

研究回顧

中井 喜 和 (阪大理)

今回は私の還厂を記念して、代数幾何学のシンポジウムを南いて頂き、誠に有難く、このことを企画して頂いた、永田・宮西両氏をはじめ、参画して下さいった諸氏に厚くお礼申し上げたいと存じます。

私の生れたのは大正9年(1920)でありましたが、京大を卒業したのは昭和24年(1949)と比較的遅く、かなり晩学であったと申せましょう。その理由はいくつかあるのですが、その1つは、昭和17年9月より、昭和20年9月まで、丁度丸3年の間海軍予備将校として軍務についていたからで、大学には入りませんでした。終戦の翌年の昭和21年のことでありました。その頃のことを振り返ってみますと、うたゝ感慨に耐えません。食

料が乏しく、闇市が栄え、真正直に配給食料
 だけで暮らしておられた裁判官が餓死されるこ
 という事件まであった時代でありました。そんな
 時によく大学で数学を勉強する輩になった
 ものだと、我ながら感心いたしました。それ
 はともかく、24年に卒業し、直ちに大
 学院にのこりまして、秋月先生の下で、代数
 幾何学を専攻するようになりしました。始めは
 夢中で本や論文をよんでおりましたが、日か
 経つにつれ、自分の Theme を何にしたらよか
 るかと、いろいろ模索したものでした。そ
 の頃の代数幾何学を専攻しようとする人が、
 必ずよむものとして、いわゆる Weil の三部作
 があります。その中に *Sur les courbes algébriques
 et les variétés qui s'en déduisent* があります。その
 中で Riemann-Roch の定理を証明して...もので
 すが、そこでの、「微分」あるいは「微分因子」の扱
 いは大変ユニークな方法で、私の興味が著ろ
 しく喚起されたものでした。それがその後の
 研究に1つの方向づけを与えたように思いま

す。たまたまその頃 Lefschetz の *Analyse situs et la géométrie algébrique* に接する機会がありました。自体にいえば、よむことを強制されたのでした。あの本は大変難解な本で、理解できなかった。点が少なからずあつたのですが、大変興味深い。数々の結果がのつており、その一つに、次のようなことが(生のまゝではないが)あります。いま V^n を n 次元の特異点のない複素代数多様体とし、その generic hyperplane section を $\bar{V}$ とします。そのとき

$$\psi_{\bar{V}}: H^0(V, \Omega_V^1) \longrightarrow H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1)$$

という自然な準同型が存在するので、これに因りて次のことが成りたつてゐます。

- (1) $\psi_{\bar{V}}$ は 単射である。
- (2) $n \geq 3$ ならば $\psi_{\bar{V}}$ は全射である。
- (3) $n = 2$ のときには

$$H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^1) = \text{Im}(\psi_{\bar{V}}) \oplus N$$

こゝで N は $(\omega) + \bar{V} > 0$ をみたす、ある種の 2 階微分 ω の $\bar{V}$ に因する Poincaré 剰余 $\text{Res } \omega$ として得られる、 $\bar{V}$ 上の又一種微分のつく

加群を表わします。この3つの結果を一般標数の場合に、代数的に証明する。というのでその時私のたてた目標でありました。その後その目標をめざして、いろいろホー種微分のことを研究したのでしたが、十分な結果が得られていないのは、お恥かしい次第であります。(1)に関連しまして、 $\bar{V}$ を V の部分多様体として、どのような $\bar{V}$ に対して、 $\gamma_{\bar{V}}$ が単射になるかという形でいろいろしらべてみました。たとえば次のような場合には $\gamma_{\bar{V}}$ は単射になります。

(i). $\bar{V}$ が十分次数の高い *generic hyperplane section*.

(ii) V がアーベル多様体で、 $\bar{V}$ が余次元 1 の *generating subvariety*.

(iii) V がアーベル多様体で、 $\bar{V}^r$ が *generic r -section* ($r \geq 1$)

(2), (3) についても部分的な結果はありますが、満足の中くものでありません。(3)に関連して一つ申し上げておきたいことがあります。

ます。次にあげるのは Castelnuovo の補題と呼ばれているものの(の一つ)であります。

補題 $F(X, Y, Z)$ を複素係数の既約な m 次の同次式、 C を $F=0$ で定義される平面曲線で、その特異点は node だけであると仮定する。そのとき

$$A F'_X + B F'_Y + C F'_Z = 0$$

という自明でない関係式は、 A, B, C の次数が $m-1$ より小さい範囲では存在しない。

(C. Severi: Rend. r. Acad. Lincei, 7(1928), 1-14). この補題

より何がいえるかという点と $\text{Im}(\gamma_V) \cap N = (0)$

が $n=2$ のときに成立することとあります。

(3) なる命題は、 $\gamma_V \in 1 \in H^0(V, \Omega_V^{n-1}) \rightarrow H^0(\bar{V}, \Omega_{\bar{V}}^{n-1})$

としても意味があるわけですが、その場合には

同様のことが証明できるためには、次の一般

化された補題があればよいわけですね。

まず V^n を特異点をもたない代数多様体、 V^* を

S^{n+1} への V の generic projection、 V^* の定義方程式

を $F(X_0, X_1, \dots, X_{n+1})$ 、その次数を m とし、 A_i^* を

次数が $m-n$ より小さい同次式で、 $\sum_{i=0}^{n+1} A_i^* F'_{X_i} = 0$

とすれば, $A_i^* = 0$ ($0 \leq i \leq n+1$) が成り立つ.
 このように V^* は seminormal になるのですが,
 seminormal な超曲面 V^* に対して, 一般に上の
 結果が証明できれば大変有意義だと思われま
 す.

このようにことを卒業以来 10 年程やつ
 ておったのですが あまり進展もなく, また
 このよう なことに興味を示してくる人もな
 いようなので, 徐々に方向を転換して, 中一
 種微分を離れて, 代数的に環の derivation (導分)
 や differential (微分) を扱う方の研究に連んで
 いったものです. その方面での最初の成果が,
 数学会の Journal にてなした *On the theory of differen-*
tials in commutative rings, Vol. 13 (1961) であります.
 それについて, 関連のある論文を何篇か
 書きましたが, そちらの方は比較的多くの人
 によって賞つてゐる様で, よく引用もされて
 るみたいです.

これとは別に, 他の系統の仕事が私には
 あります. それについて一番大きいのは,

Zariski さんの影響でありすす Zariski さんは昭和32年(1957) 頃来日されて、京都大学に3ヶ月程滞在され、その間曲面の極小モデルについて満義をされました。それが、私が曲面論に接した初めてのことでした。その途中、Zariski さんの示唆に従って、一般標数の場合に、幾何種数 p_g が0の曲面上における固有一次系の完備性の証明にとりくみしました。いろいろ苦心しましたが、その証明に成功したことは嬉しい思い出です。最終的には1つの補題に帰着させるのですが、それは次のようになります。

補題 V を特異点をもたない射影代数多様体、 E をその上の very ample な一次系で、 E に因する V の dual mapping g_E が至るところで1対1となる。 m_d と d 次一次系 $|E|$ の元で、その特異点の order が $\geq d$ なるものの集合とすると、 m_d は有限個の $|E|$ の algebraic subsystem である。 とくに B として、 m_d の既約成分で、 B の generic member が孤立特異点しかもたないよ

いなものとするれば, $\dim B \geq \dim E - d$ が成り立つ。

この補題自身の証明は他にもあつて、
永田-松村 秋月-松村 氏らによる証明が公表されております。

さて昭和34年(1959)に私は広島大学の方に転出いたしました。それまでは京都には沢山仲間がおりまして、自分でよすなくても耳で聞て新しい知識がはいつてくる等、いろいろ好都合だったのですが、広島では学問的には全く孤をいたしましたわけで、何をやればよからうかと、いろいろ悩みました。然し一面唯一人で之から開拓してゆければ、それこそ本当に自分の仕事だという自負もありました。先程一寸ふれた数学会の Journal にてました論文も広島に参つてから、やり始めた仕事ですが、も一つの記念すべき論文 *Non-degenerate divisors in an algebraic surface* Hiroshima J. Vol. 24 (1960) を書きましたのも広島に移りましてからの仕事で

こうしてあげてみますと、順調に仕事かできていたようにみえますが、当時の感覚としては決して余裕があつたわけではありませんでした。

non-degenerate divisor というのは森川さんの命名でありまして、その後 Weil さんがアーベル多様体の射影空間への「はめこみ」の問題を扱った論文の中で、その概念を取りあげ、そのような因子は、いまの用語を使えば、*ample* であることを証明したのであります。森川さんの定義はアーベル多様体でなければ使えませんが、何倍かすれば *projective embedding* を与えるという概念なら、一般の多様体にも適用できるわけですから、そのような因子に対して森川さんの用語を借用して *non-degenerate divisor* とよんだわけですね。いまは *ample* とよむ方が。因に当時の "*ample*" は現在の "*very ample*" に相当するので、このような用語が必要になつたわけですね。問題は *ample* な *divisor* とそうでない *divisor* をどうすれば、効率よく判定でき

るかと考えたわけですが、必要條件、すなわち
 「 X が ample な因子であれば $(X') > 0$ であつた、 (X, Γ)
 > 0 がどんな曲線 Γ に対しても成り立つこと」
 は容易にみえましたが、それがまた十分条件で
 あつたとは、当初は考えていなくて、とにかく
 これにすかし、どのくらいのことか”でるたろ
 うかとやっていたうちに、結論がでてしまつ
 たわけだ、全く幸運であつたと思つています。

1961 年秋に Zariski さんのお招きをうけ
 て、Harvard 大学に行くことになつたので方が
 大変よい時期に、良い機会を与えてもらった
 ものだと感謝しています。本当はもう少し早
 くゆきたいと思つていたのでしたが、なかなか
 か機会が来なくて、じりじりしていた矢先の
 ことでした。運よく Fulbright の旅費の援助が
 うけられることになり、アンカレッジを経て
 シヤトルまで団体行動で、それから皆と別
 れ、同じように Harvard 大学に留学する 2, 3 の
 人と、ホストンまでの長い汽車の旅を続けた
 ものです。ホストンの South Station には、松阪

さんや、玄中居が迎へに来て下エリ、早々に下宿も探して貰った。幸先よりスタートをきったものでした。生活のめどがたつてから、早速 Zariski さんのところへ、挨拶にゆきましたが、最近の私の仕事のことなどきかれた上、これからどういふことをやるつもりかと尋ねられ、曲面上の *non-degenerate divisor* の結果を、高次元の場合に一般化することをおきたいと答えておきました。別に成算があつたわけでもなく、ただ何かもつともな Theme を選ぼうかと考えていたので、突嗟の間にそんな返事がでてしまったというのが本音です。

その年 ^{とその周に} Harvard にはずいぶんいろいろな人がおりました。Mumford や Artin が Instructor としていたかに記憶しています。Hartshorne, Schlesinger, Lipman 等はまた Graduate Student で baby seminar と名付け、自分達だけで Homology 代数の勉強もしていた様でした。Visitor としては、小平さんがプリンストンから、Grothendieck がパリから招待されて滞在中でした。小平さんは

Deformation の話を, Grothendieck は E.G.A. の四章
 あたりのことを満義にしていたと思います。ま
 た M.I.T. には岩沢さんかおられ, Brandeis 大学
 には 松沢さん, 高橋さん, 么中君が活躍さ
 れていました。また Colloquium は Harvard, M.I.T.,
 と Brandeis の3つの大学の合同 Colloquium がもた
 れ, 会場も変わりもつて, あちらこちら²といっ
 たものです。Zariski 先生のセミナーでは,
 么中君が, 4次元の多様体の desingularization の
 ことを話していたが, 途中でその方法が
 高次元の場合にも適用できることに集がつい
 て, 急遽n次元の場合にかき直すことになつ
 て, 途中で一旦休みになつたように思えます。
 このような華やかな雰囲気の中で, Grothendieck
 の講義に出席したり, 小平さんの Deformation
 のセミナーをきいたりしていました。また週
 末になると ホストと交響楽団をモ、にいつ
 たり, 美術館を訪れて絵や, 彫刻に暫いの時
 を移す等, 集楽な生活でした。何しろ満義⁵
 する義務はなく, 会議もなく, 雑用もなく,

時間はたっぷりあったわけですから、さそよく勉強できた筈であると思われるのですが、それが、それ程でもなかったのは残念なことです。それでも ample divisor の criterion ができて何とか面目を保てたような次第です。

さてその ample divisor の criterion ですが X が ample であることを示すには、 m を十分大きな整数とすると

(1) $|mX|$ が固定成分をもたないこと

(2) $|mX|$ がどの次元 r ($0 \leq r < n-1$) の

fundamental subvariety も、もたないこと

(3) $|mX|$ が birational map を与えること

の3つを証明すればよいわけですが、その証明の基本になるのは次の exact sequence です X を divisor, D を余次元 1 の部分多様体とすると

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(mX - D) \longrightarrow \mathcal{O}(mX) \longrightarrow \mathcal{O}_D(m\bar{X}) \longrightarrow 0$$

という、 $\bar{X}$ の exact sequence が得られます。ただしここで $\bar{X} = X \cdot D$ 。之より次のコホモロジー群の完全列

$$H^0(V, \mathcal{O}(mX)) \xrightarrow{\gamma} H^0(D, \mathcal{O}_D(m\bar{X})) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}(mX-D)) \\ \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}(mX)) \rightarrow \dots$$

が得られます。このとき、 m を十分大にすれば γ が全射になることを証明するのがキーポイントでありました。結果からいえば $m \gg 0$ ならば $H^1(V, \mathcal{O}(mX-D)) = \{0\}$ となるのですが、これが苦心を要するところでありました。いろいろ苦労しまして、漸く証明ができたものですから、早速 Zariski さんのところへ参りまして、証明の骨子をきいて貰いました。その結果それでよからうとなって早速原稿にとりかかったわけですが、きつちり証明を書いてゆくうち一ヶ所集がかかりなところに出会いました。そこで、こんどは Mumford の部屋にまいりまして、もう一度証明をきいてもらうことにしたわけですが、そのときたまたま Artin が来ていたのか、あるいは Mumford と Artin の2人が1つの研究室を共用していたのかは定かではありませんが、とにかく、2人を前にして証明をきいてもらいました。そうしましたら Mumford

は即座に、私の案がかかりといていた点を指摘してくれ、やっぱりそうかとわかりしたことを覚えています。然し幸いにしてその点は修正可能で、証明のアイデアは十分役に立つことが判明しました。それは元の多様体を、*non-singular* とするから隙ができるので、*Scheme* とすればそのまゝでよい筈だと教えてくれました。折よく Grothendieck が滞在中でしたので、彼に頼んで E.G.A. を一部寄贈してもらい

Scheme の勉強にとりかかった次第でした。あの論文には私にとっていろいろ予満足な点があるのですが、その1つは V は *projective scheme* としてゐることです。あの当時の私の意識では、元の多様体が射影空間にはめこめるかどうかを判定するというよりは、^{与えられた}因子の豊富さの判定の方に主眼があつたわけですから、 $H^*(mX-D) = \{0\}$ の証明に、補助的な局として *hyperplane section* の局を使用したわけですから、後に Kleiman が私の方法を改良して、 V を特異点のない抽象多様体として、*Scheme* 理論を

使わうに、あの criterion を証明いたしませんでした。もう少し柔軟な思考をしていれば、私でもできたのではなかつたかと、いまでも残念に思っています。どうもねばりが不足しているようです。

Harvard には丁度 1 年滞在しまして、翌 1962 年秋に帰国いたしました。もしその集があれば滞在を延長することでもできたのです。家庭の事情で帰ることになったので、うが、いささかに残りたことでした。帰国しましてからのことをふり返ってみると、幾分母の方から離れて、代助の方に主力が注がれていることに気がつきます。尚故もう少し criterion の延長上の土俵をこなしたのだらうかと、いふになつて惜しいと思います。全然やらなかつたわけではなく、2, 3 の結果は出したのです。誰かに先を二されてゐたため、発表をこなしたこともありましたが、それにあつたのは、そろそろ Category や Scheme を使つての論文が盛んになりだしたころで、そのよう

な風潮について申けなかつたという面もありました。それで勢い仕方の方は代数的な面に力を注ぐことになったわけですから、その中で比較的意義があると思われるのは high order derivation に関する仕方でなからうかと思えます。標数 $p(>0)$ の代数系 R における derivation には、重大な欠陥があるわけですから、というのは一つの導分の定数環が、必ず R^p を含んでいふというわけですから、述べて導分を使って明かにできるのは R^p -代数としての R の構造だけで、それより深いところは derivation ではおぼろげになりすぎます。述べて R^p で必ずしも 0 にならない。derivation に代る γ を作用素かほしむわけですから、それについては、いろいろ工夫されてきて、Hasse-Schmidt の higher derivation や、Dieudonné の semi-derivation があるわけですが、Osborn が提唱した high order derivation が一番一般的なものでなからうかと思えます。尤も Osborn は微分幾何の方を専攻する人で、標数 $p(>0)$ のことを考^{てい}えたわけではなく、またその扱ひも

代数的観点からみれば十分なものであった
 もつてですから、いざその^{代数的}基礎固めを試み、
 併せてその応用について考察をいたしましたの
 が、high order derivation I, II であります II に
 ついては石橋、小崎西君に手伝って頂きまし
 た。これについては、まだまだ考えべき問
 題は沢山あるのですが、ただ derivation の場合
 と異なり、非常に計算が複雑で見通しかわる
 いため、十分を展開はされていないという実状
 です。high order が扱いにくい一つの理由とし
 て、derivation の場合と異なり、 D が subring A
 で 0 になるからといって、 A -linear とはいえな
 い点にあります。

こゝ数年私が興味をもつてやっております
 のは locally finite iterative higher derivation, ある
 は locally nilpotent derivation とその応用でありま
 す。たとえば、代数的閉体 K 上のアフィン環 A が
 多項式環になるための十分条件を locally finite
 iterative higher derivation の言葉で表現することであ
 ります。すなわち

- (1) $A^* = k^*$
 - (2) A is UFD
 - (3) $\dim A = 2$
 - (4) A is k on locally finite iterative higher derivation
- をもつ

という4つの条件を A が充てば A は $k[x, y]$ と同型であるということです。この結果は、はじめ宮西君が取り上げ、彼自身による幾何学的な証明が与えられてあります。

$\dim A = 1$ のときは(4)だけで、 $A \cong k[x]$ が結論できるのに、2次元になると、UFDとか単位に関する条件が~~必要~~不可欠のようです。それでは $\dim A \geq 3$ のときには、どのようなことになるのか、全く見当もつきません。またこれは Keller の問題 (~~通常~~ Jacobian problem とよぶ人も多いようですが) にも関係があります。すなわち $f(x, y), g(x, y)$ を複素係数の2変数多項式とし、 $\partial(f, g)/\partial(x, y) = C$ かつ $C \neq 0$ ではない定数とすれば、 $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[f, g]$ になるということです。この完全な解決はまだ与えられ

ては... ませんが もし

$$D = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$$

が、 $\mathbb{C}[x, y]$ の導分として、locally nilpotent である
 ことがいえればよい。ことは、容易に知られま
 す。然しこういう方向から、Keller の問題を攻
 めるのは、大変難かしいように思われますが
 皆さんに良... 工夫はありませんでしょうか。

断然も大分多くなったようです。このあ
 たりで筆をおきた... と思... ます。