代数幾何学シンポジウム記録
1980年度 pp.35-39

指数正の代数曲面について

都立大・理 宮岡洋一

複素代数曲面の二次元コホモロジー群にはcup積によって定まる自然な双一次型式が入る。その指数 $b_+ - b_- = \frac{1}{3}(c_1^2 - c_2)$ を曲面の指数と呼ぶ。よく知られているように正指数を持つ複素代数曲面は射影平面か一般型曲面に限る。指数正の一般型曲面の例は従来充分多く知られていたとは言い難いが、その少数例はいずれも著しい性質を持っていた。すなわち、基本群は無限群であり、極小モデルの余接束はampleであった。この現象が果して指数が正であることから必然的に導かれるものであろうかとは誰しも考える問で、Bombieri、Bogomolov等は更に強い予想を私的にもらしている。

結論から言うと、極小一般型曲面の指数が正であっても、必ずしも余接束はampleではないし、標準束すらampleとは限らない。し

かし，このような曲面の余接束は ample に非常に近い性質を持ち，このことから，後に述べる二つの予想を仮定すると正指数を持つ曲面の基本群が無限群であると言える。

本稿には結果のみを記すことにし，詳細はプレプリント [1] を参照されたい。

定義　代数多様体 X 上の直線束 L が almost ample であるとは，X 上の ample な直線束 L′ と正の定数 a，有限個の X の中の曲線からなる集合 Σ があって，Σ に属さない任意の X の曲線 C に対し $LC \geqq aL'C$ が成立することを言う。Σ を特殊集合と呼ぶ。

上の定義で $\Sigma=\phi$ ならば，Kleimann の判定法より L は ample である。

定義　Vector bundle E は，射影束 $\mathbb{P}(E)$ の tautological line bundle が almost ample のとき，almost ample と呼ぶ。

定理1　一般型曲面の指数が正ならば，その余接束は almost ample である。（極小曲面に限る必要はない）

定理2　一般型曲面 X について $c_1^2 = 3c_2$ が成りたてば，X の余接束は ample である。

特に，Yau の定理 [2] を用いれば，

系　複素代数曲面の普遍被覆面が既約対称空間であることと，$c_1^2 = 3c_2 > 0$ であることとは同値である。

以上は正指数を持つ曲面の性質を記述するものであるが，次は存在を示す。

定理3　任意の高々孤立二重点を持つ射影曲面 X に対し，有限射 $f : Y \longrightarrow X$ で以下の性質を持つものが作れる。

1) Y の特異点は X のそれと同じ型をもつ。

2) Yの minimal resolution の指数は正。

3) Yは一般型.

特にXとして有理二重点を持つものを選べば，一般型の極小曲面で正の指数を有し，しかも標準束が ample ではないものが構成される。

<u>定理4</u>　非特異代数曲面Xの余接束が almost ample ならば blowing up $X' \longrightarrow X$ と cyclic な三重の分岐写像の列 $Y = X_6 \xrightarrow{p_6} X_5 \xrightarrow{p_5} \cdots \longrightarrow X_0 = X'$ であって，p_iの分岐曲線は既約・非特異，Yの余接束は ample であるようなものがある。

ここで，Xが単連結であると仮定すると，Yも単連結になり，次の二つの予想に反する。

<u>予想A</u>　代数曲面Xの余接束が ample ならば，Xの適当な hermitian (Kähler) 計量について正則双断面曲率は負となる。（これは余接

束が Griffiths の意味で正となるといっても同じことである。)

予想 B　単連結かつ完備な hermitian (Kähler) 複素多様体は，その正則双断面曲率が負であれば，Stein 多様体である。

参考文献

[1] Miyaoka, On surfaces of general type with positive index, プレプリント

[2] Yau, On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry.