代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.176-211

Polar loci の次数の双対性

京大数理研　卜部東介

§0 はじめに

$X \subset \mathbb{P}_n$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の射影 n-空間内の完備代数 r-多様体とする。部分線型空間の旗

$$\mathcal{D}: \quad L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r \subset \mathbb{P}_n$$

$$\dim L_k = n - r + k - 2$$

に対して

$$P_k(\mathcal{D}) = \{x \in X \mid x \text{ は非特異点, } \dim(T_x \cap L_k) \geqq k-1\} \text{ の閉包}$$

= L_k と正規交差しない接空間をもつ非特異点全体の閉包

とおく。ただし，x での X の接空間を T_x で表わした。$P_k(\mathcal{D})$ を旗 $\mathcal{D}$ に付随した X の k-th polar locus と呼ぶ。

最近 polar locus の局所的な性質が Teissier らによって（Lê, Teissier [5]），大域的な性質が Piene らによって調べられた。（Kleiman [4], Piene [7].）また筆者は X の双対

多様体と関連して面白い結果を得たので，ここで報告したい．

一般の $\mathcal{D}$ に対して，$P_k(\mathcal{D})$ の有理同値類，従ってまたその次数が $\mathcal{D}$ によらず一定であることが示せる．$\mu_k = \deg P_k(\mathcal{D})$ を X の k-th class と呼ぶ．$n=2$，$r=1$ つまり X が平面曲線の時には μ_1 は平面曲線論で言うところのクラスと一致していることが容易に示せる．μ_0 は X の次数にほかならない．

$\mathbb{P}_n$ の超平面 H が X に接するとは，ある非特異点 x の接空間を含むか，特異点 $x \in X$ に収束する X の非特異点の列 $\{x_n\}$ で T_{x_n} がある r-線型空間 T に収束するものがあり $T \subset H$ となることとする．

$Y = \{X$ に接する超平面全体$\}$

を双対射影空間 $\mathbb{P}_n^\vee$ 内の集合とし，被約代数構造を与えて，代数多様体とみなす．この時，Y を X の双対多様体と呼ぶ。

ν_j を Y の j-th class としよう．筆者の得た結果は以下のとおりである．

定理　$k+j=\dim X+\dim Y-n+1$ の時　$\mu_k=\nu_j$

ただし，定義していない μ_k，ν_j は 0 とおいた．$\mu_0=\deg X\neq 0$，$\nu_0=\deg Y\neq 0$ であることより容易に

系 1　$\dim Y=n-1-\dim X+\max\{k\mid\mu_k\neq 0\}$

また証明の副産物として

系 2　$\dim X+\dim Y\geqq n-1$
　等号成立 $\Leftrightarrow \mu_1=0\Leftrightarrow \nu_1=0$
$\Leftrightarrow$ X は線型多様体，Y はその線型空間としての双対空間

定理の $j=0$ の場合及び系 1 は，1978 年夏の Copenhagen での代数幾何のシンポジウムで，X が非特異という仮定付きで，Holme が発表した定理と実質的に同一である．(Holme [2])

§1ではpolar locus及びその有理同値類polar classを定義し，Pieneによる基本的な命題を述べる．
§2では双対多様体について，Wallace[10]に見られる結果をスキーム論に翻訳する。あわせてYの双対多様体つまりXの2回目の双対多様体はもとにもどってXであることを示す。
§3で上記の主要定理を証明する．
§4ではPieneの結果のいくつかを紹介する．
§5では標数正の場合に言及する．

平面曲線のPlücker公式とは，クラスあるいはEuler数を多様体の次数，種数など大域的な量と特異点の局所的な量とで表わす関係式であった．それを高次元へ拡張する問題が当然考えられる。それについてはMacPerson，Piene，Teissier，筆者らによっていくつかの結果があるのだが繁雑をさけるために記述を省略した．（Lê，Teissier[5]，MacPerson[6]，Piene[7]，Urabe[9]参照）

§1　Polar locus と polar class

この節では polar locus と polar class の定義を与える。

簡単のために標数0の代数閉体を基礎体として固定する．標数正の場合は最後の節でふれる。

多様体といえば特に断わらない限り，完備被約既約な射影空間の部分スキームのこととする。特異点の存在は常に許す。

交点理論を復習しよう。(Fulton [1])
非特異とは限らない quasi-projective variety W に対し，その Chow ホモロジー群 $A_\bullet W$ とは次元によるグレードをもつ Abel 群で W 上の代数的サイクルのなす Abel 群 $Z_\bullet W$ を有理同値～でわったものである．

$$A_\bullet W = Z_\bullet W / \sim$$

ここで $z \in Z_k W$ について

$z \sim 0$

$\Leftrightarrow$ 被約既約で完備と限らぬ多様体 W_i，$\dim W_i = k+1$

有理関数 $r_i \in R(W_i)^*$，固有正則写像

$\pi_i : W_i \longrightarrow W$ があって

$$z = \sum_i \pi_{i*}[\mathrm{div}(r_i)]$$

$\Leftrightarrow$ $W \times \mathbb{P}_1$ 上の代数的サイクル $x \in Z_{k+1}(W \times \mathbb{P}_1)$ があり, $z = p_{1*}(x \cdot (W \times \{0\} - W \times \{\infty\}))$

$A^{\cdot} W$ は次数付き環である.

i) W が非特異な時

$$A^k W \stackrel{\text{def.}}{=} A_{r-k} W \qquad (r = \dim X)$$

ii) 一般の時

$\mathcal{C}(W)$ を対 (T, f) ただし T は非特異 quasi-projective variety, f は正則写像 $f : W \longrightarrow T$ からなるカテゴリーとしよう。(T, f) から (T', f') への morphism とは正則写像 $g : T \longrightarrow T'$ であって $g \circ f = f'$ となるものとする。(T_1, f_1), (T_2, f_2) に対して $T = T_1 \times T_2$, $f = (f_1, f_2)$ とおけば (T, f) は $\mathcal{C}(W)$ の object であり, 次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 & \\
W \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & T \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & T_2 &
\end{tikzcd}$$

(p_i は T_i への射影)

そこで $A^{\cdot}W = \varinjlim_{e(W)} A^{\cdot}T$ と定義する．

Quasi-projective varieties の固有正則写像 $f: W \longrightarrow T$ は
次数付き群の homomorphism $f_*: A.W \longrightarrow A.T$
次数付き環の homomorphism $f^*: A^{\cdot}T \longrightarrow A^{\cdot}W$
を導く．キャップ積

$$\cap : A^{\cdot}W \otimes A.W \longrightarrow A.W$$ は次を満す．

- $\xi \in A^{i}W$, $t \in A_{j}W \Rightarrow \xi \cap t \in A_{j-i}W$
- $\xi \in A^{\cdot}T$, $t \in A.W \Rightarrow f_*(f^*\xi \cap t) = \xi \cap f_* t$
  (the projection formula)
- $\xi, \eta \in A^{\cdot}W$, $t \in A.W \Rightarrow \xi \cap (\eta \cap t) = (\xi \cdot \eta) \cap t$

またW上のベクトルバンドルEに対してその Chern 類

$$c(E) = \sum c_i(E) \in A^{\cdot}W \qquad c_i(E) \in A^{i}W$$

が定まる。

さて，§0と同様にXを射影n-空間P_n内の完備r-部分多様体とする。Uをその非特異点全体からなる Zariski 開集合とする．

定義1.1. 部分線型空間の旗

$$\mathfrak{D}: L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r \subset \mathbb{P}_n$$

$$\dim L_k = n - r + k - 2$$

に対して

$$P_k(\mathfrak{D}) = \{x \in U \mid \dim(T_x \cap L_k) \geqq k-1\} \text{の閉包}$$

$= L_k$ と正規交差しない接空間をもつ非特異点全体の閉包

とおき，これを旗 $\mathfrak{D}$ に付随した X の polar locus と呼ぶ。ここで T_x は x での U の $\mathbb{P}_n$ 内に実現された接空間を表わす。

$G = \mathrm{Grass}_r(\mathbb{P}_n)$ を $\mathbb{P}_n$ 内の r-線型空間全体をパラメトライズする Grassmann 多様体とする。点 $x \in U$ に対しそこでの X の接空間 $T_x \in G$ を対応させることにより，Gauss 写像

$$g: U \longrightarrow G$$

が定まる.

$$c_k(\mathfrak{D}) = \{M \in G \mid \dim(M \cap L_k) \geqq k-1\}$$

とおけば，これは special Schubert variety のひとつで，あきらかに

$P_\ell(\mathcal{D}) = g^{-1}c_\ell(\mathcal{D})$ の閉包

また $p_\ell : \mathbb{P}_n \setminus L_\ell \longrightarrow \mathbb{P}_{r-\ell+1}$ を L_ℓ を中心とする射影とすると，$P_\ell(\mathcal{D}) = p_\ell|X \setminus L_\ell$ の臨界点の閉包でもある．

<u>定理 1. 2.</u>　$\pi : \overline{X} \longrightarrow X$ は双有理正則写像，

$\overline{g} : \overline{X} \longrightarrow G$ は正則写像で，空でない Zariski 開集合 $U' \subset U$ があり，$\pi|\pi^{-1}(U')$ は同型であり，$\overline{g}|\pi^{-1}(U') = g \circ \pi|\pi^{-1}(U')$ となるものとする．この時，一般の旗 $\mathcal{D}$ に対して，$A_\bullet X$ 内で

$$[P_\ell(\mathcal{D})] = \pi_*\{\overline{g}^* c_\ell(Q) \cap [\overline{X}]\}$$

ここで，Q は G 上の tautological vector bundle ($\operatorname{rank} Q = r+1$)，[　] はかっこ内の多様体の有理同値類をあらわす。

<u>系 1. 3.</u>　一般の旗 $\mathcal{D}$ に対して $P_\ell(\mathcal{D})$ は空集合であるか X 内で余次元 ℓ であり，その有理同値類は $\mathcal{D}$ によらず一定．

<u>定義 1. 4.</u>　一般の旗 $\mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{D}$ によら

ない有理同値類 $[P_k(\mathcal{D})] \in A_{r-k}X$ を X の k-th polar class と呼ぶ。

定理 1.2. の証明　どのような旗 $\mathcal{D}$ についても

$$[c_k(\mathcal{D})] = c_k(Q) \cap [G]$$

となることは知られている。今 G は非特異なので、$g^* : A_\cdot G \longrightarrow A_{\cdot + \dim \bar{X} - \dim G} \bar{X}$

が定まり、

$$g^*[c_k(\mathcal{D})] = g^* c_k(Q) \cap g^*[G] = g^* c_k(Q) \cap [\bar{X}].$$

だから、あとは一般の $\mathcal{D}$ に対しては

$$[P_k(\mathcal{D})] = \pi_* g^* [c_k(\mathcal{D})]$$

となることを示せばよい。整数 k 及び一般の旗 $\mathcal{D}$ を固定し、$\Sigma = c_k(\mathcal{D})$ と書く。Kleiman の Transversality Lemma (Kleiman [3].) により、g を通してみるとき

① $\pi^{-1}(X \setminus U')$ の各成分と Σ は proper に交わる。

② $\pi^{-1}(U')$ と Σ_{smooth} は transversal に交わる。

③ $\pi^{-1}(U')$ と Σ_{sing} は proper に交わる。

④ $g^{-1}\Sigma$ は embedded components をもたない

と仮定してよい。

④により $\mathrm{Ass}(\bar{g}^{-1}\Sigma)$ は $\bar{g}^{-1}\Sigma$ の成分と一対一に対応し，①により $\pi^{-1}(U') \supset \mathrm{Ass}(\bar{g}^{-1}\Sigma)$ となる。$x \in \mathrm{Ass}(\bar{g}^{-1}\Sigma)$ をとると②，③により $\bar{g}(x)$ は Σ の非特異点，そして②より

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{G,\bar{g}(x)}}(\mathcal{O}_{\bar{X},x}, \mathcal{O}_{\Sigma,\bar{g}(x)}) \cong \begin{cases} \mathcal{O}_{\bar{g}^{-1}\Sigma,x} & i=0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$$

これより

$$\bar{g}^*[\Sigma] \overset{\text{定義}}{=} \sum_{\substack{x \in \mathrm{Ass}(\bar{g}^{-1}\Sigma) \\ \mathrm{ht}\, x = k}} \sum_i (-1)^i \,\mathrm{length}\, \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{G,\bar{g}(x)}}(\mathcal{O}_{\bar{X},x}, \mathcal{O}_{\Sigma,\bar{g}(x)}) \cdot [W_x]$$

において $i=0$ の項だけが 0 でなく $\bar{g}^{-1}\Sigma$ は被約で

$\bar{g}^*[\Sigma] = [\bar{g}^{-1}\Sigma_{red}]$ となる．ただし W_x は x を generic point とする $\bar{X}$ の既約部分多様体とする．そして再び①により $[P_k(\mathcal{D})] = \pi_*[\bar{g}^{-1}\Sigma_{red}]$

Q．E．D．

例 1.5.

$X \subset \mathbb{P}_n$ を線型 r-多様体とする．$X \cap L_1 = \phi$ ならば $P_k(\mathcal{D}) = \phi \quad (k \geqq 1)$

例 1.6. $X \subset \mathbb{P}_n$ が斉次多項式 $F=0$ で定義される

超曲面の時．　$\dim L_k = k-1$ となり $k=1,2,\cdots,r$ に対して点 $(a_0^{(k)}:a_1^{(k)}:\cdots:a_n^{(k)}) \in L_k \setminus L_{k-1}$ を選ぶとき

$$P_k(D)=\left\{F=0, \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}\frac{\partial F}{\partial z_i}=0,\cdots,\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}\frac{\partial F}{\partial z_i}=0\right\} \setminus \{\mathrm{Singularity}\}$$

の閉包

§2　双対多様体

Wallace[10]にある双対多様体についての著しい定理をこの節で述べる。あとで鍵の役割を果たすことになる定理である。

X, $\overline{X}$, U, U', g, $\tilde{g}$, π, G, $\mathbb{P}_n$ は前節と同じものを表わすとする．ただし $U=U'$ と仮定する．そのような $\overline{X}$ としてはたとえば Gauss 写像 $g: U \longrightarrow G$ のグラフの $X \times G$ 内での閉包でも考えればよい．

$\mathbb{P}_n$ はベクトル空間 $V=H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$ を用いて

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V) = \{V$ の超平面全体$\}$ と書く．

G 上の tautological vector bundle Q は標準的全射

$$V_G \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

$(V_G = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_G)$ をもつ．この列の $\tilde{g}$ による引き

もどしとして

$$\mathbb{V}_{\bar{X}} \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

($\mathbb{V}_{\bar{X}} = \mathbb{V} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{O}_{\bar{X}}$) が定まる。$K = \mathrm{Ker}(\mathbb{V}_{\bar{X}} \longrightarrow P)$ とおく。双対をとって $\mathbb{V}_{\bar{X}}^{\vee} \longrightarrow K^{\vee} \longrightarrow 0$

これは埋めこみ $Z = \mathbb{P}(K^{\vee}) \hookrightarrow \bar{X} \times \mathbb{P}(\mathbb{V}^{\vee}) = \mathbb{P}(\mathbb{V}_{\bar{X}}^{\vee})$

を定義する。射影 $\bar{X} \times \mathbb{P}(\mathbb{V}^{\vee}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{V}^{\vee})$ による Z の像に被約代数多様体の構造を与え Y と書く。上記の構成の意味をたどっていけば

$$Y = \{ X \text{に接する超平面全体} \}$$

つまり Y は §0 で述べた X の双対多様体にほかならない。特に $\bar{X}$ のとり才に依存しない。

射影 $\bar{X} \times \mathbb{P}(\mathbb{V}^{\vee}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{V}^{\vee})$ の Z への制限を $\beta : Z \to Y$ とかく。また $\bar{\alpha} : Z = \mathbb{P}(K^{\vee}) \longrightarrow \bar{X}$ をファイバーバンドルの底空間への射影とし，$\alpha = \pi \circ \bar{\alpha}$ とおく。

<u>例2.1.</u>　X を線型多様体とする。閉点 $x \in X$ での接空間とは X 自身だから，Y は X を含むすべての超平面，つまり双対線型空間にほかならない。

<u>例2.2.</u>　$X \subset \mathbb{P}_n$ を既約斉次方程式 $F(t_0, t_1, \cdots, t_n)=0$ で定義された超曲面とする。Yは方程式系

$$
\begin{aligned}
&F(t_0, t_1, \cdots, t_n) = 0 \\
&u_0 = \frac{\partial F}{\partial t_0}(t_0, t_1, \cdots, t_n) \\
&u_1 = \frac{\partial F}{\partial t_1}(t_0, t_1, \cdots, t_n) \\
&\quad \vdots \qquad \vdots \\
&u_n = \frac{\partial F}{\partial t_n}(t_0, t_1, \cdots, t_n)
\end{aligned}
$$

から変数 $t_0, t_1, \cdots, t_n$ を消去して得られる $u_0, u_1, \cdots, u_n$ についての多項式系で定義される多様体となる。

<u>例2.3.</u>　t_0, t_1, t_2, t_3 を $\mathbb{P}_3$ の斉次座標とする. t_3 を含まない既約斉次多項式 $F(t_0, t_1, t_2)$ で定義される曲面Xを考える。$(0, 0, 0, 1)$ を通らない平面とXとの交わりを X_1 とするとXは X_1 上の $(0, 0, 0, 1)$ を頂点とする錐である. u_0, u_1, u_2, u_3 を双対座標とする. Xの双対多様体Yは点 $(0, 0, 0, 1)$ の双対線型空間 $u_3 = 0$ に含まれ曲線 X_1 の双対多様体に一致する。$\dim X = 2$ にもか

かわらず $\dim Y \leq 1$ となっている。

<u>定義 2.4.</u>　$x \in U$ 及び双対射影空間の点 $y \in \mathbb{P}_n^\vee$ について，H_y を y に対応する $\mathbb{P}_n$ の超平面とする時，H_y に含まれる接空間をもつ点全体の閉包を X の y-contact locus と呼ぶ．同様に Y の x-contact locus も定義される．

Wallace の定理は次のように述べられる。なお後に触れるが Wallace [10] には誤りがある．

<u>定理 2.5.</u>　Y の双対多様体，つまり X の 2 回目の双対多様体は X に一致する．

非特異点からなる空でない Zariski 開集合 $U_1 \subset X$，$U_1^* \subset Y$ があって，すべての $x \in U_1$，$y \in U_1^*$ に対して

X の y-contact locus

と Y の y での接空間 T_y

Y の x-contact locus

と X の x での接空間 T_x

は互いに他の双対線型空間である。

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[dl, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}(V) \supset X & \bar{X} \arrow[l, "\pi"'] & & Y \subset \mathbb{P}(V^{\vee})
\end{tikzcd}$$

<u>系 2.6</u>　$r=\dim X$, $s=\dim Y$ と書く.

(1) 一般の非特異点 $y \in Y$ について y-contact locus の次元は $n-s-1$.
一般の非特異点 $x \in X$ について x-contact locus の次元は $n-r-1$

(2) $r+s \geqq n-1$ が常になりたつ. 等号が成立するのは X が線型多様体の時その時に限る. またその時 Y は X の双対線型空間である.

<u>証明</u>　定理 2.5 よりあきらかである.

<u>定理 2.5 の証明</u>　U^* を Y の非特異点全体がなす Zariski 開集合, $Z \supset J$ を β の分岐点 (ramification point) のなす Zariski 閉集合とする. ($J = Supp(\Omega^1_{Z/Y})$) $z_0 \in \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(U^* \setminus \beta(J))$ を選び固定する. (右

辺の集合はSardの定理より空でない開集合である.) $x_0=\alpha(z_0)$, $y_0=\beta(z_0)$とおく. x_0, y_0は非特異点である. x_0の十分小さい近傍N_1を選ぶ.
$V=H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1))$ の底を $\phi_0, \phi_1, \cdots \phi_n$ とする.
$D_1, \cdots, D_r$ をN_1上の独立したベクトル場とする.
$(r=\dim X)$ Gauss 写像の定義より, ベクトルバンドルの morphism $V_X \longrightarrow P$ を記述するマトリクスとしてN_1上では

$$T=\begin{pmatrix} \phi_0, \phi_1, & \cdots\cdots, & \phi_n \\ D_1\phi_0, D_1\phi_1, & \cdots\cdots, & D_1\phi_n \\ \vdots & & \vdots \\ D_r\phi_0, D_r\phi_1, & \cdots, & D_r\phi_n \end{pmatrix}$$

という形のものがとれるはずである.(ϕ_iたちを$\mathbb{P}_n$の斉次座標とみている.) $K|N_1$ の大域切断の$\mathcal{O}_{N_1}$-底 をとる。$e_1, \cdots, e_{n-r}$ としよう.
morphism $K \longrightarrow V_X$ はこの底を用いて N_2上

$$\psi=\begin{pmatrix} \psi_{01} & \cdots & \psi_{0,n-r} \\ \psi_{11} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{n,n-r} \end{pmatrix}$$

と行列表示される。合成 $K \to V_x \to P$ は0だから $\phi = (\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n)$ とおくと

$$\phi \cdot \psi = 0 \qquad (2.1)$$

そして N_1 上のベクトル場Dに対して

$$D\phi \cdot \psi = 0 \qquad (2.2)$$

ただし $D\phi = (D\phi_0, D\phi_1, \cdots, D\phi_n)$ とおいた．

$K|_{N_1}$ V とも双対基底に移れば $V_x^\vee \to K^\vee$ は転置行列 ${}^t\psi$ で表示される，同型

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(N_1) & \longrightarrow & N_1 \times \mathbb{P}_{n-r-1} \\ \Psi & & \Psi \\ (x, [u_1 e_1 + \cdots + u_{n-r} e_{n-r}]) & \longmapsto & (x, (u_0 : u_1 : \cdots : u_{n-r})) \end{array}$$

により $\alpha^{-1}(N_1)$ を $N_1 \times \mathbb{P}_{n-r-1}$ と同一視する。開集合 $\hat{N} = \{u_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{n-r-1}$ 上の非斉次座標 u_j/u_1 を同じ文字で表わす。そして $u_1 = 1$ とおく，

$z_0 \in N_1 \times \hat{N}$ と仮定してよい。ベクトルバンドルの全射 $V_Z \to \mathcal{O}_Z(1)$ は $N_1 \times \hat{N}$ 上では行列

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix} = \psi \cdot u \qquad (2.3) \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-r} \end{pmatrix}$$

で表わされる．正則写像 β は $N_1 \times \hat{N}$ 上

$$z \longmapsto (\Psi_0(z) : \Psi_1(z) : \cdots : \Psi_n(z)) \in \mathbb{P}(V^\vee)$$

で表わされる．$y_0 \in Y$ の十分小さい近傍 N_1^* をとる．$D_1^*, D_2^*, \cdots, D_s^*$ $(s = \dim Y)$ を N_1^* 上の独立なベクトル場とする．$y \in N_1^*$ における Y の接空間とは次の行列 T^* の y での値の列ベクトルたちがはる線型空間にほかならない．

$$T^* = \begin{pmatrix} \Psi_0 & D_1^*\Psi_0 & \cdots & D_s^*\Psi_0 \\ \Psi_1 & D_1^*\Psi_1 & & D_s^*\Psi_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_n & D_1^*\Psi_n & \cdots & D_s^*\Psi_n \end{pmatrix}$$

次に $z_0 \in Z$ の近傍 $\hat{N} \subset N_1 \times \hat{N}$ 上で

$$\phi \cdot T^* = 0 \qquad (2.4)$$

が成りたつことを示す．まず等式(2.1)(2.3)より

$$\phi \cdot \Psi = \phi \cdot \psi \cdot u = 0 \qquad (2.5)$$

β は $z_0 \in Z$ で smooth だから，D_j^* は $\hat{N}_1$ 上のベクトル場 $\hat{D}_j^*$ に拡張される．$(j = 1, 2, \cdots, s)$ ϕ_i は変数 u_j を含まないからもちろん

$$\partial\phi_i / \partial u_j = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots, n,\ j = 2, 3, \cdots, n-r)$$

であり (2.2) をあわせ考えると $\hat{N}_1$ 上のすべてのベクトル場 $\hat{D}$ に対して

$$\hat{D}\phi \cdot \psi = 0$$

ただし $\hat{D}\phi=(\hat{D}\phi_0, \hat{D}\phi_1, \cdots, \hat{D}\phi_n)$. 特に

$$\hat{D}_j^*\phi\cdot\Psi=\hat{D}_j^*\phi\cdot\psi\cdot u=0 \qquad (j=1,2,\cdots,s)$$

(2.6)

等式(2.5)を $\hat{D}_j^*$ で微分して

$$\hat{D}_j^*\phi\cdot\Psi+\phi\cdot\hat{D}_j^*\Psi=0$$

この等式と(2.6)より

$$\phi\cdot\hat{D}_j^*\Psi=0$$

この最後の式と(2.6)は(2.4)を意味する.

$z\in\tilde{N}_1$ に対して $y=\beta(z)$, $x=\alpha(z)$ と書く時 (2.4.) により

$$\phi(x)\cdot T^*(y)=0$$

α は射影 $\bar{X}\times\mathbb{P}_n^\vee\longrightarrow\bar{X}$ の Z への制限だから

$$\alpha|\beta^{-1}(y_0)\cap\tilde{N}_1:\beta^{-1}(y_0)\cap\tilde{N}_1\longrightarrow X$$

は中への同型である。I をその像とする.

S を $T^*(y_0)$ の列ベクトル全体ではられる線型空間つまり Y の y_0 での接空間 T_{y_0} それの双対空間とする。$S=T_{y_0}^\vee$. (2.4) によれば $I\subset S$。

ところが $\dim S=n-1-s$

$$\dim I\geqslant\dim Z-\dim Y=n-1-s$$

従って $x_0=\pi(\bar{x}_0)$ の十分小さい近傍 N_3 をとれば

$$I \cap N_3 = S \cap N_3$$

となることを示す。z_0 は $\beta^{-1}(y_0) \cap \alpha^{-1}(U)$ の任意の点でよかった。だから y_0-contact locus つまり $\{x \in U \mid T_x \subset H_{y_0}\}$ の閉包は y_0 での Y の接空間 T_{y_0} の双対線型空間であることを示す。y_0 も $U^* \setminus \beta(J)$ の任意の $\beta^{-1}(y) \cap \alpha^{-1}(U) \neq \phi$ なる点でよかったから，y-contact locus と T_y の双対性が示せた。さらに $\widetilde{U}_1 = \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(U^* \setminus \beta(J))$ とおくと，$\beta|_{\widetilde{U}_1} : \widetilde{U}_1 \longrightarrow Y$ は，Y の開集合上の射影空間をファイバーとするファイバーバンドルで，Y の点 y におけるファイバーが接空間 T_y の双対空間となっているものの Zariski 開集合と同型である。つまり，X とファイバー空間 $\alpha|_{\widetilde{U}_1} : \widetilde{U}_1 \longrightarrow X$ との関連は，Y と $\beta|_{\widetilde{U}_1} : \widetilde{U}_1 \longrightarrow Y$ の関連に等しい。X，Y はそれぞれ $\alpha|_{\widetilde{U}_1}$，$\beta|_{\widetilde{U}_1}$ の像の閉包だから，Y の双対多様体はもとにもどって X となる。X と Y との立場を入れかえれば残りの部分も証明される。　Q. E. D.

§3 主要定理

前節の通り $X \subset \mathbb{P}(V)$ は射影 n-空間内の射影的 r-多様体とする。双対多様体 Y の次元を s とする.

さてこんどは Y から出発して Y についての Gauss 写像のグラフ $\bar{Y}$, その上の射影バンドル W を X に対して $\bar{X}$, Z をつくったのと同じようにして構成する. ページの下の図式が得られる。ただし β の分岐点 (ramification point) の集合を J, δ のそれを J' とし, $U_1 = U \setminus \delta(J') \subset X$, $U_1^* = U^* \setminus \beta(J) \subset Y$, $\tilde{U}_1 = \alpha^{-1}(U_1) \cap \beta^{-1}(U_1^*) \subset Z$, $\hat{U}_1 = \delta^{-1}(U_1) \cap \gamma^{-1}(U_1^*) \subset W$ とおく. 定理 2.5 の証明をみなおすと同型 $\theta : \tilde{U}_1 \longrightarrow \hat{U}_1$ があり $\delta\theta = \alpha$, $\gamma\theta = \beta$ となることがわかる.

$$
\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[ddll, "\alpha"'] \arrow[ddl, "\bar{\alpha}"] \arrow[ddrr, "\beta"] & & \\
 & & \tilde{U}_1 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[dd, "\theta", "\wr"'] & & \\
\mathbb{P}(V) \supset X & \bar{X} \arrow[l, "\pi"'] & & \bar{Y} \arrow[r, "\rho"] & Y \subset \mathbb{P}(V^\vee) \\
 & & \hat{U}_1 & & \\
 & & W \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[uull, "\delta"] \arrow[uur, "\bar{\gamma}"'] \arrow[uurr, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X$　　$L^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V^\vee)}(1)|_X$　と書く．

定義３．２　射影 n-空間 $\mathbb{P}_n$ 内の代数多様体 X の k-th class μ_k とは（k は整数）

・ $0 \leq k \leq r = \dim X$ の時

k-th polar class $[P_k(\mathcal{D})] \in A_{r-k}X$ の次数．

つまり　$\mu_k = \deg\{c_1(L)^{r-k} \cap [P_k(\mathcal{D})]\}$

・ $k < 0$ または $k > r$ の整数 k に対して

$$\mu_k = 0$$

と定義する．

注意・ $P_0(\mathcal{D}) = X$ であるから μ_0 は X の次数である。

・ $n=2$, $r=1$ の時，つまり X が平面曲線の時 1-st class μ_1 は平面曲線論でいうクラスにほかならない．

主要定理３．３　$X \subset \mathbb{P}_n$ を標数０の代数閉体上の射影 n-空間内の完備被約既約代数多様体とする。Y を X の双対多様体とする．μ_k を X

の k-th class，ν_j を Y の j-th class としよう．
すると $k+j=\dim X+\dim Y-n+1$ の時 $\mu_k=\nu_j$

証明に必要な補題をひとつ述べる．

補題３．４　多様体 W 上のベクトルバンドル
E について

$$s(E)=\sum_i s_i(E)=c(E^\vee)^{-1} \quad \text{とおくと}$$
$$s_k(E)\cap[W]=p_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{e-1+k}\cap[\mathbb{P}(E)])$$
$$k=0,1,2,\cdots$$

である．ただし $e=\operatorname{rank} E$．$\mathbb{P}(E)$ は E に随伴した射影バンドル，$p:\mathbb{P}(E)\longrightarrow E$ はその底空間への射影．

証明　よく知られた事実だと思うので証明を略する．たとえば Kleiman［４］にある．

定理３．３の証明　$r=\dim X$，$s=\dim Y$ とおく．
定理 1．2 により整数 k，$0\le k\le r$ について

$$[P_k(\mathcal{D})]=\pi_*(c_k(P)\cap[\tilde{X}])$$

$0 \to K \to V_{\bar{X}} \to P \to 0$ は完全列だから

$$c(P) = c(K)^{-1}$$

ここで

$$c(K)^{-1} = \sum_i s_i(K^\vee) \qquad s_i(K^\vee) \in A^i \bar{X}$$

と書くと補題 3.4 により

$$\begin{aligned} & s_\ell(K^\vee) \cap [\bar{X}] \\ &= \bar{\alpha}_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(K^\vee)}(1))^{n-r-1+\ell} \cap [Z]) \\ &= \bar{\alpha}_*(\beta^* c_1(L^*)^{n-r-1+\ell} \cap [Z]) \end{aligned}$$

となる。だから

$$\begin{aligned} \mu_\ell &= \deg\{c_1(L)^{r-\ell} \cap [P_\ell(\mathcal{D})]\} \\ &= \deg\{c_1(L)^{r-\ell} \cap \pi_*(c_\ell(P) \cap [\bar{X}])\} \\ &= \deg\{c_1(L)^{r-\ell} \cap \pi_* \bar{\alpha}_*(\beta^* c_1(L^*)^{n-r-1+\ell} \cap [Z])\} \\ &= \deg\{\alpha^* c_1(L)^{r-\ell} \cdot \beta^* c_1(L^*)^{n-r-1+\ell} \cap [Z]\} \end{aligned}$$

(3. 1)

$\ell < 0$ の時は

$$\alpha_*(\beta^* c_1(L^*)^{n-r-1+\ell} \cap [Z]) \in A_{r+(-\ell)} X = 0$$

だから

$$\begin{aligned} & \deg\{\alpha^* c_1(L)^{r-\ell} \cdot \beta^* c_1(L^*)^{n-r-1+\ell} \cap [Z]\} \\ &= \deg\{c_1(L)^{r-\ell} \cap \alpha_*(\beta^* c_1(L^*)^{n-r-1+\ell} \cap [Z])\} \\ &= 0 = \mu_\ell \end{aligned}$$

$l = r+s-n+1$ とおく。同様に $r-n+1 \leq k \leq r$ の時

$$\nu_{l-k} = \deg\{\delta^* c_1(L)^{r-k} \cdot \gamma^* c_1(L^*)^{n-r-1+k} \cap [W]\} \tag{3.2}$$

となる．

$$\xi = (\alpha, \beta) : Z \longrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^\vee)$$

$$\eta = (\delta, \gamma) : W \longrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^\vee)$$

を考えよう。$\mathbb{P}(V)$ 内の $(n-r+k)$ 次元線型空間 S_1 $\mathbb{P}(V^\vee)$ 内の $(r+1-k)$ 次元線型空間 S_2 を考える時 (3.1), (3.2) は

$$\mu_k = \deg\{\xi^*[S_1 \times S_2]\}$$

$$\nu_{l-k} = \deg\{\eta^*[S_1 \times S_2]\}$$

を示す。ところが Kleiman [3] の Transversality Lemma より一般の S_1, S_2 に対して

① スキームとしてのひきもどし，$\xi^{-1}(S_1 \times S_2)$, $\eta^{-1}(S_1 \times S_2)$ は台は有限個の点で，各点は被約構造をもつ。

② $\xi^{-1}(S_1 \times S_2) \subset \tilde{U}_1$, $\eta^{-1}(S_1 \times S_2) \subset \hat{U}_1$

と仮定できる．定理1．2の証明と同じように高次の Tor が消えて

$$\mu_k' = \xi^{-1}(S_1 \times S_2) \text{ の点の数}$$

$\nu_{\ell-k} = \eta^{-1}(S_1 \times S_2)$ の点の数

となる。②及び同型 $\theta : \tilde{U}_1 \longrightarrow \hat{U}_1$ の存在はこの2つの数が等しいことを示す。

Q.E.D.

系 3.5　定理3.3と同じ仮定のもとで

$$\dim Y = n-1-\dim X + \max\{k \mid \mu_k \neq 0\}$$

証明　定理3.3により $\mu_{r+s-n+1} = \nu_0 \neq 0$ であり $k > r+s-n+1$ の時 $\mu_k = 0$ だから，あきらか。

系 3.6　定理3.3と同じ仮定のもとで

$$\dim X + \dim Y \geqq n-1$$

そして以下は同値.

(1) $\dim X + \dim Y = n-1$

(2) $\mu_1 = 0$

(3) $\nu_1 = 0$

(4) Xは線型多様体でありYはその線型空間としての双対空間。

証明　前半は系3.5よりあきらか．後半について．(1) ⇒ (2) は系3.5による．(2) ⇒ (1) は定義により，$X = P_0(\mathcal{D}) \supset P_1(\mathcal{D}) \supset \cdots \supset P_r(\mathcal{D})$ となるので $\mu_1 = 0 \Rightarrow P_1(\mathcal{D}) = \phi \Rightarrow P_k(\mathcal{D}) = \phi$　$k \geqq 1$ $\Rightarrow \mu_k = 0$　$k \neq 0$ となるので系3.5を適用すればよい．XとYの立場を入れかえれば (1) ⇔ (3) もでる．(1) ⇔ (4) は系2.6の (2) である．

注意　$X = P_0(\mathcal{D}) \supset P_1(\mathcal{D}) \supset \cdots \supset P_r(\mathcal{D})$
となるので，ある $\mu_k = 0$ ならば $j \geqq k$ について $\mu_j = 0$ となる．つまり

$$\max\{k \mid \mu_k \neq 0\} = \min\{k \mid \mu_k = 0\} - 1$$

§4　Polar loci の幾何

この節では polar loci の幾何に重要な意味をもつと思われるいくつかの命題を紹介する．また，補題2.7を証明する．

命題たちの証明は Piene [7] を参照してもらうこととして省略した．$X \subset P_n$ は r-多様体とする．

命題4.1　$p : \mathbb{P}_n \setminus M \longrightarrow \mathbb{P}_m$ を一般の線型空間 M を中心とした射影とする。ただし $\dim X + 1 \leq m \leq n$。すると $\mathbb{P}_m$ の一般の旗

$$\mathcal{D}' : L_0' \subset L_1' \subset \cdots \subset L_r' \subset \mathbb{P}_m$$

$$\dim L'_k = m - \dim X + k - 2$$

に対して，$p(X)$ の閉包の k-th polar locus を $P_k(\mathcal{D}')$

旗　$p^{-1}\mathcal{D}' : L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r \subset \mathbb{P}_n$

$$L_k = p^{-1}(L_k')$$

に対しての X の polar locus を $P_k(p^{-1}\mathcal{D}')$ とかく.

すると　$P_k(p^{-1}\mathcal{D}') = p^{-1} P_k(\mathcal{D}') \cap X$

さらに $\mathbb{P}_n$ の一般の旗 $\mathcal{D}$ に対して

$$[P_k(p^{-1}\mathcal{D}')] = [P_k(\mathcal{D})] \quad \text{in } A_\bullet X$$

つまり，polar class $[P_k(\mathcal{D})]$ ($A_\bullet X$ の元である) は一般の射影に対して不変である.

系4.2　k-th class μ_k は一般の射影に対して不変である.

命題4.3　一般の旗

$$\tilde{\mathcal{D}} : L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_r \subset L_{r+1} \subset \mathbb{P}_n$$

$$\dim L_k = n - r + k - 2 \qquad r = \dim X$$

（今まで考えてきた旗と違って線型空間の数がひとつ多い。）と整数 t, $0 < t \leq r$ に対して

$$X_t = X \cap L_{r+2-t} \qquad (\dim L_{r+2-t} = n - t)$$

$$\mathcal{D}_t : L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{r-t} \subset \mathbb{P}_n$$

とおき，X_t の旗 $\mathcal{D}_t$ についての k-th polar locus を $P_k(\mathcal{D}_t)$ とかく。すると

$$P_k(\mathcal{D}_t) = P_k(\mathcal{D}_0) \cap L_{r+2-t}$$

<u>系4.4</u>　X_t で X と t 個の一般の超平面との交わりを示す。すると $0 \leq k \leq r-t$ に対して，X の k-th class は X_t の k-th class に等しい。

<u>命題4.5</u>

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \mathbb{P}_n \supset X & & Y \subset \mathbb{P}_n^\vee \end{tikzcd}$$

を X の双対多様体 Y の定義にあらわれた図式としよう。X と t 個の一般の超平面との交わりを $X_t \subset \mathbb{P}_{n-t}$ とする。すると X_t の双対多様体は $p\beta\alpha^{-1}X_t$ である。ここで $p : \mathbb{P}_n^\vee \longrightarrow \mathbb{P}_{n-t}^\vee$ は

$\mathbb{P}_{n-t} \subset \mathbb{P}_n$ からみちびかれた射影.

<u>注意</u> Wallace [10] のセクション 2.1 の冒頭の陳述は誤りである。

X の generic point $x \in X$ 及び $T_x \subset H$ となるような generic な hyperplane H に対して

$$\{x' \in U \mid T_{x'} \subset H\} = \{x' \in U \mid T_{x'} = T_x\}$$

を主張するが，直観的に言って強すぎる。$X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_5$ (Veronese 埋入) について，実際に計算してみれば，左辺は x を通る直線であり，右辺は一点 x であることがわかる.

私の主要定理の証明は当初上記の Wallace の主張に依存していた。その後上の反例を発見し，ここに記載したような Kleiman の Transversality Lemma のみに依存した証明を考えた.

§5 標数正の場合

標数正の場合には上記の双対定理は成立しないことが時々ある。定理2.5の証明中で正則写像βの臨界値の測度は0という標数0の世界でだけ有効な定理を用いているからである。ただし標数正の場合でもβが一般の点でsmoothなら我々の双対定理はすべて成立する。βが一般の点でsmoothという条件はβの定義のために用いた$\tilde{X}$の作り方に依存しない多様体Xからのみ定まる条件である。

$n=2$, $r=1$の場合に反例をのべよう。$\mathbb{P}_2$の斉次座標をx, y, z, $\mathbb{P}^\vee$のその双対座標をu, v, wとする。$p>0$で基礎体の標数を表わす。

<u>例5.1</u>　$X : f = x^p - yz^{p-1} = 0$

Xの双対多様体Yは$u=0$, Xの2回目の双対多様体は$\{y=z=0\}=\{(1,0,0)\}$で一点である。

Xについて　$\mu_0 = p$,　$\mu_1 = 2$　$(p(p-1))$

Yについて　$\nu_0 = 1$,　$\nu_1 = 0$

($\mu_1 = p(p-1)$とは定義をかえて$P_R(\mathcal{D})$に被約でないスキームの構造を入れた時の値)

μ_1は次のようにして計算する。

$L_1=\{(a:b:c)\}$とする。$P_1(\mathcal{D})$は次の方程式で定義されるスキームである。

$$\begin{cases} g = a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} + c\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\{bz^{p-1} + (p-1)c\,yz^{p-2}\} = 0 \\ \qquad f \qquad\qquad = x^p - yz^{p-1} \qquad = 0 \end{cases}$$

$k = \{-\frac{(p-1)c}{b}\}^{1/p}$とおくとこれの解は$p_1=(0:1:0)$と$p_2=(k^{p-1}:1:k^p)$だから$P_1(\mathcal{D})$に被約構造を与えるなら$\mu_1=2$。ところが一方$g_1=g(x,1,z)$ $f_1=f(x,1,z)$とおくと length $k[[x,z]]/(f_1,g_1) = p(p-2)$
$x'=x-k^{p-1}$, $z'=z-k^p$, $f_2=f(x'+k^{p-1}, 1, z'+k^p)$, $g_2=g(x'+k^{p-1}, 1, z'+k^p)$とおくと length $k[[x',z']]/(f_2,g_2)$ $=p$が容易にわかる。だから$P_1(\mathcal{D})$をスキームと考えるなら$\mu_1=p(p-2)+p=p(p-1)$

例5．2 (Wallace)

X：$f = yz^p + y^pz + x^{p+1} = 0$

$u=\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^p$, $v=\dfrac{\partial f}{\partial y}=z^p$, $w=\dfrac{\partial f}{\partial z}=y^p$とおくと

$yv+zw+xu=0$　　p乗して

$wv^p+v\cdot w^p+u^{p+1}=0$

これがYの方程式である。YはXと同型にな

っている．だからとくに X の2回目の双対は X にもどる．そして

$$\mu_0 = \deg f = p+1$$

$$\mu_1 = [\text{連立方程式 } yz^p + y^pz + x^{p+1} = 0,\ ax^p + bz^p + cy^p = 0 \text{ の根の数}]$$

$$= [\text{連立方程式 } yz^p + y^pz + x^{p+1} = 0,\ a'x + b'z + c'y = 0 \text{ の根の数}] = p+1$$

$(a' = a^{\frac{1}{p}},\ b' = b^{\frac{1}{p}},\ c' = c^{\frac{1}{p}})$ となり定理2.5がなりたつようにみえる．しかし $u = x^p,\ v = z^p,\ w = y^p$ であるから，β はすべての点で分岐している．実は定理1，2が成立していない．$\xi^{-1}c_1(\mathcal{D})$ が $\mathcal{D}$ をどのようにとっても被約にできないからである．$p \cdot [P_1(\mathcal{D})] = \pi_*\{c_1(P) \cap [\bar{X}]\}$ となっている．例5.1と同じように $P_1(\mathcal{D})$ をスキームとみればこんどは $\mu_1 = p(p+1)$ となり，定理2.5は成立しない．（定理1.2の証明の中で transversality condition ② をみたすようにできるのは標数0の時のみである．）

参考文献

[1] Fulton, William, Rational equivalence for singular varieties, Publ. Math. I.H.E.S. N°45, 1975, 147-167.

[2] Holme, Audun, On the dual of a smooth variety, in Algebraic Geometry, L.N.M. 732, Springer-Verlag, 1979, 144-156.

[3] Kleiman, Steven L., The transversality of general translate, Comp. Math., Vol. 38, 1974, 287-297.

[4] Kleiman, S. L., The enumerative theory of singularities, in Real and complex singularities, Sijthoff and Noordhoff, Oslo, 1976, 297-396.

[5] Lê Dũng Tráng and Teissier, Bernard, Variété polaires locale et classes de Chern des variété singulieres, (preprint)

[6] MacPherson, Robert, Chern classes for singular algebraic varieties, Annals of Maths. vol. 100, No. 2, 1974, 423-432.

[7] Piene, Ragni, Polar classes of singular varieties, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e série, t.11, 1978, 247-276.
[8] Urabe Tohsuke, Duality of numerical characters of polar loci, (preprint)
[9] Urabe T., Generalized Plücker formulae (preprint)
[10] Wallace, Andrew H., Tangency and duality over arbitrary fields, Proc. London Math. Soc., (3), Vol. 6, 1956, 321-342.