Title	The homotopy groups of Lie groups of low rank(Abstract_要旨)
Author(s)	Mimura, Mamoru
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1967-07-24
URL	http://hdl.handle.net/2433/212329
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	none

【43】

氏　名	三　村　護（みむら　まもる）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博学211号
学位授与の日付	昭和42年7月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**The homotopy groups of Lie groups of low rank** （低階数リー群のホモトピー群）
論文調査委員	（主査）教授 戸田　宏　教授 小松醇郎　教授 永田雅宜

論文内容の要旨

主論文においては，階数の低いリー群のホモトピー群を決定することが企てられている。一般に，リー群のホモトピー群を求めることは，単純リー群のそれを求めることに帰着される。E. Cartan は単純リー群を，典型群 A_n, B_n, C_n, D_{n+2} $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ および例外群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 に分類した。ここで，添数 n 等はそのリー群の階数をあらわす。典型群 A_n, B_n, C_n, D_n は，それぞれ，特殊ユニタリー群 SU(n+1)，スピノール群 Spin (2n+1)，シンプレクティック群 Sp(n) および Spin(2n) で代表される。

$\pi_k(G)$をリー群 G の k 次ホモトピー群とする。G=SU(n) の場合に，$k<2n$ ならば $\pi_k(SU(n))$ は n に無関係に k のみで定まり，SUの k 次安定ホモトピー群といわれる。この群が無限巡回群（k：奇数）または単位元のみよりなる（k：偶数）ことは Bott の周期性定理より知られる。さらに，コホモロジー作用素等を利用することによって，$\pi_k(SU(n))$ は $k\leq 2n+7$ まで決定されている。他の典型群についても同様な結果がえられており，申請者も，参考論文6において，K—理論を応用して $\pi_k(Sp(n))$ を $k\leq 4n+8$ の範囲で決定している。

階数 n がホモトピー群の次数 k に比して小なるときには，上にのべた方法は実際上役に立たない。申請者は位相幾何学における各種の手段を駆使した上に，独自の工夫を加えることによって，階数 $n\leq 4$ である単純リー群 G の k 次ホモトピー群 $\pi_k(G)$ を $k\leq 23$ までほぼ完全に決定した。ここで G が $A_1=B_1=C_1=S^3$（3次元球面）の場合には，既知の結果および参考論文1の一部で十分であり，G が $B_2=C_2$, A_2 および $A_3=D_3$ の場合は，参考論文2において決定されている。さらに，$\pi_k(C_n)$ $(k\leq 23)$ は，すべての n について，参考論文3 において決定された。また D_4 の場合は B_3 の場合に帰着される。かくして，残された問題である $G=B_3$, B_4, G_2, F_4 のホモトピー群が主論文において取り扱われ，低階数リー群のホモトピー群の決定問題は，次数 $k\leq 23$ における解決がえられたのである。

申請者は問題を取り扱うに当たって，ホモトピー群をその各 p—成分（p は素数）に分けて考察する。

p が奇素数の場合：$\pi_k(B_n)$の p—成分は $\pi_k(C_n)$ の p—成分と同型で，既に知られている。G_2，F_4 に対しては，まずそれらの 3—連結ファイバー空間，$\tilde{G}_2, \tilde{F}_4$ の p を法とするコホモロジー環の構造およびそこにおける Steenrod 作用素を求めた。さらに，高次の連結ファイバー空間を考察することによって，ホモトピー群の p—成分を求めている。p=3，$G=G_2$ の場合には，この方法では不十分であるので，ホモトピー群における二次的結合の理論の適用によって，問題を解決している。

p=2 の場合：二次的結合の一般論を展開し，そのリー群における特有の性質を考察する。次にバンドルのホモトピー完全系列との関連において，以後の計算に有用な若干の補題を用意する。また，$\pi_{14}(F_4)$ の決定は特に重要な因子であるので，これについては J—準同型の理論を利用して $\pi_{14}(F_4)$ を定めている。これらの準備の下に，ホモトピー群 $\pi_k(G)$ の2—成分は，$G=G_2$，F_4，B_3，B_4 の順に決定される。

参考論文1は，20違いの球面のホモトピー群，参考論文5は21および22違いの球面のホモトピー群を決定したものであり，参考論文4は5のための基礎理論として，高次結合と一般化された Hopf の準同型の性質を論じたものである。参考論文2，3，6についてはすでに述べた通りである。

論文審査の結果の要旨

ホモトピー群は，1934年 W. Hurewicz によって定義されて以来，位相幾何学における基本的な要素として，その決定は一つの重要な課題となっている。特に，リー群のホモトピー群は主バンドルの障碍理論によって微分幾何学とも深く関連する。リー群のホモトピー群の決定は，単純リー群の場合に帰着される。単純リー群は，E. Cartan によって典型群 A_n，B_n，C_n，D_n と例外群 G_2，F_4，E_6，E_7，E_8 に分類された。ここで添数 n 等はリー群の階数をあらわす。

リー群 G の階数 n が，そのホモトピー群 $\pi_k(G)$ の次数 k に比して十分大なるときは，$\pi_k(G)$ は k にのみ関係して定まり，k 次の安定ホモトピー群といわれ，Bott の週期性定理および Bott-Samelson の理論で決定されている。また，これらよりの発展として，n が比較的に大きい準安定ホモトピー群の場合も多くの結果が発表されている。これに反して，階数 n が小さい場合には，問題は複雑となり，無証明の報告を除けばホモトピー群の次数たかだか9，報告を入れてもたかだか13の範囲で決定されているに過ぎなかった。

主論文において，申請者は $B_3=\mathrm{Spin}(7)$，$B_4=\mathrm{Spin}(9)$，G_2，F_4 のホモトピー群を調べ，参考論文の結果と合わせ，階数 $n \leq 4$ のリー群のホモトピー群をその次数 $k \leq 21$ の範囲で完全に，次数 k=22，23 でわずかの任意性を除いて決定した。この結果はホモトピー論における一つの大きな前進であると考えられる。

低階数リー群のホモトピー群を決定するには，種々の困難があるが，申請者は位相幾何学の多くの知識を駆使した上に特殊な工夫を加えることによってこの困難を克服している。申請者はホモトピー群をその各 p—成分（p：素数）に分けて考えた。p が奇素数の場合には，主としてリー群の高次連結ファイバー空間のコホモロジー環と，そこにおける Steenrod 作用素の状態を決めることによって，p—成分を定め，p=3 の場合にはこれに2次的結合を補助手段として加えた。p=2 の場合には，ファイバーバンドルのホモトピー完全系列に関連して，2次的結合の一般論およびリー群における特殊な理論を展開する。

また非安定な J—準同型をも考察する。これらの準備の上で，参考論文２の結果を拡大する方向で問題を解決している。

以上の様に，主論文の結果は単に複雑な計算によってえられたものでなく，創意と工夫によって達成されたものであることを見逃してはならない。

参考論文１，４，５は球面の非安定ホモトピー群に関する現在最高の結果を出した労作であり，参考論文３，６はシンプレクティック群の非安定および準安定ホモトピー群に関する結果を出したものである。参考論文２は $B_2=C_2$，A_2 および $A_3=D_3$ のホモトピー群を次数≦23 で決定したものである。これらは，申請者が一貫してホモトピー論の発展に寄与していることを示している。

以上のことから，主論文，参考論文をあわせて，理学博士の学位論文として，十分価値があるものと認める。