代数幾何学シンポジウム記録
1980年度 pp.40-56

1

RATIONAL MAPS DEFINED BY MULTIPLES OF K+D ON ALGEBRAIC SURFACES

埼玉大理 酒井文雄

、Xを代数閉体k, $\mathrm{char}(k)=0$, 上の非特異射影代数曲面とする。KをXの標準因子、DをX上の正因子(effective divisor)とする。Φ_mを線型系$|m(K+D)|$によって定義される有理写像とする($m>0$)。$\phi_0,\ldots,\phi_N$を$H^0(X,\mathcal{O}(m(K+D)))$の基底とすれば、$\Phi_m$は

$$X \ni z \longrightarrow (\phi_0(z),\ldots,\phi_N(z)) \in \mathbb{P}^N$$

で与えられる。十分大きなmについて、Φ_mが双有理になるとき、組(X,D)は一般型であるという。これは、$\kappa(K+D, X)=2$と同値。

次の問を考えたい。

問題 曲面と正因子の組(X,D)は上の意味で一般型とする。このとき、(X,D)に依らない一定の正整数m_0が存在して、$m \geq m_0$ならば、Φ_mは双有理写像となるか? もし存在するならば最小のm_0を求めよ。

一般型曲面の結果（[K],[B]）から、X自身が一般型曲面であれば、任意の正因子Dについて、$m \geqq 5$ならばΦ_mは双有理写像である。

$D = \sum n_i D_i$を既約分解とすると、DはX上の1次元部分スキーム（曲線）と考えられる。D上の可逆層$\mathcal{L}$が<u>numerically</u> <u>effective</u>とは

$$\deg_{D_i}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_i}) \geqq 0$$

がすべての成分D_iについて成り立つ事とする。Dの双対化層ω_Dは$\mathcal{O}(K+D) \otimes \mathcal{O}_D$で与えられる。

以下、部分的解答である次の定理を中心にして、関連する所を述べる。

<u>定理</u>　(X, D)を曲面と正因子の組とする。正因子D', $0 \leqq D' \leqq D$があって

(i) (X, D')は一般型

(ii) $\omega_{D'}$はnumerically effective

とする。このとき、(X, D)に対するΦ_mは$m \geqq 5$について双有理写像。

定理の仮定のもとで、Φ_4は双有理にならな

い例がある。次の例は ω_D が numerically effective でない場合、Φ_5 は必ずしも双有理にならない事を示している。

例　X を楕円 K3 曲面とする。$p: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を楕円構造とし、$D = b + f$ とおく。但し、b は切断、f はファイバーとする。この時、$b^2 = -2$、$bf = 1$, $f^2 = 0$。従って、$Db = -1$、よって $\omega_D = \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}_D$ は numerically effective ではない。しかし、$\kappa(D, X) = 2$。$|5D| = |5f + 2b| + 3b$ が成り立つ。$5f + 2b$ を p のファイバーに制限すると位数２の因子。このことから、Φ_5 が双有理にならない事が従う。この例では Φ_6 は双有理である事を注意しておく。

定理の系　S を normal Gorenstein 曲面とする。$\kappa(\omega_S, S) = 2$ の意味で S は一般型とする。この時、線型系 $|\omega_S^{\otimes m}|$ によって定義される写像 Φ_m は $m \geq 5$ に対しては双有理。ここで ω_S は S の双対化層。

証明. $f: X \to S$ を minimal resolution とする。この時、正因子 D があって、$f^*\omega_S = \mathcal{O}(K+D)$。D の support は S の特異点の逆像にあるから、ω_S が可逆層（Gorenstein 曲面の定義）に注意すると、$\omega_D \cong \mathcal{O}_D$ が成り立つ。従って、組 (X, D) に定理を適用すればよい。

§1で正因子の一般的性質を述べ、§2で定理の証明を概説する。特にDが正規交差する被約曲線Cの場合には、$\kappa(K+C, X)$ は $S = X - C$ の対数的小平次元 $\bar{\kappa}(S)$ に他ならない。この場合には ω_C が numerically effective ということは C が準安定（semi-stable）曲線という事と同値である。§3で、$\bar{\kappa}(S)$ による準安定曲線の分類を述べる。§4では、古典的な問題設定、すなわちDが超平面切断になっている場合に言及する。詳細はどこかに発表の予定である。§3については、[Sa 2] を参照。

§1 Effective divisors on a surface

Xを曲面とする。X上の因子Dは

$$D=\sum n_i D_i \qquad \text{(有限和)}$$

と素因子D_iの和に書かれる。すべてのiについて$n_i \geqq 0$のとき、Dを<u>正因子</u>(又は曲線)という。この時、$D_{red}=\sum D_i$と書く。

<u>定義</u>　D上の可逆層$\mathcal{L}$について

$$\deg_D(\mathcal{L})=\sum n_i \deg_{D_i}(\mathcal{L}\otimes \mathcal{O}_{D_i})$$

で<u>次数</u>を定義する。すべてのiについて$\deg_{D_i}(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{D_i})\geqq 0$の時、$\mathcal{L}$は<u>numerically effective</u>であった。

(1.1) <u>補題</u>　曲線$D=\sum n_i D_i$について

$$\deg_{D_i}(\omega_D)=(K+\sum n_j D_j)D_i$$
$$=2p_a(D_i)-2+\sum_{j\neq i} n_j D_j D_i+(n_i-1)D_i^2$$

(1.2) <u>系</u>　$n_i=1$または$D_i^2\geqq 0$ならば、$D_i\cong \mathbb{P}^1$、$D_i(D-D_i)\leqq 1$のときを除いて$\deg_{D_i}(\omega_D\otimes\mathcal{O}_{D_i})\geqq 0$。

これらは$\omega_D\cong\mathcal{O}(K+D)\otimes\mathcal{O}_D$から従う。

<u>定義</u>　曲線 D は D_{red} が連結のとき<u>連結</u>という。

<u>定義</u>　曲線 $D=\sum n_i D_i$ の<u>組成列</u>とは昇鎖

$$D^{(1)}\subset D^{(2)}\subset\cdots\subset D^{(n)}=D$$

で $D^{(1)}=D_{i_1}$、$D^{(j)}=D^{(j-1)}+D_{i_j}$ となっているものをいう。ここで $n=\sum n_i$。常に

$$D^{(j-1)}\cdot D_{i_j}\geqq 1 \qquad j=2,\ldots,n$$

となっている組成列を<u>連結な</u>組成列という。

(1. 3) <u>補題</u>　曲線 D が連結な組成列をもてば、

$$H^0(D,\mathcal{O}_D)\cong k\ 。$$

<u>証明</u>　$D=D'+D''$ と分解すれば完全列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{D'}(-D'')\longrightarrow\mathcal{O}_D\longrightarrow\mathcal{O}_{D''}\longrightarrow 0$$

が成り立つ。組成列にくり返し適用すればよい。

<u>定義</u>　すべての分解 $D=D'+D''$, $D'>0$, $D''>0$ について、$D'D''\geqq 1$ となるとき、曲線 D は<u>数値的に連結</u>であるという。

(1. 4) <u>補題</u>　曲線 D が数値的に連結ならば、D は連結な組成列を持つ。

<u>証明</u>　$D^{(1)} = D_{i_1}$ は任意にとり、以下帰納的に定める。$D = D^{(j-1)} + Z^{(j-1)}$, $1 < j < n$ とすると仮定から $D^{(j-1)} \cdot Z^{(j-1)} \geq 1$。従って、$Z^{(j-1)}$ の成分 D_{i_j} があって $D^{(j-1)} \cdot D_{i_j} \geq 1$。そこで、$D^{(j)} = D^{(j-1)} + D_{i_j}$ とおけばよい。

<u>例</u>　D_1, D_2 を既約曲線で交点数行列が

$$(D_i D_j) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。このとき、$D = 2D_1 + 2D_2$ は連結な組成列 $D_1 \subset D_1 + D_2 \subset 2D_1 + D_2 \subset D$ を持つ。しかし、$(D_1 + D_2)^2 = 0$ である。

<u>例</u> 特異点解消の基本サイクルは連結な組成列をもつ。(Laufer. On rational singularities. Amer. J. Math. 94 (1972))

<u>定義</u>　X 上の因子 D が <u>numerically effective</u> とは $DC \geq 0$ が X 上のすべての曲線について成り立つ事とする。$h^0(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(D))$ と書く。

(1.5) <u>補題</u>　D を numerically effective な因子とすると $\kappa(D, X) = 2$ と $D^2 > 0$ は同値。

証明　$\kappa(D, X)=2$ とする。$h^0(mD)\geqq 2$ とする。F を固定成分として、$|mD|=|L|+F$ と書く。$D^2=0$ ならば、$(mD)^2=L^2+LF+mDF\geqq 0$ から $L^2=0$ でなければならない。従って、像 $\Phi_{mD}(X)=\Phi_L(X)$ は曲面にはならない。これは $\kappa(D, X)=2$ に反する。逆は R-R より従う。

numerically effective な因子の性質をまとめておく。証明については [B], [Ra], [F] 参照。

(1.6) 補題　D を numerically effective な因子で $D^2>0$ とする。このとき

(i)　集合 $\mathcal{E}(D)=\{$既約曲線 $E \mid DE=0\}$ は有限、

(ii)　$m>0$ について、$H^1(X, \mathcal{O}(-mD))=0$、

(iii)　$h^0(mD)>1+mD^2$ ならば $\dim \Phi_{mD}(X)=2$、

(iv)　$\Delta(X, D)=2+D^2-h^0(D)\geqq 0$。

次の消滅定理が §2 の主道具となる。

(1.7) 定理 ([Ra], [B])　D は X 上の正因子で、$\kappa(D, X)=2$、$H^0(D, \mathcal{O}_D)\cong k$ とすると

$$H^1(X, \mathcal{O}(-D))=0 \text{。}$$

§2 Proof of the main theorem

<u>主定理の証明</u>　初めから (X, D) 一般型、ω_D numerically effective を仮定してよい。次に $K+D$ が numerically effective としてよい事をみよう。

もし $K+D$ が numerically effective でないとすれば既約曲線 E があって、$(K+D)E<0$。ω_D が numerically effective だから、$E \not\subset D_{red}$。このことから、

$$E^2=-1、KE=-1。$$

従って、E は第1種例外曲線で $E \cap D_{red} = \emptyset$。
そこで、$\pi : X \longrightarrow X'$ を E の contraction とする。
$D' = \pi(D)$ とおけば、$K+D = \pi^*(K'+D')+E$。
よって、$H^0(X', \mathcal{O}(m(K'+D'))) \cong H^0(X, \mathcal{O}(m(K+D)))$。
故に、Φ_m は Φ'_m を経由する。Φ'_m が双有理なら

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi_m"] & \\ X' \arrow[r, "\Phi'_m"] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

Φ_m も自動的に双有理となる。D と D' は同型だから、$\omega_{D'}$ も numerically effective。このようにして有限回の contraction をくり返す事によって、元々 $K+D$ は numerically effective として考えてよい。

このとき補題(1.5)により$(K+D)^2>0$である。さて写像Φ_mの双有理性をいうには線型系$|mK+(m-1)D|$によって定義された写像φ_mが双有理である事をいえば充分である。このためには、φ_mがXの殆んどすべての点を分離する事を示せばよい。x, yをX上の相異なる2点とする。$\pi: \tilde{X} \to X$をx, yにおけるblowing upとし、$E_x = \pi^{-1}(x)$, $E_y = \pi^{-1}(y)$とおく。双対性から

$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(\pi^*(mK+(m-1)D)-E_x-E_y)) \cong H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(-G_m))$

ここで、$G_m = \pi^*((m-1)(K+D))-2E_x-2E_y$とおいた。もし$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(-G_m))=0$ならば

$$H^0(X, \mathcal{O}(mK+(m-1)D)) \longrightarrow k_x \oplus k_y$$

はonto、従って$\varphi_m(x) \neq \varphi_m(y)$。補題(1.6)から$\mathcal{E} = \mathcal{E}(K+D)$は有限個の曲線である。次を示す。

(2.1) $m \geq 5$のとき、$x, y \in X - \mathcal{E}$ならば

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}(-G_m))=0$$

これはφ_m、そしてΦ_mの双有理性を示す。定理(1.7)と補題(1.4)から次の3条件を満たしている事をいえば充分である。

(i) $G_m^2>0$ (ii) G_mは数値的に連結 (iii) $\dim|G_m| \geq 0$

$G_m^2=(m-1)^2(K+D)^2-8$ だから、(i) は $m\geq 4$ で成立する。(ii) は $m\geq 4$（例外 $m=4$, $(K+D)^2=1$）で成立（[Sa2]参照）。以下 (iii) を見よう。$h^0((m-1)(K+D))\geq 7$ を示せば充分。実際そのとき正因子 $Z\in|(m-1)(K+D)|$ で x, y に特異点をもつものがある。$\pi^*Z=\bar{Z}+2E_x+2E_y$ で $\bar{Z}$ は正因子。よって $\bar{Z}\in|G_m|$。さて補題 (1.4) から $m>0$ で $H^1(X,\mathcal{O}(-m(K+D)))=0$。$m\geq 2$ で

$$0\to H^0(X,\mathcal{O}(mK+(m-1)D))\to H^0(X,\mathcal{O}(m(K+D)))\to H^0(D,\omega_D^{\otimes m})\to 0$$

は完全系列。R-R と合わせて、$m\geq 2$ の範囲で

(2.2)

$$h^0(m(K+D))=\frac{m(m-1)}{2}(K+D)^2+\frac{m-1}{2}(K+D)D+h^1(\omega_D^{\otimes m})+\chi(-D)$$

ここで $\chi(-D)=\frac{1}{2}(K+D)D+\chi(\mathcal{O}_X)\geq 0$。$\chi(\mathcal{O}_X)<0$ 時に確かめれば充分。このとき X は ruled 曲面 $p:X\to B$。D は B の上に写される成分を持つ。Hurwitz の公式から、$(K+D)D\geq 2(g(B)-1)$。従って、$\chi(-D)\geq 0$。次に $(K+D)D=0$ ならば $h^1(\omega_D^{\otimes m})\geq 1$ に注意する。実際公式 $\chi(\omega_D^{\otimes m})=\frac{2m-1}{2}(K+D)D$ から $h^0(\omega_D^{\otimes m})=h^1(\omega_D^{\otimes m})$。$h^0(\omega_D)=h^1(\omega_D)=h^0(\mathcal{O}_D)\geq 1$。故に、$h^0(\omega_D^{\otimes m})\geq 1$ を得る。以上を総合すると $m\geq 4$ で (iii) は成立（例外 $m=4$, $(K+D)^2=1$）。

これで主定理の証明は終る。使用した議論は次の多少精密な結果も示している。

(2.3) 定理　(X, D)を曲面と正因子の組で一般型、又$K+D$は numerically effective とする。このときΦ_mは$m \geq 4$ (例外 $m=4$, $(K+D)^2=1$) で双有理。

例 (Φ_4が双有理にならない例) $Q \subset \mathbb{P}^3$を2次の cone とする。Zを5次曲面とし、$B = Z \cap Q$で分岐する2次被覆をSとし、$\pi: X \to S$を minimal resolution とする。特にBが既約曲線ならば、Sは normal Gorenstein 曲面。$\pi^* \omega_S = \mathcal{O}(K+D)$でDを定めれば$\omega_D \simeq \mathcal{O}_D$。このとき、$\Phi_m$, $m \leq 4$は2:1写像で双有理にはならない。$(K+D)^2 = 1$、$h^0(K+D) = 2$。

定理(2.3)において、$K=0$ならば、$\Phi_m = \varphi_m$だから、Φ_mは$m \geq 3$で双有理写像。K3曲面については numerically effective を落としても成り立つ。

(2.4) 定理 ([M], [SD])　XをK3曲面 ($K=0$, $q=0$)。Dを正因子で$D^2 > 0$。Φ_mは$m \geq 3$で双有理。

§3 Semi-stable curves

Dが被約かつ正規直交曲線Cの場合を考察する。$S = X - C$とおく。$\mathcal{O}(K+C) \cong \Omega^2(\log C)$である。記号$\overline{P}_m(S) = h^0(m(K+C))$、$\overline{P}_g = \overline{P}_1$を用いる。$\overline{\kappa}(S) = \kappa(K+C, X)$は対数的小平次元。

系(1.2)から、ω_Cはnumerically effectiveとCは準安定曲線すなわちCの非特異有理成分は他の成分と2点以上で交わる事と同値である。

定義　第1種例外曲線Eは$EC \leqq 1$のときC-例外曲線と呼ばれる。

§2の冒頭と同様にして、C-例外曲線は無いとして議論して支障ない事がわかる。一種のminimal model(相対)である。今後はこれを仮定する。$\overline{\kappa}$による曲面と準安定曲線の分類を試みた。結果を表にまとめる([Sa2]参照)。

$\overline{\kappa} = -\infty$	(ruled曲面, 切断)
$\overline{\kappa} = 0$	(i) $K+C \sim 0$ ($\mathbb{P}^2$, 3次曲線) (F_e, 2-切断) (楕円ruled曲面, 2つの切断) (ii) $2(K+C) \sim 0$

(楕円ruled曲面, 既約2-切断)

$\bar{\kappa}=1$

(i) (ruled曲面, 2-切断＋ファイバー)

(ii) (楕円曲面, ファイバー達)

この場合にはΦ_mはファイバーを経由する。又ϕ_mは$m\geqq 8$で埋込。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Phi_m"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & \mathbb{P}^N \\ B \arrow[ur, "\phi_m"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{\kappa}=2$

Φ_mは$m\geqq 3$でmorphism(例外 $m=3$, $(K+C)^2\leqq 2$)、又$m\geqq 4$ならmod $\mathcal{E}$で埋込み(例外 $m=4$, $(K+C)^2=1$)、さらに$(K+C)^2\geqq 5$又は$(K+C)^2\geqq 3$かつ$\bar{p}_g\geqq 2$ならばΦ_3も双有理。

不等式($k=\mathbb{C}$とする)

$$\bar{c}_1^2\leqq 3\bar{c}_2$$

が成立する。ここで$\bar{c}_1^2=(K+C)^2$、$\bar{c}_2=S$のオイラー数

<u>注意</u> ファイバー構造 $p: X\to B$について、曲線Dがn-切断とは、$Df=n$が一般のファイバーfについて成り立つ事とした。

§4 Hyperplane sections

この節ではDが超平面切断である場合を考える。$Y \subset \mathbb{P}^N$を曲面（非特異とは限らない）とし、Yを$\mathbb{P}^N$の超平面で切ってYの超平面切断を得る。Yは$\mathbb{P}^N$の超平面には含まれないとする。このとき

$$0 \to H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)) 。$$

$\pi : X \to Y$を minimal resolution とする。Bertini の定理から、一般の元$C \in |\pi^* \mathcal{O}_Y(1)|$は非特異かつ既約。$d = C^2$と置くと、$d = \deg Y$。又

(i) $h^0(C) \geqq N+1$、

(4.1) (ii) $\mathcal{O}(C)$は切断によって生成される、

(iii) Φ_Cは双有理写像。

特に、Cは numerically effective。(1.4)から

(iv) $\Delta(X, C) = 2 + d - h^0(C) \geqq 0$

$h^0(C) = N+1$ならば、Yは$\mathbb{P}^N$で projectively normal。

<u>定義</u>　Cの種数gは(X, C)の<u>切断種数</u>と呼ばれる。

<u>問題</u>　d, gによる(X, C)の分類をせよ。

文献として[C]、[So]、[F] 等を挙げておく。
簡単な場合 $g=0$ を見ておこう。$KC+C^2=-2$ だから $KC<0$。よって $P_m(X)=0$。さらに $q=0$。もし $q>0$ とすれば、アルバネーゼ写像の像 $\alpha(C)$ は一点。これは $C^2>0$ に反する。故に X は有理曲面。従って $h^0(C)\geq C^2+2$、(iv) と合わせて、$h^0(C)=C^2+2$ $(\Delta(X,C)=0)$ を得る。
従って、Y は $\mathbb{P}^{d+1}$ 内の d 次曲面。これはいろいろな所で分類されている。次は Picard の定理。

(4.2) <u>定理</u> (X,C) を超平面切断とし、$g=0$ とする。このとき次のどれかと同型

(i) $(\mathbb{P}^2,$ 直線$)$

(ii) $(\mathbb{P}^2,$ 2次曲線$)$

(iii) $(F_e,\ C\in|b+(e+k)f|)$ $k\geq 0$

ここで、b は $b^2=-e$ なる切断、f はファイバー。

$g\geq 1$ の場合は準安定曲線の特別の場合になる。$d\leq 4$ ならば Y の分類は既知である。
興味ある場合として、C が超楕円曲線のときがある。Φ_1 は双有理にはなれない。[So] 参照。

References

[B] Bombieri,E.:Canonical models of surfaces of general type. Publ.Math.IHES 42, 172-219 (1973)

[C] Castelnuovo,G.:Sulle superficie algebriche le cui sezioni plane sono curve iperellittiche. Rendi.Cir.Math.Palermo 1890

[F] Fujita,T.:On the structure of polarized varieties with Δ genera zero. J.Fac.Sci.Uni.Tokyo 103-115 (1975)

[K] Kodaira,K.:Pluricanonical systems of algebraic surfaces of general type.J.Math.Soc.Japan, 170-195 (1968)

[M] Mayer,A.L.Families of K3 surfaces. Nagoya Math.J.48,1-17(1972)

[N] Nagata,M.:On rational surfaces I.Mem.Coll.Uni.Kyoto 32 (1960)

[P] Persson,U.:On degenerations of algebraic surfaces.Mem.Amer. Math.Soc.189(1977)

[Ra] Ramanujam,C.P.:Remarks on the Kodaira vanishing theorem. J.Indian Math.Soc.36,41-51(1972), 38,121-124(1974)

[Re] Reid,M.:Special linear systems on curves lying on a K3 surface. J.London Math. (2) 13, 454-458 (1976)

[SD] Saint-Donat.:Projective models of K3 surfaces.Amer.J.Math. 96,602-639(1977)

[Sa1] Sakai,F.:Canonical models of complements of stable curves. In Int.Symp.Alg.Geomety Kyoto 1977,pp 643-661 (1978)

[Sa2] _____.:Semi-stable curves on algebraic surfaces and logarithmic pluricanonical maps. To appear

[So] Sommese,A.J.:Hyperplane sections of projective surfaces. Duke Math.J. 46, 377-401(1979)

[V] Van de Ven.:On the 2-connectedness of very ample divisors on a surface. Duke Math.J.46,403-407(1979)