代数幾何学シンポジウム記録
1980年度 pp.91-107

小平次元の加法性
—— base が curve の場合 ——

川又 雄二郎

代数多様体の分類理論では小平次元の理論が重要な役割を果すが、次の飯高による予想は意外と基本的で深いことが知られている：

予想「$f : X \to Y$ を代数的 fiber 空間とする。（即ち、X, Y は non-singular, projective 代数多様体，f は surjective で fiber が連結）。このとき

$$\kappa(X) \geq \kappa(Y) + \kappa(X/Y)。$$

ここに $\kappa(X/Y)$ は f の general fiber X_y の小平次元で $\kappa(X_y)$ とも書く。」

ここで基礎体は普通、複素数体 $\mathbb{C}$ に限定する。（本論でもそうする。）さて、本論の主要結果は：

<u>定理</u>（加法性）『上の予想は $\dim Y = 1$ ならば正しい。』

Viehweg は最近の論文で $\dim Y = 1$ の上に更に $\dim X = 3$ を仮定して上の定理を証明した。そこでは Mumford – Gieseker による一般型曲面の moduli 理論を使っている。ここでの証明は基本的には Hodge 理論しか使わない。上の定理の証明には次の定理がキーポイントである：

<u>定理</u>（半正値性）『$\dim Y = 1$ と仮定する。m を任意の自然数とするとき

$$F_m \underset{\text{def}}{=} f_* K_{X/Y}^{\otimes m}$$

は Y 上の semi-positive な局所自由層である。ここに $K_{X/Y} = K_X \otimes f^* K_Y^{\otimes -1}$。』

一般に、代数多様体 V 上の vector bundle G は次のときに <u>semi-positive</u> と言われる：任意の non-singular, projective 代数曲線 C，任意

の morphism $\varphi : C \to V$ 及び任意の $\varphi^* G$ の quotient invertible sheaf Q に対して $\deg_C Q \geqq 0$ が成立する。これは言い換えると，$\mathbb{P}(G)$ 上の tautological line bundle L が numerically effective であるということと同値である。この定理は3年前に藤田隆夫が $m=1$ の場合に証明し一般の場合を予想した。

II. 半正値性定理の証明はここでは述べないがその概略は次のようなものである。一般に代数多様体 V 上に m 重 canonical form φ（つまり $K_V^{\otimes m}$ の global section）が与えられたとき，$\sqrt[m]{\varphi}$ の "Riemann surface" として V の m 重被覆 V^φ があって $\sqrt[m]{\varphi}$ が $K_{\hat{V}^\varphi}$ の global section となる。ここに $\hat{V}^\varphi$ は V^φ の non-singular モデル。これを一斉にやると $\mathbb{P}(F_m^*)$ 上に X_y^φ を fiber とする多様体 $\hat{X}$ が作れる。$\hat{X}$ を適当に stratify しておいてから Hodge 理論を適用する。但しここでもちろん $\mathbb{P}(F_m) \neq \mathbb{P}(F_m^*)$ であるから話は簡単ではない。しかし

基本的には Lebesgue 積分の計算に帰着される。筆者が一番苦労したのは実はこの部分であるがあまり代数幾何学的でないので省略する.

さて、上の半正値性を仮定すると加法性定理は Y が elliptic curve の場合をのぞき簡単に出てくる。実際この場合 $F_m \otimes K_Y^{\otimes m}$ が ample vector bundle になってしまう。従って $\kappa(X) > 0$ であり，ここから加法性を出すのはよく知られた routine である。しかし，Y が elliptic curve の場合には F_m 自体の global section を作らなければならず難しくなる。ここで次の予想をあげておこう：

予想『Y が elliptic curve でない場合にも F_m には十分たくさん section があり，

$$\kappa(X, K_{X/Y}) \underset{def}{=} \kappa(Y, F_m) \geqslant \kappa(X/Y)$$

が成立する。』

この予想は Viehweg 予想とも呼ばれていて，

もしもこの予想が解決されれば応用は広い。

2. 加法性定理の証明に入る前にそこで使われる結果を復習しておく。Yは以後 elliptic curve とする。Atiyah による次の古典的結果がある：

(0) Y上の vector bundle V は indecomposable なものの直和 $V \cong \bigoplus V_i$ になる。

(1) (Hartshorne) V が indecomposable vector bundle で $\deg V > 0$ ならば V は ample。

(2) 各自然数 r に対応して indecomposable vector bundle A_r が存在して次の条件をみたす： (a) $\operatorname{rank} A_r = r$

(b) $\deg A_r = 0$

(c) $\dim H^0(Y, A_r) = 1$

(3) V が indecomposable vector bundle で $\operatorname{rank} V = r$, $\deg V = 0$ であるならば, $V \cong A_r \otimes L$, $L \in \operatorname{Pic}^0 Y$ となる。このとき $H^0(Y, V) \neq 0 \Longleftrightarrow L \neq 0$.

(4) $0 \longrightarrow A_s \longrightarrow A_r \longrightarrow A_{r-s} \longrightarrow 0$ (完全)

(5)　$A_r^* \cong A_r$　(ここで $*$ は双対)。

(6)　$A_r \otimes A_s \cong A_{r-s+1} \oplus A_{r-s+3} \oplus \cdots \oplus A_{r+s+1}$
(ここに $r \geqq s$)。

(7)　$A_r = \mathrm{Sym}^{r-1} A_2$。

以下では特に性質(6)が重要である。こういった定理が $g(Y) \geqq 2$ の場合にはないのが問題である。

3. 一般の代数的 *fiber* 空間 $f: X \to Y$ で次のようなものを考える： $Y_0 \subset Y$ は open dense, $D \underset{\mathrm{def}}{=} Y \setminus Y_0$ は normal crossing, f は Y_0 上 smooth。 $n = \dim X/Y \underset{\mathrm{def}}{=} \dim X - \dim Y$ とする。
$H_{\mathbb{C}} = (R^n f_* \mathbb{C}_{f^{-1}(Y_0)})_{\mathrm{prim}}$, $H_0 = H_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}_{Y_0}$,
$F = f_* K_{X/Y}$, $F_0 = F|_{Y_0}$ とする。F_0 は H_0 の局所自由な *subbundle* である。H_0 の Y 上への標準的延長 H を次のように作る： U を Y の開集合でその上の局所座標 $z_1, \cdots, z_d$ を使って
$U \cap D = \{z_1 \cdot \cdots \cdot z_e = 0\}$ と書けるものとする。
γ_i $(i = 1, \cdots, e)$ を z_i-軸のまわりを一周す

るときの H_0 の local monodromy とする。γ_i の固有値は1の巾根であることが知られている。$v_1, \ldots, v_r$ を U 上での H_0 の一次独立な多価 flat section とする。このとき

$$s_j = \exp\left(-\sum_{i=1}^{e} \log \gamma_i \cdot \log z_i / 2\pi\sqrt{-1}\right) \cdot v_j \qquad j = 1, \ldots, r$$

は H_0 の一価の section を与える。ここで $\log \gamma_i$ の branch はその固有値の虚部が $[0, 2\pi)$ に入るようにとる。s_j を base として vector bundle が U 上にできる。これをはり合わせれば Y 上の vector bundle H ができる。これを H_0 の canonical extension という。

補題『$i : Y_0 \hookrightarrow Y$ とする。このとき $F_0 \hookrightarrow H_0$ は $F \simeq i_* F_0 \cap H$ をひきおこす。』

4. 次に Deligne による結果を引用する。

補題『局所系 $H_{\mathbb{Q}}$ への $\pi_1(Y)$ の表現は半単純である。』([3] 4.2.6)

<u>補題</u>「Mを$H_{\mathbb{C}}$の rank d の部分局所系とする。このときある自然数nにより$(\overset{d}{\wedge} M)^{\otimes n}$は自明な局所系となる。」([3] 4.2.8)

<u>5</u>. さて定理の証明に入ろう。$\kappa(X/Y)=0$ならば $\mathrm{rk}\, F_m = 1$, $\kappa(X/Y)=1$ ならば $\mathrm{rk}\, F_m \geqq 2$ となるようなmがあるからそれを1つ固定する。$F_m = \oplus V_i$ を indecomposable 成分への分解とする。あるiについて $\deg V_i > 0$ ならば V_iは ample だから $\kappa(X)>0$ となり証明は終る。V_i は semi-positive だから $\deg V_i \geqq 0$ であることを考えると、$\forall i, \deg V_i = 0$ のときを考えればよいことになる。$V_i = A_{r_i} \otimes L_i$ $r_i = \mathrm{rk}\, V_i$, $L_i \in \mathrm{Pic}^0(Y)$ とする。$L \in \mathrm{Pic}^0 Y$ を $L^{\otimes m} = L_1^{\otimes -1}$ となるようにとると、
$H^0(X, (K_X \otimes f^*L)^{\otimes m})$ には零でない元ψがある。これを使って $K_X \otimes f^*L$ の全空間の中にXのm重被覆X^{ψ}をつくる。$\tilde{X}^{\psi}$をその一つの既約成分の非特異モデルとする。次の図式を得る:

$$\begin{tikzcd} \hat{X}^{\psi} \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "f^{\psi}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^{\psi} \arrow[r, "\rho"'] & Y \end{tikzcd}$$

ここに f^{ψ} は代数的 fiber 空間で ρ は分岐被覆。$\sqrt[m]{\psi}$ は $H^0(\hat{X}^{\psi}, K_{\hat{X}^{\psi}} \otimes f^{\psi *}\rho^* L)$ の零でない元となる。π の分岐は因子 (ψ) の台に含まれているから，十分大きな整数 N をとると

$$Hom\,(K_{\hat{X}^{\psi}}, \pi^*(K_X \otimes (K_X \otimes f^*L)^{\otimes mN}) \neq 0.$$

$F^{\psi} \underset{def}{=} f^{\psi}_* K_{\hat{X}^{\psi}/Y^{\psi}}$ を考える。2つの場合がある：

(a) $F^{\psi} \otimes K_{Y^{\psi}}$ には ample subbundle V がある，

(b) Y^{ψ} は elliptic curve であり $\deg F^{\psi} = 0$。

(a)の場合，$V \otimes \rho^* L^{\otimes(-mN)}$ もまた ample であり，単射 $V \otimes \rho^* L^{\otimes(-mL)} \to f^{\psi}_* \pi^* K_X^{\otimes(mN+1)}$ があるから，$\kappa(X) = \kappa(\hat{X}^{\psi}, \pi^* K_X) > 0$ となり証明は終る。だから(b)の場合が問題である。$Y_0^{\psi} \subset Y^{\psi}$ を open dense にとり f^{ψ} が Y_0^{ψ} 上で smooth とする。$F^{\psi}|_{Y_0^{\psi}}$ には hermitian metric h

が自然に入る。その曲率Θは positive semi-definit である。このとき

$$\deg F^\psi = \frac{i}{2\pi}\int_{Y_0^\psi} tr\,\Theta + \sum_{p\in Y^\psi\setminus Y_0^\psi} \alpha_p$$

と書ける。ここで α_p は F^ψ/Y_0^ψ の canonical extension F^ψ のつり方によってきまる有理数でありそれは F^ψ/Y_0^ψ の local monodromy の固有値できまる。$\deg F^\psi = 0$ ということから、$\Theta = 0$ でかつ F^ψ/Y_0^ψ の local monodromy が unipotent であることが出る。section ${}^m\!\sqrt{\psi}$ は準同型 $p^*L^{\otimes -1} \longrightarrow F^\psi$ を与えるが、これは Atiyah によれば F^ψ の subbundle M への同型となる。h は M の hermitian metric h_M を誘導する。$\Theta = 0$ だからその曲率 Θ_M は negative semi-definit である。ところが $\deg M = 0$ であることから $\forall p, \alpha_p = 0$ を考慮すると $\Theta_M = 0$ が出る。即ち $M|_{Y_0^\psi}$ もまた局所系となる。だからある自然数 k' によって $M|_{Y_0^\psi}^{\otimes k'}$ が自明な局所系となる。local monodromy が unipotent であったことから、$M^{\otimes k'}$ が $M/Y_0^{\psi\,\otimes k'}$ の canonical extensionと一致することがわかる。このことより $M^{\otimes k'}=0$ が出た。Y上にもどると，ヨた $L_1^{\otimes k}=0$ が出る。

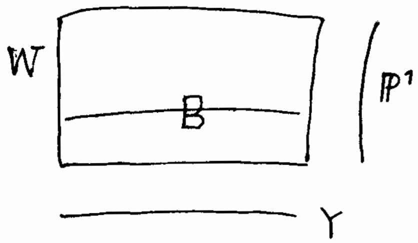
$k: Y\to Y$ を倍数写像とし $X_k \underset{def}{=} X\times_Y^{(k)} Y$ とする。$X_k\longrightarrow X$ は etale だから $\kappa(X_k)=\kappa(X)$。従って X を X_k で置き換えてよく，このとき $L_1=0$。従って結局 $F_m=\oplus A_{r_i}$ としてよいことになった。特に $\kappa(X)\geqq 0$ が出た。この場合よく知られた reduction により $P_g(X)\neq 0$ としてよい。また，F_m が indecomposable でなければ $\kappa(X)>0$ が出るから $F_m=A_{r_m}$ $r_m=\mathrm{rk}\,F_m$ としてよくなる。更に $r_1\geqq 2$ の場合は Deligne の結果から F_1 が line bundle の直和となり矛盾。従って $r_1=1$ としてよい。

6. 以上の議論により次の場合が残った：
$\kappa(X)=0,\ F_m=A_{r_m},\ r_1=1,\ \kappa(X/Y)>0$。
十分大きな m_0 をとり Y の general point y に対して $F_{m_0,y}$ が X_y の Iitaka fibering $\Phi_y: X_y\longrightarrow W_y$ を与えるようにしておく。積写像 $p_k: \mathrm{Sym}^k F_{m_0}$

$\longrightarrow F_{m_0 k}$ により $W = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{Im}\, p_k)$ とすると W_y はその general fiber になる。$\mathrm{Im}\, p_k$ は $F_{m_0 k}$ の degree 0 の subbundle である。Atiyah の結果から $\mathrm{Sym}^k F_{m_0} = \oplus A_{d_i}$ を indecomposable 成分への分解とすると $d_i \leq k(r_{m_0}-1)+1$ $(\forall i)$ が成立つ。従って $\mathrm{rank}(\mathrm{Im}\, p_k) \leq k(r_{m_0}-1)+1$ となる。従って $\dim W_y = 1$ でありしかも Riemann-Roch より $W_y \cong \mathbb{P}^1$ が出る。結局 $W \cong \mathbb{P}(A_2)$ となる。

次の図式を得た：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ Y & W = \mathbb{P}(A_2) \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$



W の tautological line bundle L は唯一つの section をもつ：$L = \mathcal{O}_W(B)$, $B^{(2)} = 0$。$H^0(X, K_X)$ の零でない元 ω をとると，ある m_1 に対して $m_1(\omega) \geq \Phi^* B$ であり $\mathrm{Hom}(\Phi^* L, K_X^{\otimes m_1}) \neq 0$ を得る。一方 $K_W \cong L^{\otimes -2}$ である。

$W_0 \subset W$ を open dense にとり Φ は W_0 上で smooth

となるようにする。Φ の general fiber を X_w とすると $\kappa(X_w)=0$, $p_g(X_w)\neq 0$ より $p_g(X)=1$ となる。そこで $\Phi_* K_{X/W}|W_0 \subset R^{n-1}\Phi_*\mathbb{C}_{\Phi^{-1}(W_0)}$ より period map $g: W_0 \longrightarrow D/\Gamma$ が作れる。次の場合がある：$\dim \operatorname{Im} g = 2, 1$ or 0。

特異点解消 $\nu: W' \longrightarrow W$ により $W_0' = \nu^{-1}(W_0)$ としたとき $E' \underset{def}{=} W' \setminus W_0'$ が正規交叉因子になるようにする。Φ は morphism $\Phi': X \longrightarrow W'$ を誘導するとしてよい。[7] Corollary 18 によると次の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\widetilde{\Phi}"'] & X \times_W \widetilde{W} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Phi'"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\
& \widetilde{W} \arrow[r, "p"'] & W' \arrow[r, "\nu"'] & W
\end{tikzcd}$$

ここに $\widetilde{X}, \widetilde{W}$ は non-singular projective 代数多様体, μ は特異点解消, p は finite surjective。しかも次の条件が成立する：

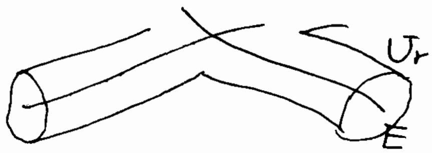
(1) $\widetilde{W}_0 = p^{-1}(W_0')$ とすると $\widetilde{E} \underset{def}{=} \widetilde{W} \setminus \widetilde{W}_0$ は正規交叉因子。

(2) $R^{n-1}\widetilde{\Phi}_*\mathbb{C}_{\widetilde{\Phi}^{-1}(\widetilde{W}_0)}$ の $\widetilde{E}$ のまわりをまわる

local monodromies は unipotent.

このとき [7] Theorem 5 によると $\widetilde{F} \underset{\text{def}}{=} \widetilde{\Phi}_* K_{\widetilde{X}/\widetilde{W}}$ は semi-positive な locally free sheaf (実は line bundle) になる。

<u>case (i)</u> $\dim \operatorname{Im} g = 2$ とする。$\widetilde{F}$ に対応する $\widetilde{W}$ の Cartier divisor をまた $\widetilde{F}$ とかく。$\widetilde{F}$ は numerically effective であった。self intersection $\widetilde{F}^{(2)}$ を計算しよう。$\widetilde{F}|\widetilde{W}_0$ には hermitian metric h が入っている。その曲率を Θ とする。$\{U_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ を $\widetilde{E}$ の管状近傍の列で $\widetilde{E}$ に収束するものとする。



C^∞ な $\widetilde{F}$ の hermitian metric h_r で $h = h_r$ on $\widetilde{W}\setminus U_r$ となるものをとる。Θ_r をその曲率とする。このとき

$$\widetilde{F}^{(2)} = c_1(\widetilde{F})^2 = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^2 \int_{\widetilde{W}} \Theta_r \wedge \Theta_r$$

$$= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^2 \left(\int_{\widetilde{W}\setminus U_r} \Theta \wedge \Theta + \int_{\partial U_r} \partial \log h_r \wedge \overline{\partial}\partial \log h_r \right).$$

$\widetilde{E} = \sum E_i$ を既約分解とすると、limit をとって

$$\tilde{F}^{(2)} = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^2 \int_{\widetilde{W}_0} \Theta \wedge \Theta + \sum_i \alpha_i (\tilde{F} \cdot E_i),$$

ここに α_i は E_i の直交方向の monodromy に対応する local exponent。 Θ は open なところで真に正であるから結局 $\tilde{F}^{(2)} > 0$ となる。

以上より $\kappa(\widehat{W}, \tilde{F}) = 2 > 0$。従って $\kappa(\tilde{X}, K_{\tilde{X}/\widetilde{W}}) > 0$。$\mu$ は birational morphism だから $Hom(\mu_* K_{\tilde{X}}, K_{X \times_W \widetilde{W}}) \neq 0$。$\rho$ は flat だから $\sigma^* K_{X/W'} = K_{X \times_W \widetilde{W}/\widetilde{W}}$。従って $\kappa(X, K_{X/W'}) > 0$。一方 $Hom(\nu^* K_W, K_{W'}) \neq 0$ でまた $Hom(\Phi^* K_W^{\otimes -1}, K_X^{\otimes 2m_1}) \neq 0$ であったから結局 $\kappa(X) > 0$ となる。

<u>case (ii)</u> $\dim Im\, g = 1$ とする。$Z_0 = Im\, g$ とする。Z_0 の非特異な分岐被覆 $\tilde{Z}_0$ をうまくとると D 上の tautological subbundle が $\tilde{Z}_0$ 上の line bundle G_0 を誘導するようにできる。G_0 は $\tilde{Z}_0$ の non-singular completion $\tilde{Z}$ 上に canonical extension G をもつ。$\deg G > 0$ だから G は ample である。g は morphism $\tilde{g}: \widetilde{W} \to \tilde{Z}$ を誘導するとしてよい。G の境界 $\tilde{Z} \setminus \tilde{Z}_0$ での local exponents

が 0 であるように $\widetilde{Z}$ をとっておくと単射 $\widetilde{g}^*G \longrightarrow \widetilde{F}$ を得る。こうして $\kappa(\widehat{W}, \widetilde{F}) \geq \kappa(\widetilde{Z}, G) > 0$ となり $\kappa(X) > 0$ となる。

<u>case (iii)</u> $\dim \operatorname{Im} g = 0$ とする。$F' = \Phi'_* K_{X/W'}$ とし $F'_0 = F'|_{W'_0}$ とする。F'_0 はこの場合 local system である。$E' = \sum E'_i$ を既約分解とする。F' は F'_0 の canonical extension と一致するから、有理数 α_i $(0 \leq \alpha_i < 1)$ が存在して、m_2 を α_i の分母の公倍数とすると、

$$F'^{\otimes m_2} = \mathcal{O}_{W'}(\sum m_2 \alpha_i E'_i)$$

となる。$y \in Y$ を general point とすると、$W_y = \pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^1$ だから $p_g(X_y) \neq 0$ を考慮すると $\sum \alpha_i (E'_i \cdot W_y) \geq 2$ が出る。$\forall \alpha_i < 1$ だったからある一つの E'_1 に対して、(イ) $E'_1 \cap W_y \neq \phi$, (ロ) $E_1 \underset{\text{def}}{=} \nu(E'_1) \neq B$ (ハ) $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{W'}(E'_1), F'^{\otimes m_2}) \neq 0$ が成立する。$E_1 \neq B$ だから $E_1^{(2)} > 0$ である。従って $\kappa(W, E_1) > 0$。一方、十分大なる整数 m_3 に対して $\mathcal{H}om(\nu^* E_1, E'_1 \otimes K_{W'/W}^{\otimes m_3}) \neq 0$ であるから $\kappa(W', F' \otimes K_{W'/W}) > 0$ となる。結局 $\kappa(X) > 0$ となり全ての証明が終る。

文献表

[1] M. F. Atiyah : Vector bundle over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957)

[2] P. Deligne : Equation différentielles à points .... Springer Lecture Note 163 (1970)

[3] —— : Théorie de Hodge, IHES 40 (1971)

[4] T. Fujita : On Kähler fiber spaces over curves, J. Soc. Math. Japan 30 (1978),

[5] P. Griffiths : Periods of integrals on algebraic manifolds, III, IHES 38 (1970)

[6] R. Hartshorne : Ample vector bundles on curves, Nagoya Math. J. 43 (1971)

[7] Y. Kawamata : Characterization of abelian varieties, to appear

[8] E. Viehweg : Klassifikationstheorie algebraischer Varietäten der Dimension drei, to appear

[0] Y. Kawamata : Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves, to appear