代数幾何学シンポジウム記録
1980年度 pp.21-34

Cancellation problem

富山大 教育 浅沼照雄

§1. 序

ここでいう cancellation problem とは次の問題を意味する。

問題 1 体 k 上の affine algebraic varieties V および W が $V \times \mathbb{A}^n \cong W \times \mathbb{A}^n$ をみたせば $V \cong W$ がなりたつか? すなわち affine n-space $\mathbb{A}^n$ が cancel できるか?

環論になおせば

問題 2. A と B を体 k 上 affine domains で $A[X_1, \dots, X_n] \cong B[Y_1, \dots, Y_n]$ をみたすとする。このとき $A \cong B$ がなりたつか? ここで $X_1, \dots, X_n$ は不定元, $\cong$ は k-同型を表わす。

次の定義は[1]による。

定義 kを体，Aをk-algebraとする。Aがn-invariantであるとはk-algebra Bおよびk-同型 φ; $A[X_1, \dots, X_n] \cong B[X_1, \dots, X_n]$が存在すればつねに$B$は$A$に$k$-同型なることである。特につねに$\varphi(A) = B$がなりたつとき$A$は$n$-strongly invariantであるという。任意の正整数nについてn-invariant (resp. n-strongly invariant) なるとき単にinvariant (resp. strongly invariant) であるという。

この定義によれば問題2は次のように表せる。

問題3. 体k上のaffine domain Aはinvariantであるか?

§2. Curveの場合

3

定理 1. (Abhyankar, Eakin, Heinzer) A を $\dim A=1$ なる affine k-domain, B を k-algebra で $A[X_1, \dots, X_n] = B[Y_1, \dots, Y_n]$ をみたすものとする。ここで $Y_1, \dots, Y_n$ は B 上 algebraically independent な元である。すると $A=B$ 又は A も B も k の A における algebraic closure k' 上 1 変数多項式環 $k'[X]$ に k'-同型になる。それゆえ A は invariant である。[1]

系. $k=\bar{k}=$ 代数的閉体, C を affine algebraic curve, W を affine algebraic variety で $C \times A^n \cong W \times A^n$ をみたすとする。このとき $C \cong W$ がなりたつ。すなわち curve の cancellation problem はつねになりたつ。

§3. Surface の場合

$\dim A = 2$ なる affine k-domain A について考える。このときはのちに示すように invariant でない例が存在する。一般的に与えられた $\dim A=2$ なる affine k-domain A が invariant であるかどう

か，又は strongly invariant であるかどうかを調べるのはきわめて難かしい問題である。(c.f. [11])そこでここではAが特に多項式環 $A=R[Z]$ の場合について考えてみよう。まずAが2変数の多項式環の時すなわち $R \cong k[X]$ なるときは次のいちじるしい結果が知られている。

定理2. (宮西，杉江，藤田，上林) k が perfect field ならば2変数多項式環 $A=k[X,Y]$ は invariant である。([5]，[10]，[14])

次にRが多項式環でない時を考える。そのためにまず次の定義を与える。

定義. integral domain D が F-closed であるとは D の quotient field K の元 a が $a^2, a^3, na \in D$ (n はある正整数) をみたせばつねに $a \in D$ なることである。ゆえ D が integrally closed 又は標数0なる体を含むときは D は F-closed になる。さて S を quotient field K をもつ任意の integral domain

とする。このとき $S \subset D \subset K$ をみたす最小の F-closed な integral domain D が存在する。これを S の F-closure といい $D = F(S)$ で表わす。ゆえに S が F-closed ならば $S = F(S)$ である。[2].

定義 integral domain D が seminormal であるとは D の quotient field K の元 a が $a^2, a^3 \in D$ ならばつねに $a \in D$ なることである。明らかに D が seminormal ならば F-closed である。とくに D の標数が正ならば seminormal なることと F-closed なることは同値である。(c.f. [4])

定理3 (C. Traverso, Gilmer, Heitmann) integral domain D について $Pic(D[X]) \cong Pic(D)$ なるための必要十分条件は D が seminormal なることである。([6],[12])

なお seminormality については [13] を参照してください。

6

次に strongly invariant については次の定理がなりたつ。

定理 4.（Bhatwadekar）D を strongly invariant k-domain とする。B を integral domain で $D[X_1, \cdots, X_n] = B[Y_1, \cdots, Y_m]$ をみたすとすると $m \leqq n$ かつ $D \subset B$ がなりたつ。[3]

さて $A = R[Z]$ は $\dim A = 2$ なる affine k-domain であるから R は $\dim R = 1$ なる affine k-domain である。定理 1 より R が多項式環でなければ R は strongly invariant. ゆえに $R[Z, X_1, \cdots, X_n] = B[Y_1, \cdots, Y_n]$ なる任意の integral domain B について定理 4 より $B \supset R$ がなりたつ。そこで [2] の系 3.21 より次の定理を得る。（Cf. [7]）

定理 5　R を k 上 $\dim R = 1$ なる affine domain で多項式環でないものとする。すると $R[Z, X_1, \cdots, X_n] = B[Y_1, \cdots, Y_n]$ なる任意の環 B について

(a) k の標数 $\mathrm{ch}\, k = 0$ のときはある T が存在して $B = R[T]$ と表せる。

(b) $\mathrm{ch}\, k = p > 0$ のときはある T が $F(R)[Z, X_1, \cdots, X_n]$ に存在して

$$B = R[T^{p^e}, T + a_1 T^p + \cdots + a_m T^{mp}]$$

と表せる。ここで $a_i \in F(R)$ で $a_i^{p^e} \in R$ をみたすものとする。$(i = 1, \cdots, m)$、逆に B が (b) をみたせば $R[Z, X_1] \cong_R B[Y_1]$ がなりたつ。また $B \cong_R R[Z]$ なるための必要十分条件は $a_1, \cdots, a_m \in R$ なることである。

定理2および定理5を合わせて次の定理をうる。

定理6 $k = \bar{k}$, C を affine algebraic curve, W を affine algebraic variety で $C \times \mathbb{A}^{n+1} \cong W \times \mathbb{A}^n$ をみたすものとする。このとき

(a) $C \times \mathbb{A}^2 \cong W \times \mathbb{A}^1$ がつねになりたつ。

(b) $C \times \mathbb{A}^1 \cong W$ がつねになりたつための C の必要十分条件は $\mathrm{ch}\, k = 0$ 又は C が seminormal curve なることである。

(c) $W \cong Spec(B)$ とおいたとき (a) をみたすための必要十分条件は $C \cong \mathbb{A}^1$ 又は $C = Spec(R)$ として B が k-同型を含めて定理 5 の (a) 又は (b) をみたすことである。

§4. 反例.

現在までに知られている invariant でない環の例をあげる。なお X, Y, Z は不定元を表わす。

例 1. (Hochster) S を real two sphere すなわち $S = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2+y^2+z^2=1)$ とおく。$\mathbb{R}$ は real field である。$B = S[t, v, w]/(xt + yv + wz = 0)$ とおけば $S[X, Y, Z] \cong B[Z]$ かつ $S[X, Y] \not\cong B$。ゆえ $S[X, Y]$ は not invariant。[8]. この場合 $S[X,Y]$ は U.F.D で $\dim S[X, Y] = 4$ である。

例 2. 定理 5 (b) によるもの。たとえば $ch\,k = p$ $A = k[X^2, X^3, Y]$, $B = k[X^2, X^3, Y^p, Y + XY^p]$ とおけば $A[Z] \cong B[Z]$ かつ $A \not\cong B$.

例2においては定理5より $\mathrm{ch}\, k = p > 0$ という条件が必要である。$\mathrm{ch}\, k = 0$ の場合は次の例がある。

例3. $\mathrm{ch}\, k = 0$ として

$$A = k[X,\ Y+Y^3,\ (X-1)(X-2)Y,\ (X-1)(X-2)Y^2]$$

$$B = k[X,\ XY+X^3Y^3,\ (X-1)(X-2)Y,\ (X-1)(X-2)Y^2]$$

とおく。すると $A[Z] \cong B[Z]$ かつ $A \not\cong B$

証明　$F = (X-1)(X-2)$ とおく。F と X は互いに素であるから $f, g \in k[X]$ が存在して $X^3 f + F^3 g = 1$。ゆえ $(XY + X^3Y^3) f + (FY)(F^2Y^2) g = XYf + Y^3 \in B$。これは Y が B 上 integral であることを示す。また $A \ni Y+Y^3$ であるから Y は A 上 integral でもある。$\tilde{A}$ で A の integral closure (in quotient field) を表わすことにすれば $\tilde{A} = \tilde{B} = k[X, Y]$ がなりたつ。$k[X, Y]$ の principal ideal $(F) = F\,k[X, Y]$ を $\mathfrak{A}$ とおけば明らかに $\mathfrak{A}$ は A 及び B の ideal でもあって A と B は

$$A = k[X,\ Y+Y^3] + \mathfrak{A}, \quad B = k[X,\ XY+X^3Y^3] + \mathfrak{A}$$

と表わされる。ここで $k[X, Y+Y^3]+\mathfrak{a}$ は集合 $\{f+a \,;\, {}^\forall f \in k[X, Y+Y^3],\ {}^\forall a \in \mathfrak{a}\}$ を表している。さて $k[X, Y, Z]/F k[X, Y, Z] = k[x, y, z]$ とおけば $(x-1)(x-2)=0$ であり，z は $k[x]$ 上 algebraically independent である。自然な mapping で $A/\mathfrak{a} \subset \tilde{A}/\mathfrak{a} \subset k[x, y, z]$ と見なすことができる。そこで環の拡大 R'/R について $\mathfrak{L}(R'/R)$ で R'/R の conductor を表わすことにすれば $A/\mathfrak{a} = k[x, y+y^3]$ かつ $\tilde{A}/\mathfrak{a} = k[x, y]$ であるから $\mathfrak{L}((\tilde{A}/\mathfrak{a})/(A/\mathfrak{a})) = (0)$ である。それゆえ $\mathfrak{a} = \mathfrak{L}(\tilde{A}/A)$。同様に $\mathfrak{a} = \mathfrak{L}(\tilde{B}/B)$ を得る。まず $A[Z] \cong B[Z]$ を示す。
$G = -\frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ とおくと $G \cdot X \equiv 1 \pmod F$ ゆえ $\bar{\ }$ で $k[X, Y, Z] \to k[x, y, z]$ の image を表わすことにすれば $\bar{G} = x^{-1}$。そこで

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -G & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば $(G_{ij})_{i,j=1,2}$ は invertible で

$$\begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$$ がなりたつ。(See [9])

$k[X, Y, Z]$ の $k[X]$-automorphism Φ を

$$\begin{cases}\Phi(Y) = G_{11}Y + G_{12}Z \\ \Phi(Z) = G_{21}Y + G_{22}Z\end{cases}$$ で定義する。すると

$\overline{\Phi(Y)} = xy$, $\overline{\Phi(Z)} = x^{-1}z$ となる。一方Φによる $A[Z]$ の image は

$\Phi(A[Z]) = \Phi(k[X, Y+Y^3, Z]) + \Phi(Fk[X, Y, Z])$

であって $\Phi(Fk[X, Y, Z]) = Fk[X, Y, Z]$ であるから $\Phi(A[Z]) = k[X, \Phi(Y) + \Phi(Y)^3, \varphi(Z)] + \mathfrak{F}[Z]$

となる。ゆえ $\overline{\Phi(A[Z])} = k[x, xy + x^3y^3, x^{-1}z]$ $= k[x, xy + x^3y^3, z]$。一方 $\overline{B[Z]} = k[x, xy + x^3y^3, z]$ であるから結局 $\overline{\Phi(A[Z])} = \overline{B[Z]}$ がなりたつ。これは $\Phi(A[Z]) = B[Z]$ にほかならない，すなわち $A[Z] \cong B[Z]$ が示された。

次に $A \not\cong B$ を示そう。まずΦをAからBへのk-同型として矛盾を導けばよい。明らかにΦは$\tilde{A}$から$\tilde{B}$へのk-同型すなわち$k[X, Y]$のk-自己同型に拡張できる。ゆえΦは$k[X, Y]$のk-自己同型で$\Phi(A) = B$なるものと仮定してよい。そこで$\mathfrak{F}$は$\tilde{A}/A$かつ$\tilde{B}/B$の conductor であるから $\Phi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ すなわちkのある unit element aに対して $\Phi(F) = aF$ と表せる。それゆえ

$(\Phi(X)-1)(\Phi(X)-2)=a(X-1)(X-2)$ がなりたちこのことは $\Phi(X)$ が次数1の $k[X]$ の元であることを示している。ゆえ $\Phi(k[X])=k[X]$ である。一方 $k[\Phi(X),\Phi(Y)]=k[X,Y]$ であるから $k[X,\Phi(Y)]=k[X,Y]$ がなりたち $\Phi(Y)=bY+H$ と表せる。ここで b は k の unit element, H は $k[X]$ の元である。さて $\Phi(A)=B$ であるから $\overline{\Phi(A)}=\overline{B}$ すなわち
$k[\overline{\Phi(X)},\ \overline{\Phi(Y)}+\overline{\Phi(Y)}^3]=k[x,\ xy+x^3y^3]$ がなりたつ。
$xy+x^3y^3$ は reduced ring $k[x]$ 上 algebraically independent かつ $k[\overline{\Phi(X)}]=k[x]$ に注意すれば
$\overline{\Phi(Y)}+\overline{\Phi(Y)}^3=\alpha(xy+x^3y^3)+\beta$ と表わせる。ここで α は $k[x]$ の unit element, β は $k[x]$ の元を表している。ゆえに

$$(by+\overline{H})+(by+\overline{H})^3=\alpha(xy+x^3y^3)+\beta$$

がなりたつ。y は $k[x]$ 上 algebraically independent であるからこの両辺の y^2 の係数をくらべて $3b\overline{H}y^2=0$ を得るが, ch $k=0$ かつ $b\in k-(0)$ であるから $\overline{H}=0$。それゆえ $\beta=0$ かつ

$by+b^3y^3=\alpha xy+\alpha x^3y^3$ がなりたつ。ゆえ $b=\alpha x$ かつ $b^3=\alpha x^3$。これより $b^2=x^2$ がなりた

つがこれは $X^2 \equiv b^2 \pmod{F}$ を意味する。これは矛盾である。ゆえに $A \not\cong B$ が示された。

References

1. S. Abhyankar, P. Eakin, W. Heinzer. On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring. J. Algebra, 23 (1972) 310 - 342.

2. T. Asanuma, D-algebras stably equivalent to D[Z], Int. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto, (1977), 447 - 476

3. S. M. Bhatwadekar, A note on strongly invariant rings, J. Algebra, 50, (1978) 297 - 298

4. J. W. Brewer, D. L. Costa, K. McCrimmon, Seminormality and root closure, J. Algebra 58 (1979) 217 - 226

5. T. Fujita. On Zariski problem, Proc. Japan. Acad. 55 (1979) 106 - 110

6. R. Gilmer, C. Heitmann, On Pic (R[X]) for R seminormal, J. Pure and Appl. Algebra 16 (1980) 251 - 257

7 E. Hamann, On the R-invariance of R[X], J. Algebra 35 (1976), 1-16.

8. Hochster, Non-uniqueness of coefficient rings in polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 81-82.

9. J. Milnor. Introduction to Algebraic K-theory, Annals. Math. Study 72. Princeton.

10. M. Miyanishi, T. Sugie, Affine surfaces containing cylinderlike open sets, J. Math. Kyoto, 20-1 (1980) 11-42

11. M. Miyanishi, Y. Nakai, Some remarks on strongly invariant rings, Osaka J. Math. 12 (1975), 1-17.

12. C. Traverso, Seminormality and Picard group, Ann, Scuola Norm, Sup. Pisa 24 (1970), 585-595

13. 可換環論の研究. 京都大学数理解析研究所講究録 374.

14. Zariskiの問題, 新・代数セミナー報告集.