代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.9-31

城崎 1979年11月

小平の消滅定理とYauの不等式の正標数における反例について

名大理 向井 茂

Xは標数 $p\geq 0$ の閉体の上の非特異な完備代数多様体、Kをその標準因子類とする。$p=0$ の時次の事実が知られている。

<u>小平の消滅定理(K.V.)</u> 直線束Lが豊富なら全ての $0\leq i<\dim X$ に対して $H^i(X,L^{-1})=0$。

<u>Yauの不等式([6])</u> Kが豊富ならChern数の間の不等式 $c_2.K^{n-2}\geq \frac{n}{2(n+1)}K^n$ が成り立つ。

Xが曲面の時、各々は次の様に精密化される。

<u>Ramanujamの消滅定理</u> 直線束Lが数値的に正ならば $H^1(X,L^{-1})=0$。

<u>宮岡の不等式</u> Xが一般型なら $c_2\geq\frac{1}{3}K^2$。

さて、$p>0$ の時にこれらの事実が成立するかどうかが問題になるが、Raynaudによって反例が与えられている。即ち、

(a) Xの上でK.V.は成立しない。

(b)　$c_2 < 0$。

を満す非特異曲面 X を Raynaud は構成した。その曲面は他に次の性質をもつ。

(c)　全ての fibres が特異点をもつ fibration $f: X \longrightarrow C$ が存在する。

(d)　$p \geq 5$ なら X は一般型。$p = 2, 3$ の時 $\kappa(X) = 1$ で準楕円的，上の f がその準楕円 fibration。

ここでは Raynaud の方法を一般化することによって高次元の場合でも病的な多様体がつくれることを示す。また，K.V. の成立しない曲面のもついくつかの性質について注意したい。主な結果を述べると，

定理 1.　$n \geq 2$ と素数 $p > 0$ が与えられた時，次の条件を満す標数 p の n 次元非特異多様体 X とその上の直線束 L とが存在する。

(a)　L は豊富だが $H^1(X, L^{-1}) \neq 0$ 。

(b)　K は豊富だが $c_2.K^{n-2}, c_3.K^{n-3}, \ldots, c_n$ は全て負。

(c)　X の純非分離被覆である非特異曲線 C

上の $(\mathbb{P}^1)^{n-1}$ 束と同型なものが存在する。Xの位相的 Euler 標数 $e(X)$ は $2^n(1-g(C))$ に等しい。

なお，$p=2,3$ の時は (b) を次の (b') でおきかえたものも構成できる。

(b') 準楕円的 fibration $f: X \longrightarrow Y$ が存在し，KはY上の豊富な因子の引き戻しになっている。

Kが豊富だという性質は一般化について閉じている。また Chern 数も一般化によって変化しない。よって Yau の不等式と定理1.の(b)より次の事がわかる。

<u>系</u>　定理の多様体は標数0に持ち上げられない。

<u>問題</u>　非特異多様体 X が標数0に持ち上げられるなら X の上で K.V. が成立するか？

非特異偏極多様体 (X, L) が標数0に持ち上げられるなら $H^i(X, L^{-1})=0$ $(0 \leq i < \dim X)$ が成立するか？

<u>定理 2.</u> X を K.V. の成立しない(非特異)曲面とする。このとき次の事が成り立つ。

1) X は一般型か $\kappa(X)=1$ の準楕円曲面($p=2,3$ のときのみ)である。

2) X を何回か blow up した曲面 X' から曲線 C への射 $f: X' \longrightarrow C$ があって、f の fibre は全て連結かつ特異点をもつ。詳しく言うと、fibre F の余接層 Ω_F は常に torsion をもつ。

以下標数 p は常に正。また K.V. は H^1 の消滅のみを問題とする。

§1 丹後の定理について

正標数の場合の著しい点は Frobenius 射或は Frobenius map の存在であろう。L を直線束とするとき、1-cocycle $\{a_{ij}\}$ に $\{a_{ij}{}^p\}$ を対応させることによって

$$F^* : H^1(X, L) \longrightarrow H^1(X, L^{\otimes p})$$

がえられる。多様体 X が正規で $\dim X \geqq 2$ の時は

(Enriques-Severi-Zariski の補題)　L が豊富で m が十分大きければ　$H^1(X, L^{-m}) = 0$ 。

が成立する。よって、Frobenius map の列 $H^1($ $\longrightarrow H^1(L^{-p}) \longrightarrow H^1(L^{-p^2}) \longrightarrow \cdots$ を考えれば、X の上で (H^1 に関する) K.V. が成立することは

(*)「X の上の任意の豊富な直線束 L に対し $F^*: H^1(X, L^{-1}) \longrightarrow H^1(X, L^{-p})$ は単射である。」

と同値であることがわかる。(*) は $\dim X = 1$ の時も意味があるが、これに関しては次の定理が基本的である。

<u>定理([4])</u>　D は非特異曲線 X の上の因子で $D \geq 0$ とする。このとき、

$$\mathrm{Ker}\left[F^*: H^1(X, \mathcal{O}_X(-D)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(-pD))\right]$$

$$\cong \{ df \mid f \text{ は } X \text{ の上の有理函数で } (df) \geq pD \} 。$$

この定理より $\dim X = 1$ の時 (*) が正しくない事は例えば次の例よりわかる。

<u>例([3])</u>　$P(Y)$ を次数 e の多項式とする。

affine平面 $\mathbb{A}^2$ の中の曲線 $P(Y^p)-Y=Z^{pe-1}$ の $\mathbb{P}^2$ の中での閉包を C とする。C は無限遠に1点 ∞ をもつ次数 pe の非特異曲線であることが確かめられる。さて微分 dY と dZ との間には $-dY=-Z^{pe-2}dZ$ なる関係がある。これは Ω_C が $C\cap\mathbb{A}^2$ の上では dZ で生成されていることを示している。よって dZ は $C\cap\mathbb{A}^2$ では零点も極も持たない。Ω_C の次数は $2g(C)-2=pe(pe-3)$ であるから $(dZ)=pe(pe-3)(\infty)$。よって $D=e(pe-3)(\infty)$ とすれば上の定理より、$F^*:H^1(\mathcal{O}_X(-D))\to H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ は単射でない。

この例の様に $g(C)\geq 2$ で次の互いに同値な条件

(a) ある直線束 L が存在して $L^{\otimes p}\cong\Omega_C$ かつ $F^*:H^1(L^{-1})\to H^1(L^{-p})$ は単射でない。

(b) ある有理函数 f で $df\neq 0$ かつ (df) は因子として p で割り切れる即ち $(df)=pD$ となるものが存在する。

を満たす曲線 C を Tango-Raynaud 曲線と言う。

H^1 の Frobenius 写像を調べるために、上の丹後の定理が高次元の場合にも拡張できることをみよう。D を多様体 X の (Cartier) 因子、Q は X の有理函数体とする。$\mathcal{O}_X(-D)$ は Q (を X 上の層とみなしたもの) の部分層である。各元を p 乗する写像 $\mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X(-pD)$ の余核を $B_X(-D)$ で表わす。完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X(-pD) \to B_X(-D) \to 0$$

より長完全列

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X(-D)) \xrightarrow{F^*} H^0(\mathcal{O}_X(-pD)) \to H^0(B_X(-D))$$
$$\to H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \xrightarrow{F^*} H^1(\mathcal{O}_X(-pD)) \to \cdots\cdots$$

を得る。よって

<u>命題 1</u>. $F^*: H^0(\mathcal{O}_X(-D)) \to H^0(\mathcal{O}_X(-pD))$ が全射。例えば $D=0$ 或は $H^0(\mathcal{O}_X(-pD))=0$、であるならば

$$\mathrm{Ker}[F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \to H^1(\mathcal{O}_X(-pD))] \cong H^0(B_X(-D)).$$

<u>命題 2</u>. X が正規な時は

$H^0(B_X(-D)) \cong \{ f \in Q/Q^p \mid$ X の各点の近傍で f はある $\mathcal{O}_X(-pD)$ の (local) section と mod Q^p で合同$\}$.

<u>証明</u> $Q^p \cap \mathcal{O}_X(-pD) = \mathcal{O}_X(-D)^p$ であるから

$$B_X(-D) \cong \mathcal{O}_X(-pD) / Q^p \cap \mathcal{O}_X(-pD)$$

$$\cong \mathcal{O}_X(-pD) + Q^p/Q^p 。$$ 証明終。

X が正規な時、 $0 \to \mathcal{O}_X(-D) \xrightarrow{\text{p乗}} \mathcal{O}_X(-pD) \xrightarrow{d} \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-pD)$ は完全列である。よって、$B_X(-D)$ は $\Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-pD)$ の部分層とみなせる。よって

<u>命題 3.</u> X は正規とする。$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(pD), \Omega_X) = 0$ なら $H^0(B_X(-D)) = 0$ よって $F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \to H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ は単射である。

さらに X が非特異な時は、Ω_Q の中で $B_X(-D) = dQ \cap \Omega_X(-pD)$ となっていることがわかる。よって

<u>命題 4.</u> X は非特異とする。そのとき、

$$H^0(B_X(-D)) \cong \{df \mid f \in Q, df \in \Omega_X(-pD)\}$$
$$\overset{\text{Notation}}{=} \{df \mid f \in Q, (df) \geq pD\} 。$$

これと命題1を合せたものが丹後の定理の一般化になっている。

(X, D, η) と書いた時、X は多様体（被約なスキームで十分）、D は Cartier 因子、η は $H^0(B_X(-D))$ の元を表わしているものとする。§2では (X, D, η) から新しい3つ組 $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ が作れることを示すが、その準備として先づ致る所で分岐する X の被覆 $\tau : G = G(X, D, \eta) \longrightarrow X$ が構成できることを示す。D は開被覆 $\{U_i\}$ に対して局所方程式の系 $\{g_i\}$ で与えられているとする。また $\eta = \{b_i\}$ $b_i = g_i^p c_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X(-pD))$ $b_j - b_i = a_{ij}{}^p \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X(-D)^p)$ となっているとしてよい。$\{a_{ij}\}$ の類 $\alpha \in H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(-D))$ の決める拡大を

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

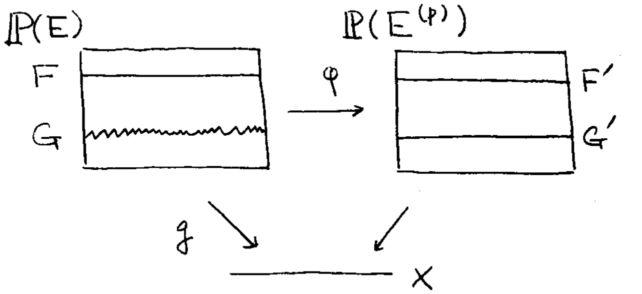
とする。E は $GL(\mathcal{O}_X)$ に値をとる 1-cocycle $\left\{\begin{pmatrix} g_i g_j^{-1} & 0 \\ a_{ij} g_j^{-1} & 1 \end{pmatrix}\right\}$ できまる階数2のベクトル束である。E を Frobenius 射で引き戻したベクトル束 $E^{(p)}$ は 1-cocycle $\left\{\begin{pmatrix} g_i^p g_j^{-p} & 0 \\ a_{ij}{}^p g_j^{-p} & 1 \end{pmatrix}\right\}$ できまる。

$$(c_i \ \ 1)\begin{pmatrix} g_i^p g_j^{-p} & 0 \\ a_{ij}{}^p g_j^{-p} & 1 \end{pmatrix} = (c_j \ \ 1)$$

という関係より $\{(c_i \ \ 1)\}$ は完全列

$$(***)\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-pD) \longrightarrow E^{(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

の splitting $\mathcal{O}_X \to E^{(p)}$ を与えている。以上を $\mathbb{P}^1$束の言葉になおす。一般に X 上のベクトル束 E が与えられた時、fibre方向の座標を p乗することによって $\mathbb{P}(E)$ から $\mathbb{P}(E^{(p)})$ への X 上の射が定義できる。それを φ で表わす。η は先づ $\mathbb{P}(E)$



と $(**)$ に対応する $\mathbb{P}(E)$ の section F を決める。そして $(***$ の splitting を決めることは $\mathbb{P}(E^{(p)})$ の $F'=\varphi(F)$ と交わらないもう1つの section G' を決めることに他ならない。(逆も正しい。即ち、$\mathbb{P}(E)$, F, G' より η が modulo 定数倍で決まる。)

<u>定義 1.</u> G' の φ によるスキーム論的逆像を $G = G(X, D, \eta)$ で表わす。射影 $g: \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ の G への制限を $\tau: G \longrightarrow X$ でもって表わす.

容易にわかるように τ は致る所で分岐する flat な次数 p の被覆(=有限射)である．また X が正規で $\eta \neq 0$ の時 G は多様体になるが、その時の体の拡大は純非分離的である。G がいつ非特異になるかであるが、先の様に $\eta = \{b_i\}$, $b_i = g_i^p c_i$ と書けている時 X の閉集合 $\Omega(\eta)$ を $\Omega(\eta) \cap U_i = \{x \in U_i \mid dc_i$ は $\Omega_X \otimes k(x)$ の中で零$\}$ でもって定義する。X が非特異の時 Ω_X は局所自由であるから $x \notin \Omega(\eta)$ は $d\eta \in H^0(\Omega_X(-pD))$ を掛ける準同型 $\mathcal{O}_X(-pD) \xrightarrow{\times d\eta} \Omega_X$ の余核が x で自由であることと同値である。特に、$\Omega(\eta) = \phi$ は余核が局所自由であることと同値であるが、そのことを $(d\eta) = pD$ でもって表わす。

<u>命題 5.</u> G が非特異 $\Leftrightarrow$ X が非特異かつ $(d\eta) = pD$。この同値な条件が満たされるとき

$$0 \to \tau^* \mathcal{O}_X(pD) \xrightarrow{\times d\eta} \tau^* \Omega_X \to \Omega_G \to \Omega_{G/X} \to 0$$

は完全列で $\Omega_{G/X} \cong \tau^* \mathcal{O}_X(D)$。また、このことより G の位相的 Euler 標数 $e(G)$ は $e(X)$ に等しい。

例えば X が Tango−Raynaud 曲線なら G は非特異。実際、G は X と同型で $\tau : G \longrightarrow X$ は X の Frobenius 射に他ならない。

§2 反例の構成

$D = kD'$, k は p と素な自然数、となっているとき 3つ組 (X, D, η) から 1つ次元の高い $\tilde{X}$ をもつ 3つ組 $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ と射 $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ が構成できることを示す。

$k=1$ の時は $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta}) = (\mathbb{P}(E), g^{-1}D, g^{-1}\eta)$, $f=g$ なので以下 $k \geqq 2$ とする。また簡単の為 X は正規多様体で $\eta \neq 0$ と仮定する。

$G = G(X, D, \eta)$ の定義より、$\mathbb{P}(E)$ の因子とみたとき G は $pF - p \cdot g^{-1}D$ と線型同値である。$(R) = G - pF + p \cdot g^{-1}D$ となる $\mathbb{P}(E)$ の(標準的な)有理函数を R とする。

<u>定義 2.</u> (1) $\tilde{X}$ は $\mathbb{P}(E)$ の有理函数体に $R^{\frac{1}{k}}$ を付加した体における $\mathbb{P}(E)$ の正規化。$\pi : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}(E)$ を自然な被覆としたとき、$f = g \circ \pi$。なお、

G, F を $\pi^{-1}G$, $\pi^{-1}F$ と同一視して $\tilde{X}$ の因子とみなす。

(2) $\tilde{D} = (k-1)F + f^{-1}D'$.

(3) $\tilde{\eta}$ は $R^{1/k}$ の modulo "有理函数"^{p} の類（命題2を参照).

<u>定理 3</u>. (1) $\tilde{\eta} \in H^0(B_{\tilde{X}}(-\tilde{D}))$ 即ち、$(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ は我々の意味で3つ組になっている。

(2) $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ は flat な射。その各 fibre は G との交点以外では非特異な有理曲線。G との交点では $T^k = S^p$ という型の cusp である。

(3) $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ から作った致る所で分岐する被覆を $\tilde{\tau} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{X}$ とする。このとき射 $f_G : \tilde{G} \longrightarrow G$ が存在して

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "f_G"] \arrow[d, "\tilde{\tau}"'] & G \arrow[d, "\tau"] \\ \tilde{X} \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

i) 左の図式は可換。

ii) $\tilde{X}$ から G を除いた所で左の図式は cartesian。特に $\tilde{G} \longrightarrow G \times_X \tilde{X}$ は双有理射。

iii) $\tilde{G}$ は G 上の $\mathbb{P}^1$-束と同型。f_G はその自然な射影。X 上の直線束 $\mathcal{O}_X(D')$ に無限遠

section を付け加えてできる $\mathbb{P}^1$ 束を $V = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(D'))$ とするとき，$\tilde{G} \cong G \times_X V$。

(4) $\Omega_{\tilde{X}/X}$ はその torsion 部分 ($\neq 0$) と直線束の直和に同型。実際

$$\Omega_{\tilde{X}/X} \cong (\mathcal{O}_{(k-1)G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(pD')) \oplus (\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(k+1)F) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D))$$

(X, D, η) のいくつかの性質が $(\tilde{X}, \tilde{D}, \tilde{\eta})$ に伝わる。

命題 6. (1) ($k \geq 2$ で) D が豊富ならば $\tilde{D}$ も豊富。

(2) X が非特異で $(d\eta) = pD$ ならば $\tilde{X}$ も非特異で $(d\tilde{\eta}) = p\tilde{D}$。このとき $e(\tilde{X})$ は $2e(X)$ に等しい。

証明 (1) は F が"ほとんど"豊富，即ち，m が十分大きければ $|mF|$ が G 以外の所では双正則な射を定義することからわかる。$\tilde{G}$ は G 上の $\mathbb{P}^1$ 束であるから，G が非特異 $\Leftrightarrow$ $\tilde{G}$ が非特異。また $e(\tilde{G}) = e(\mathbb{P}^1)e(G) = 2e(G)$。よって (2) は命題 5

より従う。 証明終。

さて、n次元の小平消滅定理の反例(X_n, D_n, η_n)を構成しよう。

<u>定義 3.</u> (X_1, D_1, η_1) は Tango-Raynaud 曲線 X_1 と $(d\eta_1) = pD_1$ を満たす η_1, D_1 からなる3つ組。D_1 は e_1 で割り切れる、即ち $D_1 = e_1 D_1''$ と仮定する。$(X_{n-1}, D_{n-1}, \eta_{n-1})$, $D_{n-1} = e_{n-1} D_{n-1}''$ まで定義されたとする。e_{n-1} が p巾ならば (X_n, D_n, η_n) は定義しない。e_{n-1} が p巾でないときはその約数 k_{n-1} で pと素なものをとってくる。X_{n-1}の上の$\mathbb{P}^1$束 $\mathbb{P}(E_{n-1})$ の k_{n-1}重被覆をとることによって$(X_{n-1}, D_{n-1}, \eta_{n-1})$から構成した新しい3つ組を$(X_n, D_n, \eta_n) = (\tilde{X}_{n-1}, \tilde{D}_{n-1}, \tilde{\eta}_{n-1})$ とする。$f_{n-1} : X_n \to X_{n-1}$ は自然な射 $\tilde{X}_{n-1} \longrightarrow X_{n-1}$ とする。また
$e_n = G.C.D.\left(k_{n-1} - 1, \frac{e_{n-1}}{k_{n-1}}\right)$ とする。定義より
$D_n = (k_{n-1} - 1)F_{n-1} + f_{n-1}^{-1} D_{n-1}'$, $D_{n-1}' = \frac{e_{n-1}}{k_{n-1}} D_{n-1}''$ であるから D_n は e_n で割り切れる。

(X_n, D_n, η_n) が定義されたとする。命題6より D_n は豊富，X_n は非特異，$(d\eta_n) \geq pD$。よって命題1，4より $H^1(\Theta_{X_n}(-D_n)) \neq 0$。即ち，$X_n$ の上で K. V. は成立しない。

(X_1, D_1, η_1) を固定した時，(X_2, D_2, η_2) の構成は必ず有限回の所で止まってしまうが，n を与えた時 e_1 が $e(n)$ で割れれば (X_n, D_n, η_n) まで定義できるような自然数 $e(n)$ が存在する。一方 §1 の例でみたように勝手な数 e で D_1 が割り切れるような Tango Raynaud 曲線が存在する。よって定理1の (a) までが証明できた。(c) は定理3の (3) と命題6の (2) より明らかであろう。(b), (b′) は次の命題より従う。

<u>命題 7.</u> X_n の標準因子類を K_n とする。

(1) $K_n \equiv (pk_{n-1} - p - k_{n-1} - 1)F_{n-1} + f_{n-1}^{-1}(K_{n-1} - (pk_{n-1} - p - k_{n-1})D_{n-1}')$

(2) K_n が豊富 $\Leftrightarrow$ $\{p, k_{n-1}\} \neq \{2, 3\}$

(3) $\{p, k_{n-1}\} = \{2, 3\}$ の時 $f_{n-1} : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ は準楕円的 fibration で K_n は X_{n-1} 上の豊富な因子

$K_{n-1}-D_{n-1}'$ と線型同値である。

<u>命題 8.</u> X_n の Chern 類を $c_1,\cdots,c_n$ とする。$i_1,\cdots,i_n$ は負でない整数で $\sum_{\nu=1}^{n}\nu i_\nu=n$ とする。

$$(c_1^{i_1}\cdots c_n^{i_n})/\deg D_1=\sum_{j_{n-1},\cdots,j_1\leqq 1}\text{const.}\,k_{n-1}^{j_{n-1}}\cdots k_1^{j_1}$$

また、$k_{n-1}\cdots k_1$ の係数は $(1-p)^{i_1+\cdots+i_n}(1+\frac{i_1}{p-1}-i_2-\cdots-i_n)$ に等しい。

命題より、$i\geqq 2$ の時 $(c_i.K^{n-i})/\deg D_1$ の $k_{n-1}\cdots k_1$ の係数は $-(n-i)(p-1)^{n-i}$。よって $n>i$ の時は $k_{n-1},\cdots,k_1$ を十分大きくとれば $(c_i.K^{n-i})$ は負になる。$n=i$ の時は $\deg c_n=e(X_n)$ だから既に示した定理1の(c)より $\deg c_n$ は常に負。

<u>(X_2,D_2,η_2) の性質</u> Tango Raynaud 曲線から $k=k_1$ 重被覆で構成した曲面 $(X,D,\eta)=(X_2,D_2,\eta_2)$ の性質について少し述べる。$(d\eta)=pD$ であるから既にみたように $d\eta$ を掛ける準同型の余核は直線束。よって完全列

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_X(pD)\xrightarrow{\times d\eta}\Omega_X\longrightarrow \mathcal{O}_X(K-pD)\longrightarrow 0$$

をえる。

(1) $\mathcal{O}_X(K-pD)^{-p}$ は effective。一方 $\mathcal{O}_X(pD)$ は豊富であったからベクトル束 Ω_X は(Bogomolov の意味でも竹本の意味でも) instable。

(2) $k=p-1$ の時は $\mathcal{O}_X(K-pD)^{-1}$ が effective。即ち、$H^0(\mathcal{O}_X(K-pD)^{-1})\neq 0$。接束 $T_X=\Omega_X^\vee$ は $\mathcal{O}_X(K-pD)^{-1}$ を含むから $H^0(T_X)\neq 0$。一方、一般型にせよ準楕円的にしろ X に代数群(次元 $\geqq 1$)は作用しえない。よって群スキーム $\mathrm{Aut}\,X$ は被約でない。

(3) $\{p,k\}\neq\{2,3\}$ の時 K は豊富であるが、K に対しては K.V. が成立している。即ち、$H^1(K^{-1})=0$。

$H^1(K^{-1})$ の消滅は X の pluricanonical map を考える時に重要であるが、(3) に関連して次の問題が考えられる。

<u>問題</u>　標準直線束 K が豊富な非特異多様体(あるいは、一般型曲面) X に対して $H^1(X,K^{-1})=0$ が成立するか？

§3 K.V. の成立しない曲面について

X を K.V. の成立しない（非特異）曲面として，定理2を証明する。先づ (2) から証明しよう。命題1と4より $(dh) \geqq pD$ となる有理函数 h と豊富な因子 D が存在する。h は X から $\mathbb{P}^1$ への有理写像を与える。よって X を blow up して Stein分解をすることにより各 fibre が連結な射 $f: X' \longrightarrow C$ がえられる。L を $\mathcal{O}_{X'}(pD) \xrightarrow{\times dh} \Omega_{X'}$ の像とするとき、$\Omega_{X'/C} = \Omega_{X'} / f^*\Omega_C$ は $T = L / L \cap f^*\Omega_C$ を含む。Ω_C は dh をそのある空でない開集合での section として含むから $L \cap f^*\Omega_C \neq 0$。よって T は torsion 層である。$\mathrm{Supp}(A) = \mathrm{Supp}(T)$ となる因子 A があって線型同値

$$A \equiv c_1(L) - c_1(L \cap f^*\Omega_C)$$

が成り立つ。$c_1(L) = pD$ は X' の準豊富な因子で $c_1(L \cap f^*\Omega_C) \leqq f^*K_C$ であるから A は fibre 以外の成分を含む。それを G とする。B を f の fibre とするとき $\Omega_B \cong \Omega_{X'}|_B$ であるから Ω_B は B と G の交点で torsion をもつ。特にその点で B は特異である。

(1) は $K(X) \leqslant 1$ なら $p=2,3$ $K(X)=1$ Xは準楕円的という場合を除き X上で K.V. が成立するということである。先ず次の命題より Xは極小曲面であると仮定してよい。

<u>命題([5])</u> X で K.V. が成立するなら X′ を blow up した曲面 X′ でも K.V. が成立する。

$K(X)=-\infty$ の時は X は $\mathbb{P}^2$ か ruled。$K(X)=1$ の時は準楕円的でなければ楕円的。よってどちらの場合も次の命題より X の上で K.V. は成立する。

<u>命題9.([5])</u> X が ruled あるいは楕円的なら K.V. が成立する。

<u>証明</u> $f: X \longrightarrow C$ を ruling か楕円的 fibration とする。自然な完全列 $0 \to f^*\Omega_C \to \Omega_X \to \Omega_{X/C} \to 0$ が存在する。L を豊富な直線束とする。L, $f^*\Omega_C$, $\Omega_{X/C}$ を各々 fibre に切った直線束の次数は >0, 0, $\leqslant 0$。よって $Hom_{\mathcal{O}_X}(L, f^*\Omega_C) = Hom(L, \Omega_{X/C}) = 0$。よって $Hom_{\mathcal{O}_X}(L, \Omega_X)=0$ だから命題3より X の上で

K. V. が成立する。　　　　　　　　　　　　証明終。

$\kappa(X)=0$ の時は、Bombieri-Mumford による分類を使う。b_2 を 2nd Betti 数とする時 X は次のいずれか。

(a) $b_2=6$　アーベル曲面

(b) $b_2=22$　K3 曲面

(c) $b_2=10$　Enriques $\left\{\begin{array}{l}\text{classical}\\ \text{singular}\\ \text{super singular}\end{array}\right.$ } $p=2$ のときのみ

(d) $b_2=2$　$\left\{\begin{array}{l}\text{hyper elliptic}\\ \text{quasi-hyper elliptic}\end{array}\right.$　$p=2,3$ のときのみ

先ず、(a) はアーベル多様体の一般論より K. V. が成立する。(d) の準超楕円的の場合は楕円的 fibration も持つので命題 9 より K. V. が成立する。よって (b) (c) の場合を考察すればよい。D を K3 あるいは Enriques 曲面の豊富な因子とする。

<u>補題</u>　$\dim H^0(\mathcal{O}_X(D)) \geqq 2$

<u>証明</u>　Riemann-Roch の不等式より $h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geqq \frac{1}{2}(D^2)+\chi(\mathcal{O}_X)$。$(D^2)>0$ で $\chi(\mathcal{O}_X)$ は K3, Enriques に従って 2, 1。よって $h^0(\mathcal{O}_X(D)) \geqq 2$。　　　証明終。

$H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \neq 0$ として矛盾を導こう。D を $p^\nu D$

でおきかえて $F^*: H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-pD))$ が単射でないと仮定してよい。よって $H^0(B_X(-D)) \neq 0$ η をその非零元とする。写像

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{O}_X(D)) & \longrightarrow & H^0(B_X) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g & \longmapsto & g^p\eta \end{array} \qquad B_X = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X^p$$

は単射で $H^0(B_X) \cong \mathrm{Ker}[F^*: H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X)]$ だから補題より $h^1(\mathcal{O}_X) \geqq 2$。しかし、K3, classical Enriques の時は $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$, classical でない Enriques の場合でも $h^1(\mathcal{O}_X) = 1$ であるからこれは矛盾である。　　　　証明終。

参考文献

[1] Bombieri - Mumford　Enriques' classification of surfaces in char. p, II, in Complex Analysis and Algebraic Geometry 岩波書店 (1977)

[2] D. Mumford　Pathologies III　Amer. J. Math., 89 (1967) 94 - 104.

[3] M. Raynaud　Contre-example au "vanishing de Kodaira" sur une surface lisse en caractéristique $p > 0$, in C. P. Ramanujam - A Tribute, Tata Institute of Fundamental Research

[4] H. Tango　On the behaviour of extensions of

vector bundles under Frobenius map, Nagoya Math. J., 48(1972), 73-89.

[5] 丹後弘司、Frobenius map によるベクトルバンドルのコホモロジークラスの挙動について，代数幾何学の最近の発展，数研講究録 144 (1972)

[6] S. T. Yau, On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry.