$ はみな証明可能である．すなわち，任意の自然数 n に対し $\mathbf{Tr}(g(\bar{n},\ulcorner\gamma\urcorner))$（言い換えれば $\gamma, \mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner), \mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\gamma\urcorner)\urcorner), \cdots$）は証明可能であるが，全体としては $\neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x,\ulcorner\gamma\urcorner))$ であることになり，ω-矛盾性は証明された．□

モデルを考えた場合，**FS** の任意のモデルにおいては，任意の標準的自然数 n に対し $\mathbf{Tr}(g(n,\ulcorner\gamma\urcorner)$ が成立するにもかかわらず，超準数 d において $\neg\mathbf{Tr}(g(d,\ulcorner\gamma\urcorner)$ が成立することとなる．

FS について，非常に不思議なのは，ω-矛盾性は真理述語を持つ文章のみに対し必要だ，ということである．というのも以下の定理が成立する：

定理 4　**FS** は算術的に健全である．つまり，任意の **Tr** を含まない算術的な文 φ に関し，**FS** で φ が証明可能ならば，**PA** でも φ が証明可能である．

当然 **PA** は ω-無矛盾であり，算術的論理式に関して言えば，ω-矛盾性は必要ない．純粋に ω-矛盾性は真理述語によって引き起こされ，γ のような真理に関する無限（一般）的な言明にしか影響を与えないことが分かる．

3.2　ほとんど安定的に真な文を真と見なす改訂意味論の ω-矛盾性

定理 2 において，**FS** の任意の有限断片はモデルを持つ事，そしてそれは改訂意味論によって与えられることを証明した．しかし，定理 3 は，ほとんど安定的に真な文を真と見なす改訂意味論では，**FS** 全体のモデルを与える事ができないことを導く．その前に，定理 2 で構成した改訂列 $\langle S_i : i \in \omega\rangle$ によって与えられる階層 ω までの改訂意味論は，あくまで **NEC**，**CONEC** の適用が有限回であるような有限断片が対象であった．**FS** 全体のような無限個の論理式を対象とする場合，何らかの方法でそれら有限部

分のモデル列の極限を取り，全体のモデルを構成しなければならない．通常は，安定的に真，もしくはほとんど安定的に真であるような論理式を集め，極限をとる（階層 ω までの改訂列を考えるため，両者に違いはない）．

$$S_\omega = \{\ulcorner\varphi\urcorner : (\exists x)(\forall y > x)[(\mathbb{N}, S_y) \models \varphi]\}$$

しかし，この S_ω は **FS** のモデルを提供しないことが知られている．

系 1　$(\mathbb{N}, S_\omega)$ は **FS** 全体のモデルとはならない．

proof 定理 3 の証明で定義した，パラドキシカルな論理式 $\gamma \equiv \neg\forall x\mathbf{Tr}(g(x, \ulcorner\gamma\urcorner))$ を思い出そう．$(\mathbb{N}, S_\omega) \models \gamma$ を仮定する．これは，S_ω の定義からある自然数 k が存在し，$i > k$ となる任意の i に対し，$(\mathbb{N}, S_i) \models \gamma$ となるはずである．このことは，$(\mathbb{N}, S_i) \models \exists x\neg\mathbf{Tr}(g(x, \ulcorner\gamma\urcorner))$，つまり $(\mathbb{N}, S_i) \models \neg\underbrace{\mathbf{Tr}(\ulcorner\mathbf{Tr}(\ulcorner\cdots\mathbf{Tr}(\ulcorner}_{k\text{ 個}}\gamma\urcorner)\cdots\urcorner)\urcorner)$ となるが，これはほとんど安定的に真，つまり $(\mathbb{N}, S_{i+k}) \models \neg\gamma$ ということであり，矛盾である．□

この系は，帰納的に定義された改訂列の極限をどのように取れば，γ のような直感的に無限的な文を含む理論のモデルを構成する事ができるかという問題を扱っている．現在，出発点の S_0 を超準モデルとする，極限の取り方を工夫する等により，**FS** 全体のモデルを構成しようと言う試みもあるが，まだ成功したものは存在しない．

このため，階層理論自体としては，ω-矛盾性を回避するため，（ほとんど）安定的に真である文を真と見なす直感的にわかりやすい方法を断念せざるを得ない．通常は，もっと複雑な極限規則を採用し，ω-無矛盾でモデルの領域を標準モデル $\mathbb{N}$ のままとしながら，帰納法を真とする手法が選択されている．しかし，この方法では，結果的な真理理論が再帰的に公理化不可能になってしまうことが知られている．

§4　終わりに

本節では，本ノートの内容を概観する．真理の改訂理論は，文に固定的な真理値を割りふるのではなく，その真理値の振る舞いを記述し，分類する．この意味で，デフレ主義などと親和性が高く，より広い視点からの文のパラドックス性の分析を可能にする．しかし改訂意味論は，「意味論」を謳うため，文の振る舞いの分類を通して「正しい文」「正しくない文」のような概念の導入を目指してしまう．その候補が「安定的に真」な文や，「ほとんど安定的に真」な文である．

これらの文は，しかし，長さ ω の無限列のなかで，非局所的（unbounded）に偽になる箇所が出るという特徴付けのため，ヤブローのパラドックスと同じタイプの，ω-矛盾性の問題に直結する．その結果，数学的帰納法や真理述語の形式的可換性を保持する場合は，体系が ω-矛盾となってしまう．

もちろん，真理について語る文の振る舞いを見るという目的だけであれば，ω-矛盾性は大した問題ではない．**FS** のように，形式的自然数論とその真理の理論をホモフォニックに，という理論でそれが大きな問題となる．しかし，これは単なる瑕疵ではなく，真理の振る舞いを見ると言うことは，無限の長さの改訂列を対象とすると言うことであり，有限性の概念が，通常の標準モデルの意味での有限性と異なるような，より広い（有限的手段でコーディングされた無限列を許容するような）意味を持つのは避けられないことだと思われる．

参考文献

Beal, Jc. 2008. *Spandrels of truth*. Oxford: Oxford University Press.

Beal, Jc and Glanzberg, Michael. 2008. Where the paths meet: remarks on truth and paradox. *Midwest Studies in Philosophy*. 32. 169–198.

Davidson, Donald. 2001. *Inquiries into truth and interpretation*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press. [ドナルド・デイヴィドソン.『真理と解釈』野本和幸 [ほか] 訳. 東京：勁草書房. 1991]

———. 2010. *Truth and predication*. Cambridge, Mass: Harvard University Press. 2005. [ドナルド・デイヴィッドソン.『真理と述定』津留竜馬訳. 東京：春秋社. 2010]

Feferman, Solomon. 1984. Useful type-free theories. *Journal of Symbolic Logic*. 49: 75–111.

Field, Hartry. 1972. Tarski's theory of truth. *Journal of Philosophy*. 64: 347–375.

———. 2008. *Saving truth from paradox*. Oxford: Oxford University Press.

Fitting, Melvin. 1986. Notes on the mathematical aspects of Kripke's theory of truth. *Notre Dame Journal of Formal Logic*. 27: 75–88.

Friedman, Harvey and Sheared, Michael. 1987. An axiomatic approach to self-referential truth. *Annals of Pure and Applied Logic*. 33: 1–21.

Gupta, Anil and Belnap, Nuel. 1993. *The revision theory of truth*. Cambridge: MIT

Press.

Halbach, Volker. 1996. *Axiomatische Wahrheitstheorien*. Boston: Walter De Gruyter Inc.

———. 2012. *Axiomatic truth Theories.* Cambridge: Cambridge University Press.

Halbach, Volker and Horsten, Leon. 2005. The deflationist's axioms for truth. In *Deflationism and paradox*, eds. Beal, Jc and Armour-Garb, Bradley, pp. 203–217. Oxford: Oxford Universoty Press.

Hájek, Petr. 1999. Ten questions and one problem on fuzzy logic. *Annals of Pure and Applied Logic*. 96. 157–165.

Hájek, Petr. Paris, Jeff B. and Shepherdson, John C. 2000. The liar Pparadox and fuzzy logic. *Journal of Symbolic Logic* 65: 339–346.

Horsten, Leon. 2012. *The Tarskian turn*. Cambridge: MIT Press.

Kripke, Saul. 1975. Outline of a theory of truth. *The Journal of Philosophy* 72: 690–716.

Leitgeb, Hannes. 2001. Theories of truth which have no standard models. *Studia Logica* 68: 69-87.

McGee, Vann. 1985. How truthlike can a predicate be? A negative result. *Journal of Philosophical Logic* 17: 399–410.

Priest, Graham. 1987. *In contradiction.* Oxford: Clarendon Press.

Restall, Greg. 1993. Arithmetic and truth in Łukasiewicz's infinitely valued logic. *Logique et Analyse* 36: 25–38.

Tarski, Alfred. 1944. The semantic conception of truth and the foundations of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research* 4 : 341–376 [アルフレッド・タルスキ「真理の意味論的観点と意味論の基礎」『現代哲学基本論文集』飯田隆訳. 51–120 頁, 東京: 勁草書房. 1987]

Yanofsky, Noson S. 2003. A Universal approach to self-referential paradoxes, incompleteness and fixed points. *The Bulletin of Symbolic Logic* 9: 362-386.

Yatabe, Shunsuke. 2011. Yablo-like paradoxes and co-induction. *Springer Lecture Notes in Computer Science* 6797: 99–103.

飯田隆. 2002 年. 『言語哲学大全（IV）』東京：勁草書房.

山岡悦郎. 1990 年. 「Kripke 真理論とその数学的構造」『人文論叢：三重大学人文学部文化学科研究紀要』第 7 巻，1–9 頁.

———. 1996 年.『現代真理論の系譜』東京：海鳴社.

八木沢敬. 2013 年.『意味・真理・存在』東京：講談社.