代数幾何学シンポジウム記録
1979年度　pp.152-167

Normal Gorenstein surfaces with ample ω^{-1}.

日高文夫(早大理工)　渡辺敬一(都立大)

§1

k を任意標数の代数閉体として、以下全て k 上で考える。

<u>Def.</u> 1.1. normal projective surface X が <u>Gorenstein surface</u> とは X の dualizing sheaf ω_X が invertible であるものをいう。

今、かりに X を normal な Gorenstein surface で $x \in X$ を X の唯一の singular point とする。$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ を (X, x) の minimal resolution, $\pi^{-1}(x) = A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ と既約分解しておくと

<u>Lemma</u> 1.2　$\tilde{X}$ の canonical divisor $K_{\tilde{X}}$ は

$$K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X) - \sum_{i=1}^{n} r_i A_i \quad , \quad ここで \quad r_i \geq 0 \quad (i=1,\cdots, n)$$

$\because$) $\quad 2p_a(A_i) - 2 = A_i(K_{\tilde{X}} + A_i) = -\sum_{j=1}^{n} r_j (A_i . A_j) + A_i^2$ より

A の intersection matrix を $\|(A_i . A_j)\|$ と書いて

$$\|(A_i . A_j)\| \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ A_i^2 - 2p_a(A_i) + 2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

ここで $A_i^2 - 2p_a(A_i) + 2 \leqq A_i^2 + 2 \leqq 1$ でこの両辺の等号は $A_i^2 = -1$, $p_a(A_i) = 0$ のときであるから、これは π が

minimal resolution であることより起り得ない。よって $\|(A_i \cdot A_j)\|$ が negative definite であることより $r_i \geqq 0$ //

A の fundamental cycle を $Z_0 := \min\{Z > 0 \mid Z \cdot A_i \leqq 0 \ i=1,\dots,n\}$ と定めると $\mathrm{Supp}\, Z_0 = A$ ([1]) である。以下 Z_0 を用いて fundamental cycle と ~~する~~ する。

ここで normal Gorenstein surface singularity について既知の結果をまとめておく。

Proposition 1.3 ([1],[4]) (X, x) を Gorenstein としたとき次は同値

(i) $\dim (R^1\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = 0$ (resp. $= 1$)

$\Updownarrow$

(ii) x は rational double point (resp. minimally elliptic singular point)

$\Updownarrow$

(iii) $K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X)$ (resp. $K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X) - Z_0$)

ここで minimally elliptic とは $A = \pi^{-1}(x)$ の proper subgraph が rational singularity の graph となるものである。とくに A が elliptic curve 1本のみから成るときには simple elliptic と呼ぶ [8]。

Remark) [4] $\dim(R^1\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \geqq 2$ のときは $K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X) - Z$ とかくと $Z \gneqq Z_0$ となる。

§ 2

X を normal Gorenstein surface で ω_X^{-1} が ample とする。X が non-singular のときは Del Pezzo surface と呼ばれるもので $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ をのぞいて全て $\mathbb{P}^2$ の blow up で得られ、その centre は 8 点以下で general position にある。この立場から以下、少々拡張を行う。

$\mathbb{P}^2$ 上の infinitely near も許した点の集合 $\Sigma=\{P_1, P_2\cdots\cdots P_r\}$ で $\#\Sigma = r \leqq 8$ なるものと考える。$\Sigma_j=\{P_1,\cdots P_j\}$ $(1\leqq j\leqq r)$ とし

$$V(\Sigma)=V(\Sigma_r)\longrightarrow V(\Sigma_{r-1})\longrightarrow\cdots\qquad\longrightarrow V(\Sigma_1)\longrightarrow\mathbb{P}^2$$

を $\mathbb{P}^2$ の Σ を centre とした blow up の列とする。また各 step での exceptional fibre を

$$\begin{array}{ccc} V(\Sigma_j) & \longrightarrow & V(\Sigma_{j-1}) \\ \cup & & \Psi \\ E_j & \longrightarrow & P_j \end{array}$$

とする。$r\leqq 8$ に注意として。

<u>Def</u> 3.1 [3] Σ が <u>almost general position</u> にあるとは

(i) Σ のどの 4 点も line 上にない。

(ii) Σ のどの 7 点も 2 次曲線上にない。

(iii) $\forall j$ $(1\leqq j\leqq r-1)$ に対し、E_i $(1\leqq i\leqq j)$ の $V(\Sigma_j)$ における proper transform $\hat{E}_i$ のうち $\hat{E}_i^{\,2}=-2$ となるものの上に P_{j+1} はない。

Remark) 上の定義はさらに次の様にいい換えることができる。

Σ: general position (resp. almost general position) にある
$\Updownarrow$
$\forall C \subset V(\Sigma)$ irreducible curve, $C^2 \geqq -1$ (resp. $\geqq -2$)

§ 3

以下 X を normal Gorenstein surface で ω_X^{-1} が ample なものとし、$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ を X の minimal resolution とする。
$d := (\omega_X . \omega_X)$ を X の <u>degree</u> と呼ぶ。ω_X^{-1} が ample であるから $d \geqq 1$.

我々の主要結果は次の theorems

<u>Theorem</u> 3.1 $\tilde{X}$ は ruled surface で $\dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ or 1.

<u>def</u>. $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0, 1$ のとき、それぞれ X を rational type, elliptic type と呼ぶ。

<u>Theorem</u> 3.2 X を elliptic type で degree d とすると non-singular elliptic curve C と C 上の invertible sheaf $\mathcal{L}$ で $\deg \mathcal{L} = d$ なるものが存在し、$\tilde{X} \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$ で π は $\tilde{X}$ 上の minimal section の contraction. とくに X は C 上の cone.

<u>Theorem</u> 3.3　X を rational type とすると

(i) X の singularity は高々 rational double.

(ii) $1 \leqq d \leqq 9$

(iii) $d = 9 \Rightarrow X \cong \mathbb{P}^2$　(i.e π : iso)

(iv) $d = 8 \Rightarrow$ a) $X \cong F_0$ $(= \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$,

b) $X \cong F_1$

c) $\tilde{X} \cong F_2$,　π は $\tilde{X}$ の minimal section の contraction,

$X \subset \mathbb{P}^3$ なる 2次の cone.

(v) $1 \leqq d \leqq 7 \Rightarrow$ $\mathbb{P}^2$ 上に almost general position にある点の組 $\Sigma = \{P_1, \dots, P_r\}$ があって, $\# \Sigma = 9-d$ で $\tilde{X} \cong V(\Sigma)$ π は $\tilde{X}$ 上の irreducible curve C で $C^2 = -2$ なるもの全ての contraction.

<u>proof</u> of 3.1)　$\tilde{X}$ が ruled なることは $h^0(mK_{\tilde{X}}) = 0$ $\forall m \geq 1$ を示せばよい。X は normal であるから $\mathcal{O}_X \cong \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$.

$\therefore H^0(\omega_X^m) \cong H^0(\pi^* \omega_X^m)$　$(m \in \mathbb{Z})$。もしも, $h^0(mK_{\tilde{X}}) \neq 0$ とすると　$0 \lneqq h^0(mK_{\tilde{X}}) \underset{(1.2)}{\leqq} h^0(mK_{\tilde{X}} + m\sum r_i A_i) = h^0(\pi^* \omega_X^m) = h^0(\omega_X^m)$

これは ω_X^{-1} が ample に反する。

$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ に関して次の2つの spectral sequence を考える.

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \pi_* \pi^* \omega_X) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}, \pi^* \omega_X)$$

これより

(1) $0 \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \longrightarrow H^0(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \longrightarrow \underset{\underset{0}{\parallel}}{H^2(\mathcal{O}_X)}$

(2) $0 \longrightarrow H^1(\omega_X) \longrightarrow H^1(\pi^*\omega_X) \longrightarrow H^0(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{R}}{\wr\wr}}{H^2(\omega_X)}$

ここで最後の項は Serre duality により，(2)の第3項は $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ が singular point のみに support をもつことからくる。$q = h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ とおいて

(イ) $\dim H^0(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0$ のとき

X の singularity は高々 rational double であるから $K_{\tilde{X}} = \pi^*\omega_X$. $\tilde{X}$ は relatively minimal model より n 回の blow up で得られたとすると（注：$\mathbb{P}^2$ のときは F_1 より n 回とかぞえる）

$0 < (\omega_X . \omega_X) = K_{\tilde{X}}^2 = 8 - 8q - n \qquad \therefore\ q = 0$

(ロ) $\dim H^0(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 1$ のとき

$\tilde{X}$ は ruled であるから $f: \tilde{X} \longrightarrow C$ を general fibre $\mathbb{P}^1$ で $g(C) = q$ なる fibre space とする。(1) より $g(C) = q \geqq 1$。X の singularity は唯一の minimally elliptic singular point x_0 と他は高々 rational double であるから Z_0 を $\pi^{-1}(x_0)$ の fundamental cycle とすれば $K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X) - Z_0$ とかける。

<u>Claim</u> Z_0 は irreducible reduced で f の section である。

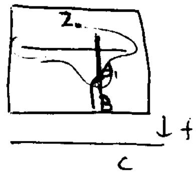
$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & X \\ C & \end{tikzcd}$$

<u>Lemma</u> 3.4　B を irreducible な f の fibre component とし $B.Z_0>0$ で $\pi(B)$ は一点につぶれないとすると $B^2=0$.

∵) $-2 = K_{\tilde{X}}B + B^2 = (\pi^*(\omega_X)-Z_0).B + B^2$

$\therefore\ B^2 = -2 + \pi^*(\omega_X^{-1}).B + Z_0B \geqq 0 \qquad \therefore\ B^2 = 0.$ //

Z_0 は f の fibre component を含まない。もしも含んだとすると $A_1\subset Z_0$ なる fibre component で同じ fibre の中にもう一つ B があって $A_1.B\neq 0$，かつ B は π により一点につぶれないものがあることになる。ところが (3.4) により $B^2=0$ これは矛盾。



また D を f の general fibre とすると

$-2 = KD + D^2 = (\pi^*(\omega_X) - Z_0).D$

$\therefore\ Z_0.D = 2 + \pi^*(\omega_X).D \leqq 1 \qquad \therefore\ Z_0.D = 1$

これで I の claim は示された。$g(Z_0)=1$ よりしたがって $q = g(C) = 1$

(ハ)　$\dim H^0(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \geqq 2$ のとき.

(ハ-甲)　$\dim(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x \geqq 2$ なる $x\in X$ が存在するとき。$x\in X$ が唯一の singular point であるときに矛盾を導けば充分である。§1 の Remark より Z_0 を $\pi^{-1}(x)$ の fundamental cycle とすると，$K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X) - Z$，$Z \neq Z_0$．$Z = Z_0 + D\ (D>0)$

と書いておくと．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D(-Z_0) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_{Z_0} \longrightarrow 0 \quad \text{より}$$

$$\therefore \quad H^1(\mathcal{O}_D(-Z_0)) \to H^1(\mathcal{O}_Z) \to H^1(\mathcal{O}_{Z_0}) \to 0.$$

また $\omega_D = D.(D+K_{\tilde{X}}) = D.(\pi^*(\omega_X) - Z_0) = -D.Z_0$

$\therefore \; H^1(\mathcal{O}_D(-Z_0))^* \cong H^0(\mathcal{O}_D) \neq 0 \quad \therefore \; h^1(\mathcal{O}_Z) > h^1(\mathcal{O}_{Z_0})$

(イ)の中の議論と同様に Z_0 は f の fibre に含まれてしまうことはないから $f(Z_0) = C$，また

$$(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = \sup_{E \subset \pi^{-1}(x)} H^1(\mathcal{O}_E) \quad \text{より}$$

$$g = h^1(\mathcal{O}_C) \leqq h^1(\mathcal{O}_{Z_0}) < h^1(\mathcal{O}_Z) \leqq \dim(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x$$

一方 (1) より $g \geqq \dim(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x$ であるから矛盾。

(ハ-2) rational double point 以外の X の singular point x_i が全て $\dim(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_{x_i} = 1$ のとき $(i = 1, 2, \cdots m)$

Z_0^i を $\pi^{-1}(x_i)$ の fundamental cycle としたとき

$K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X) - \sum_{i=1}^{m} Z_0^i$ とかける $(m \geqq 2)$。f の general fibre を D とすると，Z_0^i が f の fibre component ではないことから

$$-2 = DK_{\tilde{X}} = D\pi^*(\omega_X) - \sum_{i=1}^{m} D.Z_0^i \leqq -1-m \quad \text{これは矛盾}.$$

証明終り

<u>Cor</u> 3.5　$H^i(X, \mathcal{O}_X)=0$　$i=1,2$

∵) p.6 の (1) から出る。

Remark) $ch(k)=0$ のときには Kodaira vanishing [6] を使って $h^1(\mathcal{O}_X)=h^1(\omega_X)=0$ よって (1) より $q=\dim H^1(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})$。また (2) より $h^1(\pi^*\omega_X)=0$ であるから $0\longrightarrow H^0(R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})\longrightarrow H^2(\omega_X)\cong k$ よって $q=0$ or 1 を得る。

<u>proof</u> of 3.2) (3.1) の証明の

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow f & & \\ C & & \end{array}$$

の記号を使う。Z_0 は irreducible reduced で f の section であった。
Z_0 の任意の点に対し、その点を通る f の fibre component B は (3.4) により $B^2=0$ であるから $\tilde{X}$ は minimal ruled surface である。したがって C 上の rank 2 の vector bundle $\mathcal{E}$ が存在して $\tilde{X}\cong\mathbb{P}(\mathcal{E})$。
もし $\mathcal{E}$ が indecomposable なら $\tilde{X}$ 上の minimal section の self intersection number は 0 か 1。よって $\mathcal{E}\cong\mathcal{O}_C\oplus\mathcal{L}$ と分解される。ここで $\deg\mathcal{L}>0$ととれるから

$$d=(\omega_X.\omega_X)=(K_{\tilde{X}}+Z_0)^2=2K_{\tilde{X}}.Z_0+Z_0^2=-Z_0^2$$ より

$\therefore \deg \mathcal{L} = d$

逆に，non-singular elliptic curve C 上の invertible sheaf $\mathcal{L}$ で $\deg \mathcal{L} = d > 0$ なものが与えられたとき $\tilde{X} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})$ 上の minimal section を Σ，Σ に対する infinite section を D とおくと $K_{\tilde{X}} = -\Sigma - D$ とかける。また $|mD|$ $(m \gg 0)$ は Σ の contraction $\Phi_{|mD|} : \tilde{X} \longrightarrow X$ を与へる。この X が求めるものである。 <u>証明終り</u>

<u>proof</u> of 3.3) X は rational type であるから (3.1) の証明の (1) より，X の singularity は高々 rational double. また $K_{\tilde{X}} = \pi^*(\omega_X)$ である。よって ω_X^{-1} が ample であることから π は $|-mK_{\tilde{X}}|$ $(m \gg 0)$ によって定まっている。

<u>Lemma</u> 3.6 D を $\tilde{X}$ 上の irreducible curve として

(i) $K_{\tilde{X}}^2 > 0$

(ii) $D.K_{\tilde{X}} \leq 0$ さらに $D.K_{\tilde{X}} = 0 \Longleftrightarrow \pi(D)$ is point.

(iii) $D^2 \geq -2$ さらに $D^2 = -2 \Longrightarrow D \cong \mathbb{P}^1$ で $\pi(D)$ は point

(iv) $D^2 = -1 \Longrightarrow D \cong \mathbb{P}^1$; $DK = -1$

∵) $K^2=(\pi^*(\omega_X))^2$ より (i) は明らか。ω_X^{-1} is ample より (ii) も自明。$D.K+D^2\geqq -2$ より $D^2\geqq -2$。また $D^2=-2$ とすると $DK\geqq 0$ で (ii) より $DK=0$ よって $D\cong\mathbb{P}^1$。$D^2=-1$ とすると $2p(D)-2=DK-1$ より

$2p(D)=DK+1\leqq 1$ 　∴ $p(D)=0$ //

<u>Cor</u> 3.7 　$\tilde{X}$ の relatively minimal model は F_2, $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ のいづれかである。

∵) (3.6) の (iii) より明らか。

(3.3)の証明を続ける。

$\tilde{X}$ は rational ruled surface であるから $\mathrm{rank}(\mathrm{Pic}\,\tilde{X})+K_{\tilde{X}}^2=10$ よって $1\leqq d\leqq 9$。(iii) (iv) は (3.7) をみればよい。$1\leqq d\leqq 7$ とすると $\tilde{X}$ は relatively minimal model として $\mathbb{P}^2$ をとることができる。そこで $\mathbb{P}^2$ 上の centre を $\Sigma=\{P_1,\cdots,P_r\}$ とし $\tilde{X}=V(\Sigma)$ とすると $\#\Sigma=r=9-d$ で (3.6) の (iii) より Σ は almost general position にある。

逆に、$\mathbb{P}^2$ 上の almost general position にある点の組 Σ で $\#\Sigma\leqq 8$ なるものから X を構成出来ることは Demazure [3] による。

<u>証明終り</u>

§4.

このsectionでは主要結果をまとめておく。

前と同様に X を normal Gorenstein surface で ω_X^{-1} ample とし、$(\omega_X . \omega_X) = d$ とおく。ω_X^{-m} による embedding については

Theorem 4.1

(i) $d \geqq 3 \Rightarrow \omega_X^{-1}$ is very ample で $X \subset \mathbb{P}^d$ (deg d)

を与える。

(ii) $d = 2 \Rightarrow \omega_X^{-2}$ is very ample で $X \underset{|\omega_X^{-2}|}{\subset} \mathbb{P}^6$ (deg 8).

(iii) $d = 1 \Rightarrow \omega_X^{-3}$ is very ample で $X \underset{|\omega_X^{-3}|}{\subset} \mathbb{P}^6$ (deg 9)

さらに詳しく

Theorem 4.2

(i) $d = 1 \Rightarrow X \subset \mathbb{P}(1.1.2.3)$ deg 6 の weighted hypersurface

(ii) $d = 2 \Rightarrow X \subset \mathbb{P}(1.1.1.2)$ deg 4 の weighted hypersurface

また ω_X^{-1} is base point free で

$\Phi_{|\omega_X^{-1}|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$: double covering で ramification は multiple component をもたない4次曲線.

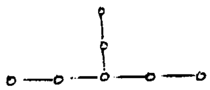
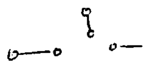
(iii) $d=3 \Rightarrow X \subset \mathbb{P}^3$ cubic hypersurface

(iv) $d=4 \Rightarrow X \subset \mathbb{P}^4$ (2,2)型 complete intersection.

また X の singularity の状況は $d=1,2$ 以外は完全に記述される。(cf [2] [5] [7])

Theorem 4.3 X を rational type で degree d とする。X の singularity は $3 \leqq d \leqq 5$ のときには下表の任意の proper subgraph に、$6 \leqq d \leqq 8$ のときには任意の subgraph に対応した rational double points をもつ。

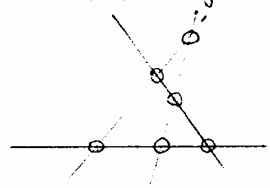
d	3	4	5	6	7	8	9
	$\tilde{E}_6$	$\tilde{D}_5$	$\tilde{A}_4$	$A_1 \times A_2$	A_1	A_1	ϕ

Remark) $d=3$ のとき $\tilde{E}_6$:  を simple elliptic singularity に対応させて考える。任意の proper subgraph とは例えば E_6 :  $A_2 \times A_2 \times A_2$:  等という意味である。

$d=1,2$ のときにはそれぞれ $\tilde{E}_8$, $\tilde{E}_7$ の connected proper subgraph に対応する rational double point はたしかに構成することができる。[8] しかしながら、

proper subgraph では書けない状況が起り得る。

Example) $d=2$ とすると $X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 4次曲線を ramification とする double covering であった。そこで 4本の general position にある line を考えると



対応する X には 6コの A_1 type の rational double pts があることがわかるのだが、$6(A_1)$ は $\tilde{E}_7$

の subgraph としては書けない。

ちなみに、elliptic type の X は 1点で交わる 4本の line を ramification divisor としてもつ。

Remark) $d=2$ のときの singularity は multiple component をもたない 4次曲線の分類に対応する。これについては近刊の [9] p.37 にある 4次曲線の表に、irreducible でないものを付け加えると完成する。

[追記] 城崎での講演の後、宮西正宜先生に Demazure の文献 [3] を、また小田忠雄先生に M. Reid の "Canonical 3-fold" の中に、この稿の主題と関連した記述のある事を教えて頂きました。この場をかりて感謝の意を表します。

References

[1] M. Artin, "On isolated rational singularities of surfaces"
Am. J. Math, 88 (1966) p.129 – 136.

[2] J.W. Bruce – C.T.C. Wall "On the classification of cubic surfaces"
J London Math. Soc (2) 19 (1979) p. 245 – 256

[3] M. Demazure "Surfaces de Del Pezzo"
(Seminaire sur les singularités des surfaces)
École Polytechnique (1976)

[4] H. Laufer "On minimally elliptic singularities"
Am. J. Math 99-6 (1977) p 1257 – 1295

[5] E. Looijenga "On the semi-universal deformation of a simple elliptic hypersurface singularity"
Topology 17 (1978) p.23 – 40

[6] D. Mumford "Pathologies III"
Am. J Math 89 (1967) p 94 – 104

[7] H.C. Pinkham "Simple elliptic singularities, Del Pezzo surfaces and cremona transformations"
Proc. of Symp. in Pure Math (AMS) Vol 30. (1977) p. 69 – 71

[8] K. Saito "Einfach elliptische Singularitäten"
Invent. Math 23 (1974) p. 289 - 325.

[9] 飯高 - 上野 - 浪川 "デカルトの精神と代数幾何"
数学セミナー増刊 入門現代の数学 [6] (1980)