代数幾何学シンポジウム記録
1980年度　pp.108-129

K3曲面の周期の逆問題とKähler性

名大 理　浪川 幸彦

§0. 問題と主定理

こゝでの話は、すべて、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

定義 1 (A. Weil). 2次元 compact 複素多様体 S が 2条件：

① $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$； ② 標準束 K_S が自明 ($\Leftrightarrow$ S 上どこでも零にならない正則2次形式 ω が存在する) をみたすとき、S を K3曲面と呼ぶ。

A) K3曲面の周期

$H^2(S, \mathbb{Z})$ には "$\wedge$" によって、自然に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が入り、$H^2(S, \mathbb{Z})$ は、格子 (lattice) となる。 これは、符号数が (3, 19) で even ($\langle x, x\rangle \equiv 0 \ (2)$) かつ unimodular ($|\det(\langle\ ,\ \rangle)| = 1$), 従って、その構造は、一通りに決まって、

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq L = (-E_8) \perp (-E_8) \perp \overset{3}{\perp} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。以下 $L_{\mathbb{C}} = L \otimes \mathbb{C}$, $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ とする。

定義 2. (S, ψ) しるし付き (marked) K3曲面 $\Leftrightarrow$ S, K3曲面, $\psi : H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$, 格子としての同型.

S の0でない正則二次形式 ω のコホモロジー類 $[\omega] \in H^2(S, \mathbb{C})$ は、$H^0(S, \Omega^2_S) = H^{2,0} \ (\subset H^2(S, \mathbb{C}))$ を生成し、関係式

$$H^{0,2} = \overline{H^{2,0}}, \quad H^{1,1} = (H^{2,0} \oplus H^{0,2})^{\perp}$$

によって $H^2(S, \mathbb{C})$ の Hodge 構造を定めることに注意する。

また $[\omega]$ は 関係式

$$\langle[\omega], [\omega]\rangle = 0, \quad \langle[\omega], \overline{[\omega]}\rangle > 0$$

をみたす.（$H^2(S, \mathbb{C}) = H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ として 内積 $\langle \ , \ \rangle$ は 自然に拡張して考える.）

<u>定義</u> 3.

$$\mathcal{D} = \{(a) \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \ ; \ \langle a, a\rangle = 0, \ \langle a, \bar{a}\rangle > 0\}$$
$$\subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{P}^{21}.$$

$$\underset{\text{開集合}}{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}^c = \underset{\text{二次超曲面}}{\{(a) \ ; \ \langle a, a\rangle = 0\}} \subset \mathbb{P}^{21}.$$

$\mathcal{D}$ は 上の注意から $L_{\mathbb{C}}$ 上の Hodge 構造全体である.

<u>定義</u> 4. しるし付き（marked）K3曲面（S, ψ）に対し $[\omega_{(S,\psi)}] := (\psi_{\mathbb{C}}([\omega])) \in \mathcal{D}$ を（S, ψ）の 周期（periods）と呼ぶ.

$\mathcal{D}$ には L の直交群 $O(L)$ が 自然に作用しているが しるし付きK3曲面 (S, ψ), $g \in O(L)$ に対し 明らかに

$$g([\omega_{(S,\psi)}]) = [\omega_{(S, g\circ\psi)}]$$

がなりたつ．つまり $\mathcal{D}$ 上での $O(L)$ の作用は K3 曲面のしるし付け（marking）を変えることに対応している．

B) 主結果 (→ 追記)

こゝでの目的は Todorov のアイデアによる次の二つの定理を証明することにある．

主定理 1（逆問題）．$\mathcal{D}$ の任意の点に対し，それを周期とするしるし付き K3 曲面が存在する．

主定理 2（Kähler 性）任意の K3 曲面は Kähler 計量を持つ．

系（小平予想）．S を 2次元 compact 複素多様体とする．

$$S \text{ が } \mathrm{K\ddot{a}hler} \Longleftrightarrow b_1(S) \text{ が偶数}.$$

分類理論から，S が楕円曲面か K3曲面以外の場合には，予想は正しいことが分る。楕円曲面の場合には，宮西 [6] が既にこれを証明しているので，主定理 2 が上の予想に最終的解決を与えた．

（追：主定理 2 の証明は不備であった。追記 1 参照）

C) 証明に用いる本質的な諸定理

Todorov のアイデアは次に述べる 2つの深い結果を巧みに結びつけるところにある．彼の証明は，本質的な点があいまいだったが，幸いなことに筋道は正しかった．又，Andreotti の方法（§2）を用いたことで（これは Griffiths の注意による），Atiyah - Hitchin - Singer の方法 [1] は，その枠組だけしか必要でなくなる。

そして，逆に，後者の方法のより自然な見方が得られ，その方面での応用が期待される。

定理 1′（偏極 K3 曲面に対する逆問題）．

1）$\mathcal{D}$内の点 $(a) \in \mathcal{D}$ がさらに条件（A）"L内の元 c で，$\langle c, c\rangle > 0$，$\langle a, c\rangle = 0$ となるものがある" をみたしているとする．このとき，しるし付きK3曲面 (S, ψ) と，S上の *quasi-ample* な直線束 $\mathcal{L}$ があって，後者の Chern 類を $c(\mathcal{L}) \in H^2(S, \mathbb{Z})$ とすれば，

$$[\omega_{(S,\psi)}] = (a), \qquad \psi(c(\mathcal{L})) = c$$

をみたす。

2）上でさらに c が条件（B）"$\langle p, p\rangle = -2$ であるようなすべての $p \in L$ に対し $\langle a, p\rangle \neq 0$ または $\langle c, p\rangle \neq 0$" をみたすならば，上の $\mathcal{L}$ は *ample* になる．

この定理が，今の場合最も本質的なものといえる。実は，上の定理を，この形で述べた文献は，今のところない．これは，K3 曲面の周期に関する一連の深い事実を用いて証明される．その証明の粗筋は，§4 で示す．

定理 2′（Yau：Carabi 予想の解[10]）．K3 曲面上の，任意の kähler 計量に対し，対応する計量形式のコホモロジー類が同じであるような，Ricci flat な kähler 計量が存在する．

定理 1′ から，定理 1 を導く上で用いられる自明でない唯一の深い結果がこれである。上記2定理から，主結果は，以下に見るように実に明快な道筋をたどって導か

れる。

<u>定理</u> 3′ (Torelli の定理弱形, Looijenga-Peters 式 [5]). 2つのしるし付きK3曲面 (S_1, ψ_1), (S_2, ψ_2) があって, S_1 は kähler とする。このとき

$$[\omega_{(S_1, \psi_1)}] = [\omega_{(S_2, \psi_2)}] \Rightarrow S_1 \cong S_2 .$$

この定理は, すべてのK3曲面が kähler であることを示すのに必要である. つまり, この定理から, $\mathcal{D}$ の各点 (α) に対し, それを周期とする kähler K3曲面が<u>存在する</u>ことを言えばよいわけである。

(追: この定理証明の不備が見出された。 追記1参照)

§1. <u>$\mathcal{D}$ 内の円錐曲線族</u>

<u>補題</u> 1. $L_{\mathbb{R}}$ 内の3次元ベクトル空間 M 上内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が, 正定値ならば,

$$Q = \mathbb{P}(M_{\mathbb{C}}) \cap \{(a) ; \langle a, a \rangle = 0\} \subset \mathcal{D}$$

である. Q は $\mathbb{P}(M_{\mathbb{C}})$ $(\cong \mathbb{P}^2)$ 内の二次曲線で, 従って, $\mathbb{P}^1$ と同型であることに注意しておく。

<u>証明.</u> $(a) \in Q$ に対し, 条件から $\langle a, \bar{a} \rangle > 0$ である.

<u>注意.</u> 上記のような形の Q 全体は, $O(L_{\mathbb{R}})$ の等方部分群をふくむ, 極大

compact 部分群の軌道（orbit）としてあらわれる部分多様体の全体と一致する．

補題 2．　$(a) \in \mathscr{D}$ に対し，$L_{\mathbb{R}}$ 内の平面 P_a を

$$P_a = (\mathbb{C}a + \mathbb{C}\bar{a}) \cap L_{\mathbb{R}}$$
$$= \mathbb{R}\,\mathrm{Re}\,a + \mathbb{R}\,\mathrm{Im}\,a$$

として定義する．　すると P_a 上内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値である．

証明．　$\mathrm{Re}\,a = x$,　$\mathrm{Im}\,a = y$ とおけば

$$0 = \langle a, a\rangle = (\langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle) + 2\sqrt{-1}\langle x, y\rangle.$$
$$0 < \langle a, \bar{a}\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle.$$

よって　$\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle > 0$,　$\langle x, y\rangle = 0$.

補題 3．　$(a) \in \mathscr{D}$,　Q を補題 1 のものとする．　すると

$$(a) \in Q \Leftrightarrow P_a \subset M$$

証明　$(a) \in Q \Leftrightarrow \mathbb{C}a \subset M_{\mathbb{C}}$ だが，これから $\mathbb{C}\bar{a} \subset M_{\mathbb{C}}$ に注意すれば　$P_a \subset M$．　逆に $P_a \subset M$ のとき　P_a の基底　x, y で $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle > 0$,　$\langle x, y\rangle = 0$ なるものをとって　$a' = x + \sqrt{-1}\,y$ とおくと　$\mathbb{C}a = \mathbb{C}a'$ 又は $\mathbb{C}a = \mathbb{C}\bar{a}'$ となることがすぐ分る．

補題 4．　a)　M 上の特殊直交群　$G = SO(M)$ は $\mathbb{P}(M_{\mathbb{C}})$ への作用により Q 上に推移的に作用している．

b）　G-共変な　2:1　被覆写像

$$\begin{array}{ccl} Q & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(M) = M-\{0\}/\mathbb{R}-\{0\} \\ \Psi & & \Psi \\ (a) & \longrightarrow & Pa^{\perp} \end{array}$$

があり.（$Q \simeq S^2$ を考慮すれば）これは 次の G-共変な 同相写像を経由する.

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\bar{\iota}"'] & M-\{0\}/\mathbb{R}^{+} \arrow[d, "\text{普遍被覆}"] \\ & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(M) \end{tikzcd}$$

2:1 となるのは $\bar{\iota}(a) = \bar{\iota}(\bar{a})$ であることによる。

<u>証明</u>．補題 3 から明らか.

<u>§2.　偏極K3曲面をふくむ．円錐曲線上のK3曲面の族．</u>

<u>序.</u>　S_0 を射影的 K3曲面とし．$\psi: H^2(S_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$ を任意のしるし付けとする．ω_0 を．S_0 の正則二次形式とし．対応する $L_{\mathbb{C}}$ の元を同じ記号であらわす　$\mathcal{L}$ を S_0 上の *ample* な直線束とし．$c = c(\mathcal{L}) \in H^{1,1} \cap H^2(S_0, \mathbb{Z})$ を その *Chern* 類とし．L の元をも同じ記号であらわす．$\mathcal{L}$ が．*Hodge* 計量（従って kähler）を定めることに注意すれば．<u>定理 2′</u> から

計量形式 μ のコホモロジー類が C となる Ricci flat な kähler 計量 g が存在する。

$M = \{Re\ \omega_0,\ Im\ \omega_0,\ c\}_{\mathbb{R}} \subset L_{\mathbb{R}}$ に対応して §1 補題 1 から、$\mathcal{D}$ 内の円錐曲線 Q が定まる。$P_0 = \{Re\ \omega_0,\ Im\ \omega_0\}_{\mathbb{R}} \subset M$ だから、§1 補題 3 から $0 = (\omega_0) \in Q$ である。

本節の目標は Q 上に S_0 の変形族 $\mathcal{S}$ を構成することである。これは、Atiyah-Hitchin-Singer の方法 [1] の特別な場合であるが、今の場合、下に述べる Andreotti の方法（命題 2）を用いることで、より直接的な構成法がえられる。なお、二次元複素トーラスの場合も事情は全く同じであり、この場合 Blanchard の構成法と本質的に同じであることが容易に確かめられる。

この部分の Todorov の推論は混乱している。補題 1 の証明は、いたずらに複雑であり、補題 2 は不十分な形で書かれ、定理 2′ を用いる本質的な部分が全く見過ごされている。

<u>補題</u> 1. S_0 を 4 次元実解析多様体としてみて、これを X と書く。

$$\Lambda^+ = \{Re\ \omega_0,\ Im\ \omega_0,\ \mu\}_{\mathbb{R}} \subset \Lambda^2 T_X^*$$

は、階数 3 の部分ベクトル束である。（T_X^* は X の（実）余接束。）

<u>証明</u>. 両者の複素化を考えて、同じことを言えばよい。ところが、

$$\Lambda^+_{\mathbb{C}} = \{\omega_0,\ \overline{\omega}_0,\ \mu\}_{\mathbb{C}} \subset \Lambda^2 T_X^* \otimes \mathbb{C}.$$

各点 $x \in X$ で S_0 の複素構造に関し ω_0 は $(2,0)$ 型，$\overline{\omega}_0$ は $(0,2)$ 型 μ は $(1,1)$ 型で，しかもどれも 0 にならない。従って 3 者は $\Lambda^2 T^*_{X,x} \otimes \mathbb{C}$ 内で一次独立である。

注意. 計量 g から定義される作用素 $*$ を用いると

$$\Lambda^+ = \{\Omega \in \Lambda^2 T^*_X \ ; \ *\Omega = \Omega\}$$

となる。$*^2 = 1$ から $\Lambda^2 T^*_X = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$，$\Lambda^- = \{\Omega ; *\Omega = -\Omega\}$，に注意しておく。Atiyah-Hitchin-Singer の方法は この $S(\Lambda^\pm)$ $(\simeq X \times S^2)$ に 複素構造を入れるものである。

補題 2. $a = \alpha\omega_0 + \beta\overline{\omega}_0 + \gamma c \in M_{\mathbb{C}}$ に対し $(a) \in Q$ とする。すると X 上の 2 次形式 $\omega_a = \alpha\omega_0 + \beta\overline{\omega}_0 + \gamma\mu$ は

$$\omega_a \wedge \omega_a = 0, \quad \omega_a \wedge \overline{\omega}_a > 0$$

（X の自然な向き付けに関して）

を満たす。

証明. $\omega_a \wedge \overline{\omega}_a = (\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta})\omega_0 \wedge \overline{\omega}_0 + \gamma\overline{\gamma}\,\mu\wedge\mu > 0.$

$$\omega_a \wedge \omega_a = 2\alpha\beta\ \omega_0 \wedge \overline{\omega}_0 + \gamma^2 \mu\wedge\mu.$$

条件 $(a) \in Q$ から

$$\int_X \omega_a \wedge \omega_a = 0$$

であるから、次の命題を示せば十分である。

命題 1. S を K3曲面（又は 2次元複素トーラス）とし、ω を S 上の 0 でない正則2次微分形式とする。 S 上の Kähler 計量 g を考え、その計量形式を μ とする。 そのとき

$$g \text{ が Ricci flat} \Leftrightarrow \omega \wedge \bar{\omega} = c\mu \wedge \mu, \quad c \in \mathbb{R}^{+}.$$

証明. 仮定から、正の実数値関数 f があって、

$$f\omega \wedge \bar{\omega} = \mu \wedge \mu$$

とかける。 S の局所座標 (z_α^1, z_α^2) を適当にとれば

$$\omega = dz_\alpha^1 \wedge dz_\alpha^2,$$

$$\mu \wedge \mu = \frac{1}{4}(\det g)_\alpha \, dz_\alpha^1 \wedge dz_\alpha^2 \wedge d\bar{z}_\alpha^1 \wedge d\bar{z}_\alpha^2$$

と表わされる。 従って、

$$f = \frac{1}{4}(\det g)_\alpha .$$

ところで、

$$
\begin{aligned}
& g \text{ が Ricci flat} \\
\Longleftrightarrow\ & \partial\bar{\partial}(\log(\det g)_\alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \partial\bar{\partial} \log f = 0 \quad (\text{つまり } \log f \text{ は 大域的調和関数}) \\
\Longleftrightarrow\ & f = \text{const.}
\end{aligned}
$$

（証明 終）

命題 2（Andreotti [9] p.252）. X を向き付けられた 4 次元可微分多様体とする。 ω が 2次の複素 C^∞-微分形式で、条件 i) $\omega\wedge\omega=0$, ii) $\omega\wedge\bar{\omega}>0$（向きに関して）, iii) $d\omega=0$ を満足するならば、X 上に、ω を正則微分形式とする複素構造が一意的に定義される。

証明. 各点 $x\in X$ で $\omega_x\in\overset{2}{\wedge}T^*_{X,x,\mathbb{C}}$ は ii) より、0ではない。条件 i) $\omega_x\wedge\omega_x=0$ から ω_x は decomposable, つまり、$T^*_{X,x,\mathbb{C}}$ の元 u_x, v_x があって $\omega_x=u_x\wedge v_x$ となる。 $F_x=\mathbb{C}u_x+\mathbb{C}v_x\subset T^*_{X,x,\mathbb{C}}$ とおけば、再び 条件 ii) から $F_x\oplus\bar{F}_x=T^*_{X,x,\mathbb{C}}$ となる。従って $\bigcup_x F_x \subset T^*_{X,x,\mathbb{C}}$ は X 上の概複素構造を定める。条件 iii) は この概複素構造が積分可能であることに他ならない。 この複素構造に関して ω が 正則形式であることは、上の決め方から明らかである。 （証明 終）

定理. 本節序の情況のもとで、Q をパラメーターとする S_0 の 複素解析変形族、

$$\pi:\mathcal{S}\longrightarrow Q,\qquad (S_p=\pi^{-1}(p),\ p\in Q)$$

および Q 上の格子の同型族

$$\Psi : R^2\pi_* \mathbb{Z}_{\mathcal{S}} = \bigcup_{p\in Q} H^2(S_p, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} Q \times L$$

であって，任意の $p \in Q$ に対し，

$$[\omega_{(S_p,\ \Psi_p)}] = p,$$

かつ，$0 \in Q$ では，S_0 は与えられたもので $\Psi_0 = \psi$ となるものが存在する。

<u>証明</u>．$\mathcal{X} = X \times Q$ を考え，$\Psi_0 = \psi : H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$ をそのまま，自然に Q 上に拡張して，Ψ をつくる。Q 上の各点

$$p = (\omega),\quad \omega = \alpha\omega_0 + \beta\overline{\omega}_0 + \gamma\mu,\quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

に対し，補題 2 を用いれば，命題 2 の条件 i), ii) が満たされていることが分る。条件 iii) は，ω_0, $\overline{\omega}_0$, μ すべてが閉形式だから明らかに満される。そこで，$\mathcal{X}_p = X \times p$ 上の複素構造 S_p を命題 2 によって定める。ω の Q による変化が正則であることに注意すると，小平 - Nirenberg - Spencer [3], p. 458 f. の推論により，$\pi : \mathcal{S} = \bigcup_{p\in Q} S_p \to Q$ は複素解析変形族であることが分る。周期についての性質は，命題 2 から明らかである。

<u>命題</u> 3．$\pi : \mathcal{S} \to Q$ を上の定理で定めたものとする．各点 $p \in Q$ に対し，S_p 上には，Kähler 計量 g_p があって p に関し，smooth に変

化する.

証明. §1, 補題 4 の $\iota : Q \to M-\{0\}/\mathbb{R}^+$ を考え さらに $\iota(0) = \mathbb{R}^+\mu$ となるようにとる。 そこで $p \in Q$ に対し $p = \sigma(0)$ である $\sigma \in SO(M)$ をとって $\mu_p = \sigma(\mu)$ とする. $0 = \sigma(0) \Leftrightarrow \sigma(p_0) = p_0 \Leftrightarrow \sigma(\mu) = \mu$ より μ_p は矛盾なく定義されることが分る. また ι の定義から μ_p は S_p 上の $(1,1)$ 型の微分型式である.

$x \in X$ で 余接空間 $T^*_{X,x}$ に g の定める計量を入れ その等距離変換を G_x ($\cong O(4)$) とすれば 補題 1 の後の注意から G_x の $\overset{2}{\Lambda} T^*_{X,x}$ への作用は M を保ち M の直交変換となっていることが分る. すなわち 全準同型写像

$$p : G_x \longrightarrow SO(M)$$

が 自然にある. (注 : 実は これは 自然な完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \to \{\pm 1\} \to & G_x (\cong SO(4)) & \longrightarrow & SO(3) \times SO(3) \to 1 \\
& \| & & \cong \\
& \mathrm{Iso}(T^*_{X,x}) & \longrightarrow & \mathrm{Iso}(\Lambda^+) \times \mathrm{Iso}(\Lambda^-)
\end{array}$$

の 一方への射影に他ならない.). 命題 2 の証明をふりかえれば $\tilde{\sigma} \in G_x$, S_0 の x での局所座標 (z_0^1, z_0^2), S_p の x での局所座標 z_p^1, z_p^2 があって 条件 $p(\tilde{\sigma}) = \sigma$, $\tilde{\sigma}(dz_0^1) = dz_p^1$,

$\tilde{\sigma}(dz_0^2) = dz_p^2$, をみたすことが分る．すると $\mu = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_0^\alpha \wedge d\bar{z}_0^\beta$ としたとき

$$\mu_p = \sigma(\mu) = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_p^\alpha \wedge d\bar{z}_p^\beta,$$

だから μ_p は 計量 $g_p = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_p^\alpha d\bar{z}_p^\beta$ を定める．

§3 主定理の証明

A） 主定理 1 の証明

$p_1 = (\omega_1) \in \mathcal{D}$ をとり §1 により P_{ω_1} を定義する。

$$V = \{a \in P_{\omega_1}^\perp ; \langle a, a\rangle > 0,\ 任意の\ p \in L ; \langle p, p\rangle = -2,$$
$$に対し\ \langle a, p\rangle \neq 0\ 又は\ \langle \omega_1, p\rangle \neq 0\}$$

とおく。これが開集合になることは比較的容易に分る．（本質的に次節命題 2, 3）ここで L の元 c で $c = c' + c''$, $c' \in V$, $c'' \in P_{\omega_1}$, となるものを選ぶ． V が開錐であることから これは可能である．

$$M = P_{\omega_1} + \mathbb{R}c = P_{\omega_1} + \mathbb{R}c'$$

上 $\langle\ ,\ \rangle$ は 正定値で これから §1 の方法で p_1 をふくむ円錐曲線 Q が

定まる. C に対し §1 補題 4 より $0 = (\omega_0) \in Q$, $\langle \omega_0, c \rangle = 0$ となる点 $(\in \tau^{-1}(c))$ が存在する. この点に §0. 定理 1′ を適用すれば しるし付き K3 曲面 (S_0, ψ) と S_0 上の直線束 $\mathcal{L}$ があって $\omega_{(S_0,\psi)} = \lambda\omega_0$, $\psi(c(\mathcal{L})) = \bar{C}$ となるものがある. ここで 上の C の決め方と 定理 1′ 2) から $\mathcal{L}$ は ample になる. なぜなら 条件 B) を確かめればよいが, $p \in L$ が $\langle p, p \rangle = -2$, $\langle p, \omega_0 \rangle = 0$, かつ $\langle p, c \rangle = 0$ なら これから $p \in M^{\perp}$, とくに $\langle p, \omega_1 \rangle = 0$, かつ $\langle p, c' \rangle = \langle p, c \rangle = 0$ で これは $c' \in V$ に矛盾.

$M = \{\mathrm{Re}\,\omega_0,\ \mathrm{Im}\,\omega_0,\ c\}$ であることに注意すると 前節の定理から Q 上にしるし付き K3 曲面の族ができ しかもその周期は パラメーターの点になっている. 特に $p_1 \in Q$ 上にも それを周期とする K3 曲面がある.

B) 主定理 2 の証明

S を任意の K3 曲面とし あるしるし付け ψ を定める. 主定理 1 から $p_1 = [\omega_{(S,\psi)}] \in \mathcal{D}$ を周期とする K3 曲面 S' があり しかも §2 命題 3 から S' は kähler 計量をもつ. §0. 定理 3′ から $S \cong S'$ で 従って S は kähler である.

注意. (S, ψ) をしるし付き K3 曲面とし $(\omega) = [\omega_{(S,\psi)}] \in \mathcal{D}$ をその周期とする. μ が S 上の kähler 計量形式であれば

$$\psi(\mu) \in V = \{ a \in P_\omega^{\perp} \,;\, \langle a, a \rangle > 0, \text{ 任意の } p \in L,$$
$$\langle p, p \rangle = -2 \text{ に対し } \langle a, p \rangle \neq 0 \text{ 又は } \langle \omega, p \rangle \neq 0 \} \quad (\text{cf } A))$$

であるが，逆に任意の V の元が（しるし付け ψ を取りかえれば）kähler 計量形式に対応するかどうかは，面白い問題である．Todorov は これを証明したと述べているが信じ難い．小平の定理から，$V \cap L$ は，Hodge 計量形式に対応していることが分る。

（追：Looijenga が肯定的証明を与えた。追記 2 参照）

§. 4 <u>定理 1′ の証明の概要</u>

定理 1′ は，この形では既発表の文献に載っていないが，K3 曲面についての，一連の主要結果を組みあわせることにより，次のように証明される．

<u>ステップ</u> 1)．$c \in L$, $\langle c, c \rangle > 0$, に対し，$\mathscr{D}(c) = \{ (a) \in \mathscr{D},\ \langle a, c \rangle = 0 \}$ の 稠密開集合 U 上では，定理がなりたつ。

c は，原始的（$c = mc'$, $m \geq 2$, とは書けない）としてよい．$\langle c, c \rangle$ に対し，K3 曲面 S と，その上の原始的 ample 直線束 $\mathscr{L}$ で，$\langle c(\mathscr{L}), c(\mathscr{L}) \rangle = \langle c, c \rangle$ となるものが存在する．$O(L)$ は，L 上の，同じ長さの原始的ベクトルの集合に推移的に作用する（[8] §6. Appendix 定理 1 の特別な場合）から $\mathscr{D}(c)$ 上の元で少なくとも <u>一つは</u> しるし付き K3 曲面

(S, ψ) の周期となっているものがある．［8］§2. 定理 1 から．$\dim T = \dim \mathcal{D}(c) = 19$ である多様体 T 上のしるし付き－偏極K3曲面の族．$f : \mathcal{X} \to T$ で 上記の $(S, \psi, \mathcal{L})$ をふくむものがある．この T は，偏極（の何倍か）の定める射影埋め込みにより．Hilbert概型の商として．えられていることに注意しておく．その周期写像

$$\Phi : T \longrightarrow \mathcal{D}(c)$$

は．局所 Torelli の定理から．étale 写像である．一方 $\mathcal{D}(c)$ は．IV 型エルミート対称領域で．$O(L, c) = \{\sigma \in O(L) ; \sigma(c) = c\}$ は．$Aut(\mathcal{D}(c))$ の算術的部分群．したがって．$O(L, c) \backslash \mathcal{D}(c)$ は．擬射影的（quasi-projective）多様体で．上の注意とあわせると．$\overline{\Phi} : T \to \mathcal{D}(c) \longrightarrow O(L, c) \backslash \mathcal{D}(c)$ の像は．開部分代数多様体であることが分る．$U = \mathrm{Im}\, \overline{\Phi}$ とすればよい。

<u>注意</u>．実は．$\mathrm{Im}\, \overline{\Phi}$ は．次数 $\langle c, c \rangle$ の原始的偏極付きK3曲面の．粗モジュラス多様体である．（Torelli の定理［8］§1.）

<u>ステップ</u> 2)．$(a) \in \mathcal{D}(c)$ を定める．$D = \{t \in \mathbb{C} ; |t| < 1\}$, $D' = D - \{0\}$ とすると．

$$\varphi : D \longrightarrow \mathcal{D}(c), \quad \varphi(0) = (a), \quad \text{正則写像}$$

$$\begin{array}{llll} f_{D'} & : \mathfrak{X}' \longrightarrow D', & \text{しるし付きK3曲面の族,} \\ & \ \ \cap \qquad\quad \cap & \\ f_D & : \mathfrak{X} \longrightarrow D & \text{その偏極多様体の族としての拡張.} \end{array}$$

で $f_{D'}$ の周期写像が $\varphi' = \varphi|_{D'} : D' \longrightarrow \mathcal{D}(c)$ となるものがある.

ステップ 1) での $f : \mathfrak{X} \to T$ が Hilbert 概型 $\mathcal{T}$ の商であったことを思いおこし. 任意の $\varphi : D \to \mathcal{D}(c)$, $\varphi(0) = (a)$ に対して 必要なら. D の 0 で分岐した分岐被覆をとって φ を $\hat{\varphi} : D \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}$ へ *lift* すればよい. *lift* が可能なことは良く知られた推論で出る。

<u>ステップ</u> 3). ステップ 2) の族を. D の 0 で分岐した被覆および $0 \in D$ 上のファイバーを変形することによって,

$$f_D : \mathfrak{X} \longrightarrow D$$

は $0 \in D$ をこめて. しるし付き K3 曲面の変形族とすることができる. (ただし. $0 \in D$ 上は. 偏極付きではない。)

このステップが最も重要である。

まず. H_2 の モノドロミーに関する巾単定理から. D の分岐被覆をとって. モノドロミーを巾単 (*unipotent*) にできる。 $\varphi(0) \in \mathcal{D}(c)$ に注意すると. 実はモノドロミーは. 自明である.

すると. <u>Kulikov [4] (及び. Persson - Pinkham [7]) の結果により. $0 \in D$ 上の ファイバーを取りかえて. K3曲面とすることができる.</u>

ステップ 4） 最終的証明.

$0 \in D$ 上の f のファイバー (S_0, ψ_0) に対し. $(a) \in \mathscr{D}$ は. S_0 の周期 $[\omega_{(S_0, \psi_0)}]$ となっていることに注意しょう. $c \in L$ に対応して. D' 上のファイバー上には. 偏極があるが. S_0 においては. $\psi_0^{-1}(c) = C_0 \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ は単に. $H^{1,1}$ との元つまり. 代数的コサイクルというに過ぎず一般には. このコサイクルは. quasi-ample にならない. そこで. 我々は. しるし付け ψ を. 動かして対応するコサイクルが quasi-ample になるようにするのである. そのために. K3曲面上の代数的サイクルに関する次の3つの. 命題が用いられる. 命題 2は難しいが. 1, 3 はそうでもない. 証明は [2], [5] を見られたい. $\langle C_0, C_0 \rangle > 0$ だから. S_0 は射影的であり（小平）, 少なくとも1個 ample なサイクル $a \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ があることに注意しておいて. 次の概念を準備する.

$$\mathcal{C} = \{ c \in H^{1,1}(S_0, \mathbb{R});\ \langle c, c \rangle > 0 \} \text{ の連結成分で } a \text{ を}$$

ふくむもの（もう一方の連結成分は $-\mathcal{C}$）.

$$P^+ = \{ p \in H^{1,1}(S_0, \mathbb{R}) \cap H^2(S_0, \mathbb{Z});\ \langle p, p \rangle = -2,$$

p は effective cycle $\}$ (Riemann-Roch の定理から p 又は. $-p$ が effective であることが分る).

$$V = \{ c \in \mathcal{C};\ \langle p, c \rangle > 0 \text{ for } \forall p \in P^+ \}.$$

$$\overline{V} = \{ c \in \mathcal{C};\ \langle p, c \rangle \geq 0 \text{ for } \forall p \in P^+ \}.$$

$p \in P^+$ に対し、 $s_p : x \to x + \langle p, x \rangle p$ は、

$H_p = \{ h \in H^2(S_0, \mathbb{R}) ; \langle p, h \rangle = 0 \}$ に関する鏡映を定める。

$H^{2,0} \subset H_p$ に注意しておく。

$W = \{ s_p ; p \in P^+ \}$ の生成する群 $\subset O(H^2(S_0, \mathbb{Z}))$.

命題 1. i) $c \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ が ample なコホモロジー類

$$\Longleftrightarrow \quad c \in V \cap H^2(S_0, \mathbb{Z}).$$

ii) $c \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ が quasi-ample なコホモロジー類

$$\Longleftrightarrow \quad c \in \overline{V} \cap H^2(S_0, \mathbb{Z}).$$

命題 2. W の作用は C を保ち, C 内で離散的である.

命題 3 ([8] §6 定理 1). $\overline{V}$ は W の C 上の作用に関する基本領域であり、 V は $\overline{V}$ の内点である.

定理 1′の証明を完了させよう。 命題 3 により、 W の元 σ があって、 $\sigma(C_0) \in \overline{V}$ となる。 命題 1 i) から $\sigma(C_0)$ は quasi-ample であり、さらに 条件 B) をみたせば ii) から ample である。 σ は $H^{2,0}$ を固定していることを思い出せば $(S_0, \psi_0 \circ \sigma^{-1})$ が求める条件をみたしていることが分る.

追記．　この原稿をまとめたのち，Looijenga 氏からの手紙で，次の事実が明らかになった．

1.　§0　C)　定理 3′ の証明に本質的欠陥が見出された．従って，これに基いた 主定理 II の証明は成立しない．ただし，定理 3′ を用いる以前の議論により，主定理 I を，次のように強めることができる．

主定理 1′．　$\mathcal{D}$ の任意の点に対し，それを周期とするしるし付き kähler K3 曲面が存在する．

この定理は，次の 2 に述べる形に最も強めることができる．

2.　§3，B) の注意に述べた問題は，肯定的に答えられる．それは，特殊 K3 曲面（rank $H^{1,1}(S, \mathbb{R}) \cap H^2(S, \mathbb{Z}) = 20$（最大）であるK3曲面）では，（§4 の記号で）$V$ が $V \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ で生成され，従って，注意の最後にのべたことから，予想が正しいことに注意すれば，この特殊 K3曲面 の周期が，$\mathcal{D}$ 内で稠密であること（[8] §6，定理 2，ただし少し強める要あり）を用いて，主定理 I の証明と，本質的に同じやり方で出る。

これは，Looijenga が注意した。

References

[1] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J., Singer, I. M. : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London, 362 (1978), 425-461.

[2] Burns, D., Rapoport, H. : On the Torelli problems for kählerian K-3 surfaces, Ann. Sc. E.N.S., 8 (1975), 235-274.

[3] Kodaira, K., Nirenberg, L., Spencer, D. C. : On the existence of deformations of complex analytic structures, Ann. of Math., 68 (1958), 450-459.

[4] Kulikov, V. S. : Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, (English translation), 11 (1977), 957-989.

[5] Looijenga, E, Peters, Ch. : Torelli theorems for Kähler K3 surfaces, preprint.

[6] Miyaoka, Y. : Kähler metrics on elliptic surfaces, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 533-536.

[7] Persson, U., Pinkham, H. : Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, or K3 : the north face, preprint.

[8] Pjateckii-Šapiro, I. I.; Šafarevič, I. R. : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR Izvestija (English translation), 5 (1971), 547-588.

[9] Rossi, H. : Attaching analytic spaces to an analytic space along a pesudoconcave boundary, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964, Springer, 1965, 242-256.

[10] Yau, S. T. : Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 74 (1977), 1798-1799.