

A Riemann-Roch type inequality for ample divisors (大阪大学における松阪輝久教授による連続講義)

(満洲俊樹・角田秀一郎記)

§ 1. Polarization

任意の非特異楕円曲線は、ある上半平面上の点 τ に対して、 $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ と同型となる。一方これは更に非特異 plane cubic $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$ と同型である。ここで

$$j(\tau) := (12g_2(\tau))^3 / (g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2)$$

とおくと、 j は上半平面 \mathcal{H} から A^1 への morphism となり、しかも

$$j(\tau) = j(\tau') \text{ if and only if } \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$$

であることが知られている。そこで $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{Z})$ としたとき

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z}(c\tau + d) + \mathbb{Z}(a\tau + b) \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

が成り立ち、 $\tau \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \tau & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \\ & \searrow & \swarrow \\ & j(\tau) & (= \tau \bmod SL(2; \mathbb{Z})) \end{array}$$

なる対応を考えることにより、次の commutative diagram を得る。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{上半平面} \mathcal{H} & \xrightarrow{\quad} & \{\text{nonsingular elliptic curves}\} \\
 \searrow \text{よ} & \circlearrowleft & \cong \\
 & & A^1 (= \mathcal{H} / SL(2; \mathbb{Z}))
 \end{array}$$

“このように、このことが楕円曲線の自然な拡張であるアーベル多様体についてどうなるか”という問題がおこる。これに関して Siegel らの仕事は基本的である。まずはじめにアーベル多様体の定義から復習しよう。

定義 (1.1): V が g 次元アーベル多様体であるとは次の条件 (1), (2) を満たすことをいう。

- (1) 複素多様体として、 V は \mathbb{C}^g を \mathbb{R} 上 rank $2g$ の discrete subgroup Ω で割った \mathbb{C}^g / Ω と同型。
- (2) V 上に ample 因子 X が存在する。

そこでアーベル多様体 $V (= \mathbb{C}^g / \Omega)$ 上に ample 因子 X を固定する。このとき X は自然に $H^2(V; \mathbb{Z}) (\cong \wedge^2 H^1(V; \mathbb{Z}))$ の元とみなせ、したがって

→ て $\Omega (\cong H_1(V; \mathbb{Z}))$ の適当な基底 u_1, u_2, \dots, u_{2g} をと

→ て $2g \times 2g$ 行列 $E_X := (\langle X, u_i \wedge u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2g}$ を

$$E_X = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{where } D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix},$$

の形に表わすことができる (Frobenius の標準形)。但し各 d_i は正整数でかつ $d_i \mid d_{i+1}$ 。この E_X を X の交点行列とよぶ。簡単のため D を単位行列 I_g としよう。更に u_1, u_2, \dots, u_g は

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の形に標準化されていると仮定してもよい。そこで $u_{g+i} (1 \leq i \leq g)$ を

$$u_{g+i} = \begin{pmatrix} z_{1i} \\ z_{2i} \\ \vdots \\ z_{gi} \end{pmatrix}$$

と書き表わし、 $g \times g$ 行列 Z を $Z := (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$ と定義する。(このとき Ω を単に (I_g, Z) と書きあらわすことにする。) 今 $u_1^*, u_2^*, \dots, u_{2g}^*$ を u_1, u_2, \dots, u_{2g} の dual basis とすると、 $H^2(V; \mathbb{Z})$ の元としての X は

$$X = \sum_{i=1}^g u_i^* \wedge u_{i+g}^*$$

の形に表わされる。ここで $X \in H^{1,1}(V; \mathbb{Z})$ であることより、 ${}^t Z = Z$ 。更に X が ample 因子であることより、 $\text{Im } Z$ は正定値 (これを $\text{Im } Z > 0$ と書くことにする)。さて、

$$\mathcal{H}_g := \{ Z ; g \times g \text{ 行列で } {}^t Z = Z \text{ かつ } \text{Im } Z > 0 \}$$

とおき Siegel 上半平面とよぶ。このとき \mathcal{H}_g の任意の元 Z に対して $V_Z := \mathbb{C}^g / (I_g, Z)$ はアーベル多様体になっていることが容易にわかる。これは交点行列が $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ であるような V_Z 上の因子 X_Z の存在が、上の議論を逆にたどっていけば、すぐにわかるからである。いま

$$\Gamma_g := \left\{ \mu \in SL(2g; \mathbb{Z}) \mid \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \cdot {}^t \mu = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおくとき、 Γ_g は \mathcal{H}_g に次のように作用することが知られている：即ち Γ_g の任意の元 μ を

$$\mu = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D : g \times g \text{ 行列},$$

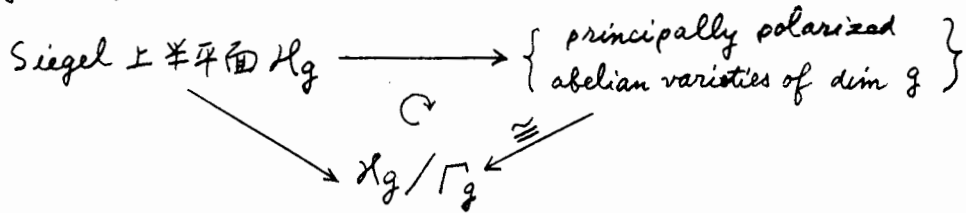
の形に書き表わしたとき、 μ は \mathcal{H}_g の任意の元 Z に対し

$$Z \longmapsto \mu(Z) := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in \mathcal{H}_g$$

で "discontinuous" に作用する。ここで大切なことは $Z, Z' \in \mathcal{H}_g$ に対して次の同値性がいえることである。

$$\boxed{Z' = \mu(Z), \exists \mu \in \Gamma_g} \iff \boxed{\exists \text{ isomorphism } f: V_Z \cong V_{Z'} \\ \text{s.t. } f(X_Z) \equiv X_{Z'} \text{ (num. equiv.)}}$$

よって (V_Z, X_Z) を pair で考えて同型でわけるといふことは Siegel 上半平面 \mathcal{H}_g を Γ_g で割ることと同等となる。



それ故 modular function (= \mathcal{H}_g 上の meromorphic function で Γ_g で不変なもの) や modular form 等が重要であることはいうまでもない。

一方、 \mathcal{H}_g / Γ_g は non-compact なので都合の悪いことが多い。そこで、その compact 化を考えることが必要となってくる。 \mathcal{H}_g / Γ_g に $\mathcal{H}_{g-1} / \Gamma_{g-1}$ をくっつけ、更に $\mathcal{H}_{g-2} / \Gamma_{g-2}$ をくっつけ、...、同様の操作をくりかえして compact 化が出来る。これは佐武 [12], Bailey [2] らの重要な結果である。

ところで、曲線とアーベル多様体は密接な関係にある。 C を種数 $g \geq 1$ の非特異曲線、 J_C を C の Jacobian variety, \mathbb{H}_C を J_C 上の Riemann のテータ因子とする。このとき $C \subseteq J_C$ なる自然なうめこみ^が考えられる^が、例えば

$$(\mathbb{H}_C^{g-1}) \equiv (g-1)! C \quad (\text{num. equiv.})$$

が成り立つ。(この abstract case の証明は松阪[8]を見よ。また \mathbb{H}_C の交点行列は $E_{\mathbb{H}_C} = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ の形に書ける (\because Poincaré duality)。こうして (J_C, \mathbb{H}_C) の pair を考えることによって、もとの曲線 C の information をかなり再生できる。(たとえば、Torelli の定理のように)。

一般の代数多様体についても、アーベル多様体の交点行列を固定したのと同じことを考える必要がある。

定義 (1.2): V を n 次元非特異射影多様体, X を V 上の ample 因子とする。更に $\ast = \{Y \mid Y \text{ は } V \text{ 上の因子で } \mu X \equiv \nu Y \text{ となる } \mu \in \mathbb{Z} \text{ およ } \nu \neq 0 \in \mathbb{Z}\}$

が存在する} とおく。このとき pair (V, κ) を polarized 多様体 とよび、また κ の元で numerically trivial でないものを polar divisor とよぶ。 κ を numerical equivalence (arithmetic equivalence ともいう) で割った space κ/\equiv は rank 1 の free \mathbb{Z} -module となるので、 κ に属するある ample 因子 X_0 が存在して κ の任意の元 Y に対して $Y \equiv t X_0$ をみたすような整数 t が存在する。この X_0 のことを basic polar divisor という。

さてこの節の終りまで 基礎体 $= \mathbb{C}$ と仮定する。このとき次のことが成り立つ。

定理 (1.3): $\varphi: V \rightarrow T$ を非特異代数多様体 V から連結非特異な曲線 T への properかつ smooth な全射だとし、しかもすべての $t \in T$ に対し、ファイバー $V_t := \varphi^{-1}(t)$ は連結だとする。更に X を V 上の因子とし、いかなる $t \in T$ に対しても $X_t := X|_{V_t}$ が V_t 上の ample 因子であると仮定する。このとき、任意の $t_1, t_2 \in T$ に対して、もし X_{t_1} が V_{t_1} 上の basic

polar divisor ならば、 X_{t_2} も V_{t_2} 上の basic polar divisor となっている。

(1.3) の証明: 完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ から導かれる cohomology group の homomorphism $H^1(V_t, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(V_t; \mathbb{Z})$ と、自然な map $H^2(V_t; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(V_t; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ を合成した h_t : $H^1(V_t, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(V_t; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ を考える。このとき、 X_t が basic polar divisor であるということは $h_t(\mathcal{O}(X_t)) (= [X_t])$ が $H^2(X; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ の中で 2 以上の正整数では割り切れないということを示している (cf. 松阪[7])。但し、 $[X_t]$ とは X_t を $H^2(V_t; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ の元とみなしたもののこととする。いま t_1 と t_2 を piecewise C^∞ な path で結ぶことにより、 V_{t_1} と V_{t_2} の diffeomorphism が得られ、次の可換な diagram が induce される。

$$\begin{array}{ccc}
 & \rho_1 \nearrow & H^2(V_{t_1}; \mathbb{Z})/\text{torsion} \\
 H^2(V; \mathbb{Z})/\text{torsion} & \xrightarrow{\quad \circ \quad \text{Sil} \quad} & \\
 & \rho_2 \searrow & H^2(V_{t_2}; \mathbb{Z})/\text{torsion}
 \end{array}$$

ここで上と同様、 X を $H^2(V; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ の元とみなしたものを $[X]$ で表わすことにすると、

$$h_{t_\alpha}(\mathcal{O}(X_{t_\alpha})) = [X_{t_\alpha}] = \rho_\alpha([X]), \quad \alpha=1, 2,$$

故に isomorphism i によって、もし X_{t_1} が basic polar divisor ならば X_{t_2} も同様である。 Q.E.D.

(V, \star) を n 次元 polarized 多様体とし、 X_V を V 上の basic polar divisor とする。このとき、

$P(r) := \chi(V, rX_V)$ は r に関する n 次多項式となり、polarized 多様体 (V, \star) の Hilbert 多項式と呼ばれる。そこで P をある多項式として、 Σ_P を、Hilbert 多項式 P をもつ polarized 多様体全体の集合とする。大切なことは

“ Σ_P は (有限個の) 代数多様体で表現される”
 ということである。この事実の証明は、Chow variety の理論から、次の定理の証明に容易に reduce される。

定理 (1.4): (Matsusaka's Big Theorem [9])。 $P(r)$ を r の有理数係数の多項式で、いかなる整数 r に対しても $P(r)$ の値が整数になるようなものだとする。このとき多項式 $P(r)$ だけによる正整数 $r_0 = r_0(P)$ が存在して、 $\chi(V, L^{\otimes r}) = P(r)$ をみ

たす非特異射影多様体 V/\mathbb{C} とその上の ample line bundle L のいかなる pair (V, L) に対しても $L^{\otimes r}$ は $r \geq r_0$ のとき必ず very ample となる。

定理 (1.4) の特別な場合は well-known である。たとえば種数 g の非特異曲線の場合 $r \geq 2g+1$ のとき $L^{\otimes r}$ は very ample となる (例えば Hartshorne [3; p.22] を見よ)。またアーベル多様体の場合 $r \geq 3$ であれば $L^{\otimes r}$ は very ample である (cf. Mumford [11; p.163])。しかしいずれの場合にしろ Hilbert 多項式が簡単であったことに注意しよう。

定理 (1.4) は Appendix (§8) で扱う。我々の本題は定理 (1.4) を証明するための重要な Key である定理 (2.1) (cf. §2) を論じることである。

§ 2. Statement of Main Theorem

以下 §3 ~ §6 で次の Main Theorem を証明する。但し基礎体を k とし、これ以降の § でも (Appendix も含めて) 常に、 k を代数閉体とする。

定理(2.1): $\text{char}(k) = 0$ とする。 V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体とし、 X を V 上の任意の ample 因子とする。 Hilbert 多項式 $\chi(V, \mathcal{O}_X(r))$ を

$$\chi(V, \mathcal{O}_X(r)) = d_0 \cdot r^n + d_1 \cdot r^{n-1} + \cdots + d_{n-1} r + d_n$$

の形に書き表わすとき、次の3条件をみたす r の ^(実)多項式 $Q = Q(r)$ が存在する。

(i) $\deg Q = n-1$;

(ii) $h^0(\mathcal{O}_X(r)) \geq \chi(V, \mathcal{O}_X(r)) - Q(r)$ for every nonnegative integer r ;

(iii) $Q(r)$ は (pair (V, X) のとり方によらず) Hilbert 多項式 $\chi(V, \mathcal{O}_X(r))$ だけによつてきまる。(実はもっと強く、 $Q(r)$ の各係数は、 n をひとつ固定したときには、 d_0, d_1, \dots, d_n の有理係数の多項式としてとれることもわかる。)

この定理の証明の outline を述べよう。 $n=1$ のときは明らかなので $n \geq 2$ を仮定する。まず小冚の消滅定理によつて u が正整数なら、

$h^0(K_V + uX) = \chi(V, K_V + uX)$ は u の n 次式となり、最高次の係数は $(X^n) > 0$ で零点は高々 n 個。よつて $u \gg 1$ として $|K_V + uX| \neq \emptyset$ を得る。そこで u を u とつて固定して $|K_V + uX|$ の一般元を prime divisors の和 $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ と書く。但し、 D_0 は variable part かつ $D_i (i \geq 1)$ は fixed part。ここで、

$T_{-1} := K_V + (u+2)X$ かつ各 $\rho (0 \leq \rho \leq \omega)$ に対して、 $T_\rho := 2X + (K_V + uX) - \sum_{i=0}^{\rho} D_i$ とおき、 $T_{\rho-1} - D_\rho = T_\rho$ に注意すると、次の exact sequence を得る。

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V(T_\rho) \rightarrow \mathcal{O}_V(T_{\rho-1}) \rightarrow \mathcal{O}_{D_\rho}(T_{\rho-1}|D_\rho) \rightarrow 0.$$

よつて $h^0(T_\rho) - h^0(T_{\rho-1}) + h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|D_\rho) \geq 0$ 。この不等式を $\rho = 0, 1, \dots, \omega$ に対して和をとると、 $T_\omega \sim 2X$ であることから

$$h^0(2X) - h^0(K_V + (u+2)X) + \sum_{\rho=0}^{\omega} h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|D_\rho) \geq 0.$$

よつて nonnegative integer r に対し

$$\begin{aligned} h^0(rX) &\geq h^0(K_V + (u+2)X) - \sum_{\rho=0}^{\omega} h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|D_\rho) \\ &= \chi(V, K_V + (u+2)X) - \sum_{\rho=0}^{\omega} h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|D_\rho) = \chi(V, \overset{2X}{K_V + (u+2)X}) - (Q_1 + Q_2) \end{aligned}$$

where $Q_1 = \chi(V, 2X) - \chi(V, K_V + (u+n)X)$, $Q_2 = \sum_{D_0=0}^{\infty} h^0(D_0, T_{0-1}D_0)$.
 Q_1 is obviously a polynomial of degree $n-1$. Also Q_2 is a polynomial of degree $n-1$ because it is the sum of the dimensions of the spaces of sections of the line bundle $T_{0-1}D_0$ on the variety D_0 . It is expected that the inequality $Q_1 \geq Q_2$ holds for all n . This is proved in §6. The above is the outline of the proof of Theorem (2.1).

注意 (2.2): 定理 (2.1) と同じ仮定の下で、次の条件をみたす n の多項式 $P = P(n)$ が存在することも容易にわかる (cf. §6).

- (i) $\deg P = n-1$;
- (ii) $h^0(2X - K_V) \geq \chi(V, \mathcal{O}(n)) - P(n)$ for every nonnegative integer n ;
- (iii) $P(n)$ is determined by the pair (V, X) only.

§ 3. 基本不等式

定理 (3.1): $\text{Char}(k) \geq 0$ かつ、 V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体 ($n \geq 2$) とし、 V 上で D を素因子、 X を ample 因子とする。このとき、

- (i) $K_V + (n+1)X$ は V 上 arithmetically effective.
- (ii) $n=2$ とする。このとき $K_V + 2X + D$ は V 上 arithmetically effective (特に $(K_V + D + 2X \cdot D) \geq 0$ が成立)。
- (iii) $n=3$ とする。このとき V 上の任意の arithmetically effective divisor F に対し $(K_V + D + 3X \cdot D \cdot F) \geq 0$ が成り立つ (特に $(K_V + D + 3X \cdot D \cdot X) \geq 0$)。

この定理で $\text{char}(k) = 0$ とし、かつ X に対する条件を少し弱めれば次の定理が成り立つ。

定理 (3.2): $\text{char}(k) = 0$ かつ、 V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体とし、 D を V 上の素因子とする。 X を V 上の因子で $(X^{n-1} \cdot D) > 0$ をみたし、しかもある正整数 m に対して $|mX|$ 中かつ $|mX|$ が base point をもたないとする。このと

き $(K_V + D + nX \cdot D \cdot X^{n-2}) \geq 0$ が成り立つ。

この2つの定理を証明するためにまず
embedded resolution に関する次の定理を思い出
 す (正標数の場合は Abhyankar [1; 9.1.3] を見よ)。

定理 (3.3): (左中, Abhyankar). V を任意標数の体
 k の上に定義された n 次元非特異射影多様体
 とし、 D を V 上の素因子とする。更に $\text{char}(k)$
 > 0 の場合は $n=3$ であることを仮定する。こ
 のとき n 次元非特異射影多様体 V' と birational
 morphism $g: V' \rightarrow V$ が存在して次の3条件をみ
 たす。

- 1) g^{-1} は succession of monoidal transforms with irreducible nonsingular centers;
- 2) g は $g^{-1}(V - \text{Sing}(D))$ を $V - \text{Sing}(D)$ に isomorphic に写す;
- 3) D の g^{-1} による proper transform $D' (\subseteq V')$ は non-singular.

そこで次のことを考える。

命題 (3.4): V, V', D, D', g を定理 (3.3) と同様とする。このとき V 上の任意の因子 T 、及び任意の arithmetically effective divisor F に対し、

$$(K_V + D + T \cdot D \cdot F^{n-2}) \cong (K_{V'} + D' + g^*(T) \cdot D' \cdot g^*(F)^{n-2}).$$

(3.4) の証明: 条件より、nonsingular center での blowing-up の列 $g_i: V_i \rightarrow V_{i-1}$, $i=1, 2, \dots, s$, が存在して、 $g = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_s$, $V_s = V'$, $V_0 = V$ と書ける。各 g_i の exceptional divisor を V' までひきあげたものを E_i とおく。 $I = \{i \mid \dim(g_i \text{ の center}) = n-2\}$ とおけば

$$K_{V'} = g^*(K_V) + \sum_{i \in I} E_i + \sum_{j \notin I} a_j E_j \quad (\exists a_j \in \mathbb{Z}_+)$$

と書ける。一方、 $g^*(D) = D' + \sum_{i \in I} b_i E_i + \sum_{j \notin I} c_j E_j$ と書けるが、 b_i, c_j は正整数。従って

$$g^*(K_V + D) = K_{V'} + D' + \sum_{i \in I} (b_i - 1) E_i + \sum_{j \notin I} (c_j - a_j) E_j.$$

さて、任意の正整数 m に対して $F + \frac{X}{m}$ は V 上の ample \mathbb{Q} -divisor。とこるが $j \notin I$ なる j について g_j の center の次元は $n-2$ より小さいので、 $E_j \cdot g^*(F + \frac{X}{m})^{n-2} \equiv 0$ as a 1-cycle on V' 。よって、

$$\begin{aligned}
(K_V + D + T \cdot D \cdot (F + \frac{X}{m})^{n-2}) &= (g^*(K_V + D + T) \cdot g^*(D) \cdot g^*(F + \frac{X}{m})^{n-2}) \\
&= (g^*(K_V + D) + g^*(T) \cdot D' \cdot g^*(F + \frac{X}{m})^{n-2}) \\
&= ((K_V + D' + g^*(T) + \sum_{i \in I} (b_i - 1) E_i + \sum_{j \notin I} (c_j - a_j) E_j) \cdot D' \cdot g^*(F + \frac{X}{m})^{n-2}) \\
&= ((K_V + D' + g^*(T) + \sum_{i \in I} (b_i - 1) E_i) \cdot D' \cdot g^*(F + \frac{X}{m})^{n-2}) \\
&\geq (K_V + D' + g^*(T) \cdot D' \cdot g^*(F + \frac{X}{m})^{n-2}).
\end{aligned}$$

そこで $m \rightarrow +\infty$ とし $(K_V + D + T \cdot D \cdot F^{n-2}) \geq (K_V + D' + g^*(T) \cdot D' \cdot g^*(F)^{n-2})$ を得る。 Q.E.D.

いよいよ (3.1) と (3.2) の証明にはいる。

(3.1) の (i), (ii) の証明: V 上の任意の既約かつ reduced な曲線を Γ とする。 $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して

$$N_\varepsilon := \left\{ Z \in \mathbb{Z}; \text{ algebraic 1 cycle on } V \text{ with real coefficients} \right\} \\ \left\{ \text{such that } (K_V \cdot Z) \geq -\varepsilon (X \cdot Z) \leq 0 \right\}$$

とおくと 森 [10; 定理 1.4.2] によつて

$\Gamma = Z_\varepsilon + \sum_{i=1}^{\nu} a_i l_i$ かつ $0 < -(l_i \cdot K_V) \leq n+1, i=1, 2, \dots, \nu$ とみたす $Z_\varepsilon \in N_\varepsilon, 0 < a_i \in \mathbb{R}$ および ν extremal rational curves l_i が存在する (但し、 ν は 0 となることもあり得る)。

$$(i): (K_V + (n+1)X \cdot \Gamma) = (K_V + (n+1)X \cdot Z_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\nu} a_i (K_V + (n+1)X \cdot l_i)$$

$$\begin{aligned}
&\geq (n+1-\varepsilon)(X \cdot Z_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\nu} a_i \{ (K_V \cdot l_i) + (n+1)(X \cdot l_i) \} \\
&\geq \sum_{i=1}^{\nu} a_i \{ (K_V \cdot l_i) + (n+1)(X \cdot l_i) \} \\
&\geq \sum_{i=1}^{\nu} a_i (n+1) ((X \cdot l_i) - 1) \geq 0
\end{aligned}$$

よって $K_V + (n+1)X$ は V 上 arithmetically effective.

(ii): Γ に対して次の3つの場合に分ける。

(case 1) $\Gamma = D$. このときは

$$\begin{aligned}
(K_V + D + 2X \cdot \Gamma) &= \deg(K_V + D)|_D + 2(X \cdot D) \\
&= \deg K_D + 2(X \cdot D) = 2P_a(D) - 2 + 2(X \cdot D) \geq 2P_a(D) \geq 0.
\end{aligned}$$

(case 2) $V = \mathbb{P}^2$. このときは

$$(K_V + D + 2X \cdot \Gamma) = (-3 + \deg_{\mathbb{P}^2} D + 2 \deg_{\mathbb{P}^2} X) \cdot \deg_{\mathbb{P}^2} \Gamma \geq 0.$$

(case 3) $\Gamma \neq D$ かつ $V \neq \mathbb{P}^2$. この場合は

$$\begin{aligned}
(K_V + D + 2X \cdot \Gamma) &> (K_V + 2X \cdot \Gamma) = (K_V + 2X \cdot Z_\varepsilon + \sum_{i=1}^{\nu} a_i l_i) \\
&\geq (2-\varepsilon)(X \cdot Z_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\nu} a_i (K_V + 2X \cdot l_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{\nu} a_i (K_V + 2X \cdot l_i)
\end{aligned}$$

ここで各 i について森 [10; 定理 2.1] によって、次の (a), (b) のいずれかが成り立つ。

$\left\{ \begin{array}{l} \text{subcase (a): } V \text{ がある曲線上の } \mathbb{P}^1\text{-bundle で、しかも} \\ \quad l_i \text{ はそのうちの fibre である。} \\ \text{subcase (b): } l_i \text{ は } V \text{ 上の } \ast 1 \text{ 種例外曲線である。} \end{array} \right.$

ところが (a) の場合は $(K_V \cdot l_i) = -2$ なので、

$(K_V + 2X \cdot l_i) \geq 0$ かつ、⑥の場合は $(K_V \cdot l_i) = -1$ なので $(K_V + 2X \cdot l_i) \geq 1$ かつ成り立ち、結局次を得る。

$$(K_V + D + 2X \cdot \Gamma) \geq 0.$$

以上 case 1, 2, 3 のいずれの場合にも $K_V + D + 2X$ は arithmetically effective. Q. E. D.

(3.1) (iii) の証明: 定理 (3.3) の記号をつかう。このとき命題 (3.4) により、

$$(K_V + D + 3X \cdot D \cdot F) \geq (K_{V'} + D' + 3g^*(X) \cdot D' \cdot g^*(F)) \dots \textcircled{1}$$

今 nonsingular surface D' 上に、 g によって 1 点につぶれるような \ast 1 種例外曲線があれば、それを blow-down させる。こういった process をくり返して、nonsingular surface D'' および birational morphisms $h: D'' \rightarrow D$, $\sigma: D' \rightarrow D''$ が存在し、次の 2 条件をみたす。

1) D'' 上には h によって 1 点につぶれるような \ast 1 種例外曲線は存在しない;

2) $g|_{D'} = h \circ \sigma$.

よって $D'' \cdot X \cdot D = X_D$, $F \cdot D = F_D$ と書いて

$$(g|_{D'})^*(F_D) = \sigma^*(h^*(F_D)) \quad \text{おまけ}$$

$$K_{D'} = \sigma^*(K_{D''}) + E \quad \text{with } \sigma_*(E) = 0$$

に注意すると $(K_{D'} \circ (g_{1D'})^*(F_D))_{D'} = (K_{D''} \circ h^*(F_D))_{D''}$ を得る。よって

$$\begin{aligned} (K_{D'} + D' + 3g^*(X) \circ D' \circ g^*(F)) &= (K_{D'} + 3(g_{1D'})^*(X_D) \circ (g_{1D'})^*(F_D))_{D'} \\ &= (K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ h^*(F_D))_{D''} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで次の2つの場合に分けて考える。

(case 1) $D'' = \mathbb{P}^2$ のとき、この場合は

$$\begin{aligned} (K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ h^*(F_D))_{D''} &= 3(\deg_{\mathbb{P}^2} h^*(X_D) - 1) \cdot \deg_{\mathbb{P}^2} h^*(F_D) \\ &\geq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

(case 2) $D'' \neq \mathbb{P}^2$ のとき、この場合、 D'' 上の ample 因子 H をひと固定し、 m を任意の正整数とすれば $H_m := h^*(X_D) + \frac{1}{m}H \in D''$ 上の ample \mathbb{Q} -divisor である。今、任意の $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して

$$N_\varepsilon := \left\{ Z; \text{algebraic 1-cycle on } D'' \text{ with real coefficients} \right. \\ \left. \text{such that } (K_{D''} \circ Z)_{D''} \geq -\varepsilon (H_m \circ Z)_{D''} \leq 0 \right\}$$

とおくと、森 [10; 定理 1.4.2] によつて

$$h^*(F_D) = Z_\varepsilon + \sum_{i=1}^{\mu} b_i l_i$$

をみたす $Z_\varepsilon \in N_\varepsilon$, $0 < b_i \in \mathbb{R}$ および extremal rational curves l_i ($i=1, 2, \dots, \mu$) が存在する (但し $\mu=0$ のこともおこり得る)。よつて

$$\begin{aligned}
(K_{D''} + 3H_m \circ h^*(F_D))_{D''} &= (K_{D''} + 3H_m \circ Z_\varepsilon + \sum_{i=1}^M b_i l_i)_{D''} \\
&\geq (3-\varepsilon)(H_m \circ Z_\varepsilon)_{D''} + \sum_{i=1}^M b_i (K_{D''} + 3H_m \circ l_i)_{D''} \\
&\geq \sum_{i=1}^M b_i (K_{D''} + 3H_m \circ l_i)_{D''} \geq \sum_{i=1}^M b_i (K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ l_i)_{D''}.
\end{aligned}$$

ここで各 i について 森 [10; 定理 2.1] によって、次の ②, ③ のいずれかが成り立つ。

$\left\{ \begin{array}{l} \text{subcase ②: } D'' \text{ がある曲線上の } P^1\text{-bundle で } l_i \text{ かつ} \\ \text{ } l_i \text{ はそのひとつの fibre である。} \\ \text{subcase ③: } l_i \text{ は } D'' \text{ 上の又一種例外曲線である。} \end{array} \right.$

ところで ② の場合は $(K_{D''} \circ l_i)_{D''} = -2$ かつ $(h^*(X_D) \circ l_i)_{D''} \geq 1$
 ③ の場合は $(K_{D''} \circ l_i)_{D''} = -1$ かつ $(h^*(X_D) \circ l_i)_{D''} \geq 1$

が成り立つので、いずれの場合にも

$$(K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ l_i)_{D''} > 0$$

を得る。よって $(K_{D''} + 3H_m \circ h^*(F_D))_{D''} \geq 0$ 。ここで $m \rightarrow +\infty$ とするとよって次の不等式が成り立つ。
 case 2 の場合にも成り立つ。

$$(K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ h^*(F_D))_{D''} \geq 0 \quad \text{----- ④}$$

最後に ①, ②, ③, ④ により、case 1, 2 いずれの場合にも $(K_V + D + 3X \circ D \circ F) \geq 0$ 。 Q.E.D.

(3.2) の証明: 定理 (3.3) の記号を使うと、命題

(3.4) から $(K_V + D + nX \cdot D \cdot X^{n-2}) \geq (K_{V'} + D' + n g^*(X) \cdot D' \cdot g^*(X)^{n-2})$ を得る。ところが $|mX|$ m base point free であることから $|m g^*(X)|$ も base point をもたず、よって

$$h^0(D', m(K_V + D' + n g^*(X))|_{D'}) \neq 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

をいえば $(K_{V'} + D' + n g^*(X) \cdot D' \cdot g^*(X)^{n-2}) \geq 0$ が成りたつから (3.2) の証明は終る。そこで $\textcircled{5}$ を示そう。

$$((g^*(X)|_{D'})^{n-1}) = (X|_D)^{n-1} = (X^{n-1} \cdot D) > 0$$

に注意すると小平の消滅定理 (cf. 川又 [4]) により任意の正整数 t に対し、

$$\begin{aligned} \chi(D', K_{D'} + t g^*(X)|_{D'}) &= h^0(D', K_{D'} + t g^*(X)|_{D'}) \\ &= h^0(D', (K_V + D' + t g^*(X))|_{D'}) \end{aligned}$$

であり、しかもこれらは t のきっかり $n-1$ 次の多項式なので、 $1 \leq t_0 \leq n$ をみたす整数 t_0 が存在して $h^0(D', (K_V + D' + t_0 g^*(X))|_{D'}) \neq 0$ 。ここで $h^0(D', m(n-t_0) g^*(X)|_{D'}) \neq 0$ に注意すると

$m(K_V + D' + n g^*(X))|_{D'} = m(K_V + D' + t_0 g^*(X))|_{D'} + m(n-t_0) g^*(X)|_{D'}$ により $\textcircled{5}$ を得る。 Q. E. D.

§ 4. linear system と variable intersection cycle

この § では $\text{Char}(k)$ は任意とし、いずれの V も k 上定義された (possibly singular) n 次元射影多様体だとする ($n \geq 2$)。更に $k \subseteq \Omega$ とし、 Ω を universal domain だとする。この § での我々の目標は定理 (4.9) であるが、その前に色々準備をする。

定義 (4.1): Λ を k -rational Cartier divisors から成る空でない、 V 上の linear system とする。 $N = \dim \Lambda$ とおき $\Phi_\Lambda: V \rightarrow \mathbb{P}^N$ を Λ が定める rational map (defined over k) とする。そして H_i ($i=1, 2, \dots, s$) を $\mathbb{P}^N(\Omega)$ の $\sum_{j=1}^N u_j^{(i)} X_j = 0$ で定義される hyperplane とし、 $u_j^{(i)} \in \Omega$ ($1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq N$) を k 上 algebraically independent になるように十分一般に選んでおく。いま universal domain Ω 上で考える。正整数 s に対し (Ω 上) intersection-theoretically に定義された、 V 上の effective cycle $\Phi_\Lambda^*(H_1 \cdot H_2 \cdots H_s)$ のことを $\Lambda^{[s]}$ と書き variable s -fold intersection cycle of Λ と呼ぶ。

も、と正確にいうと、 $\Gamma (\subseteq V \times \mathbb{P}^N)$ を π_Λ の Graph とし、 $pr_1: \Gamma \rightarrow V$ (resp. $pr_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^N$) を natural projection to the first (resp. second) factor とするとき

$$\Lambda^{[d]} = pr_{1*} (pr_2^* (H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_d))$$

とおく。更に $\Lambda^{[0]} = 1$ とする。ここで $\dim \text{Im}(\pi_\Lambda) < d$ のとき $\Lambda^{[d]} = 0$ となることに注意せよ。

注意 (4.2): 1) $B_S \Lambda$ を Λ の base point 全体から成る V の部分集合とする。このとき H_1, H_2, \dots, H_d を十分一般にとることによって、 $\Lambda^{[d]}$ のいかなる component も $\text{sing}(V) \cup B_S \Lambda$ には含まれないと仮定してよい。

2) $\nu: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ を Γ の normalization とし、 $\pi_i := pr_i \circ \nu$ ($i=1, 2$) とおく。 $\pi_1^* \Lambda$ の fixed part を F とした時、

$$\pi_1^* \Lambda = F + \pi_2^* | \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) |$$

と書ける。しかも set-theoretically に $\pi_1(F) = B_S \Lambda$ 。ここで D_1, D_2, \dots, D_{n-d} を V 上の任意の Cartier divisor としたとき

$$(D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_{n-d} \circ \Lambda^{[d]}) = (\pi_1^*(D_1) \circ \pi_2^*(D_2) \circ \cdots \circ \pi_1^*(D_{n-d}) \circ \pi_2^*(H)^d)$$

が成り立つ。但し H は \mathbb{P}^n の任意の hyperplane。
 (singularity をもつ variety の上での intersection pairing
 については例えば Kleiman [5] を参照せよ。)

3) linear system Λ を universal domain Ω 上まで "ひろげ"
 て考えて、その十分一般的な元 Z_1, Z_2, \dots, Z_s をと
 る。これらを $U := V - (Bs \Lambda \cup \text{Sing}(V))$ に制限した
 ものは

$$Z_i|_U = pr_{1*}(pr_2^*(H_i))|_U, \quad i=1, 2, \dots, s,$$

の形に書ける。ところで pr_1 は $pr_1^{-1}(U)$ と U の
 isomorphism を induce するので $(Z_1|_U) \circ (Z_2|_U) \circ \dots \circ (Z_s|_U)$
 $= \Lambda^{[s]}|_U$ 。そこで $(Z_1|_U) \circ \dots \circ (Z_s|_U) = \sum a_i \delta_i$ ($a_i \in$
 \mathbb{Z}_+ , $\delta_i \subseteq U$) と成分の和の形に書くとき、 \cup
 により $\Lambda^{[s]} = \sum a_i \bar{\delta}_i$ となっている。但し各 $\bar{\delta}_i$ は
 δ_i の V における closure。

補題(4.3): V が normal (な n 次元射影多様体)で
 あったとする。更に Λ を (k -rational) Cartier divisors
 から成る空でない V 上の linear system とする。
 $s = \dim \text{Im}(\overline{\text{pr}}_\Lambda)$ とおき、更に X を V 上の任意の
 ample Cartier 因子としたとき次が成立する。

$$\dim \Lambda \leq (X^{n-s} \cdot \Lambda^{[s]}) + s - 1.$$

(4.3) の証明: $s=0$ のときは明らかなので、 $s \geq 1$ と仮定する。 $\text{Im}(\Phi_\Lambda)$ は \mathbb{P}^N (但し $N = \dim \Lambda$) の closed subvariety で、しかも如何なる hyperplane にも含まれないので、

$$N \leq \deg_{\mathbb{P}^N} \text{Im}(\Phi_\Lambda) + s - 1 = (\text{Im}(\Phi_\Lambda) \cdot H_1 \cdots \cdot H_s) + s - 1$$

となることからよく知られている。ところから、

X は ample であるから

$$(\text{Im}(\Phi_\Lambda) \cdot H_1 \cdots \cdot H_s) \leq (X^{n-s} \cdot \Phi_\Lambda^*(H_1 \cdots \cdot H_s)) = (X^{n-s} \cdot \Lambda^{[s]})$$

$$\text{よって } N \leq (X^{n-s} \cdot \Lambda^{[s]}) + s - 1.$$

Q. E. D.

補題 (4.4): (4.3) と同じ条件のもとに、更に Λ' を Λ の任意の linear subsystem とすれば、 $0 \leq i \leq n$ をみたす整数 i に対して

$$(X^{n-i} \cdot \Lambda^{[i]}) \geq (X^{n-i} \cdot \Lambda'^{[i]}).$$

(4.4) の証明: $(X^{n-i} \cdot \Lambda'^{[i-\alpha]} \cdot \Lambda^{[\alpha]}) \geq (X^{n-i} \cdot \Lambda'^{[i-\alpha+1]} \cdot \Lambda^{[\alpha-1]})$

を各 $\alpha = 1, 2, \dots, i$ に対して示せばよい。 $\Gamma (\subseteq V \times \mathbb{P}^N)$ を Φ_Λ の Graph, $\Gamma' (\subseteq V \times \mathbb{P}^{N'})$ を $\Phi_{\Lambda'}$ の Graph

とし、 $\nu: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma_{X_V} \Gamma'$ を $\Gamma_{X_V} \Gamma'$ の normalization とする。そして $p: \tilde{\Gamma} \rightarrow V$, $g: \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^N$, $g': \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{P}^{N'}$ を natural projections としたとき、

$$p^* \Lambda = F + g^* | \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) |$$

$$p^* \Lambda' = F' + g'^* | \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N'}}(1) |$$

と書ける。ここで $F' - F = (p^* \Lambda' \text{ の fixed part }) - (p^* \Lambda \text{ の fixed part}) = \text{effective divisor}$ なのて、

H, H' をそれぞれ $\mathbb{P}^N, \mathbb{P}^{N'}$ の hyperplane としたとき、 $g^* H \sim g'^* H' + \text{effective divisor}$ 。よって、

$$\begin{aligned} & (X^{n-i} \cdot \Lambda'^{[i-d]} \cdot \Lambda^{[\alpha]}) - (X^{n-i} \cdot \Lambda'^{[i-d+1]} \cdot \Lambda^{[\alpha-1]}) \\ &= ((p^* X)^{n-i} \cdot (g'^* H')^{i-d} \cdot (g^* H)^\alpha) - ((p^* X)^{n-i} \cdot (g'^* H')^{i-d+1} \cdot (g^* H)^{\alpha-1}) \\ &= ((p^* X)^{n-i} \cdot (g'^* H')^{i-d} \cdot (g^* H)^{\alpha-1} \cdot (g^* H - g'^* H')) \\ &= ((p^* X)^{n-i} \cdot (g'^* H')^{i-d} \cdot (g^* H)^{\alpha-1} \cdot (\text{effective divisor})) \geq 0. \end{aligned}$$

但し、最後の不等号では、 $p^* X, g'^* H', g^* H$ が $\tilde{\Gamma}$ 上 arithmetically effective であることを使った。

Q.E.D.

この(4.4)の不等式で、適当な i に対しては、等号が成り立たずに strict な不等式となっている Λ' がある。例えば、

補題(4.5): (4.3)と同じ条件のもとに、更に、
 $\dim \text{Im}(\Phi_\Lambda) = n$ を仮定する。 A を V の prime
 divisor で、しかも Λ の fixed component でないとし
 する。更に Φ_Λ による A の proper image $\Phi_\Lambda(A)$ の次
 元 r が $r < n-1$ をみたすとする。 B を $\Phi_\Lambda|_A$ の
 general fibre とすれば

(a) $\dim B = n-1-r$;

(b) $\bar{\Lambda} := \{Z \in \Lambda \mid \text{Supp}(Z) \supseteq \text{Supp}(B)\}$ は Λ の linear
 subsystem でしかも $\dim \bar{\Lambda} = \dim \Lambda - 1$ をみたす;

(c) $(X^{n-1-r} \cdot \Lambda^{[r+1]}) - (X^{n-1-r} \cdot B) \geq (X^{n-1-r} \cdot \bar{\Lambda}^{[r+1]})$ 。

(4.5)の証明: (a)は clear. 次に $Z \in \Lambda$ が $\bar{\Lambda}$ に属す
 る条件は、対応する \mathbb{P}^n の hyperplane が 1点 $\Phi_\Lambda(B)$
 を通る条件であることから、次の二つのこと
 がいえる。

1) $\bar{\Lambda}$ の次元は Λ の次元から、丁度1だけさが
 る。即ち (b) がいえた;

2) infinitely near な base point も含めて、しかも multi-
 plicity もこめた、強い意味で、($\bar{\Lambda}$ の base locus) =
 (Λ の base locus) $\cup B$ 。

さて (c) を証明するために $\Lambda, \bar{\Lambda}$ を universal domain Ω まで "ひろげ" たところで考える。 $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_{r+1}$ を $\bar{\Lambda}$ の一般元とすると、各 $\text{Supp}(\bar{Z}_i) \supseteq B$ 。よって上の 2) より、 $B_S \Lambda$ の外側で、

$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{Z}_{r+1} = \alpha \cdot B + \text{effective cycle}, \quad (\alpha \geq 1),$$

となる。ここで $B \subseteq B_S \bar{\Lambda}$ なので $\bar{\Lambda}^{[r+1]}$ は $\alpha \cdot B$ なる component は含まない。一方、 $B \not\subseteq B_S \Lambda \cup \text{Sing}(V)$ により、 $\Lambda^{[r+1]}$ (の specialization) は $\alpha \cdot B$ なる component を含んでいるとしてよい。従って (c) を得る。

注意: (4.5) の (c) の部分の証明は detail まできちんと書けば、上よりは少々煩雑である。

補題 (4.6): (4.3) と同じ条件のもとに、 E を Λ の任意の元とする。このとき $0 \leq i \leq n$ なる任意の整数 i に対して次の不等式が成り立つ。

$$(X^{n-i} \cdot \Lambda^{[i]}) \leq (X^n) \cdot ((X^{n-i} \cdot E) / (X^n))^i.$$

(4.6) の証明: Step 1: $i=0$ のときは明らかなので、 $i \geq 1$ とする。(4.2) の 2) と同様の記号を使

うと、 $\pi_1^* \Lambda$ の fixed part を F としたとき、

$$\pi_1^* \Lambda = F + \pi_2^* |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$$

が $\tilde{\Gamma}$ 上で成り立つ。よって H を \mathbb{P}^N の hyperplane とすると、 $\pi_1^* E \sim F + \pi_2^* H$ 。いま $\tilde{X} := \pi_1^*(X)$

かつ $\tilde{H} := \pi_2^*(H)$ とおくと、(A.2) の 2) から、

$$(X^{n-i} \cdot \Lambda^{[i]}) = (\tilde{X}^{n-i} \cdot \tilde{H}^i).$$

- お、 $(X^{n-1} \cdot E) = (\tilde{X}^{n-1} \cdot \pi_1^* E) = (\tilde{X}^{n-1} \cdot F) + (\tilde{X}^{n-1} \cdot \tilde{H})$
 $\geq (\tilde{X}^{n-1} \cdot \tilde{H})$ が成り立つので、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し、

$$(\tilde{X}^{n-i} \cdot \tilde{H}^i) \leq (\tilde{X}^n) \cdot ((\tilde{X}^{n-1} \cdot \tilde{H}) / (\tilde{X}^n))^i \dots \textcircled{1}$$

を示せば証明は終る。

Step 2: $\tilde{\Gamma}$ 上の ample divisor A をひとつとってくる。 \tilde{X}, \tilde{H} とともに $\tilde{\Gamma}$ 上で arithmetically effective なので、 $\tilde{X}_\alpha := \tilde{X} + \frac{1}{\alpha} A$, $\tilde{H}_\alpha := \tilde{H} + \frac{1}{\alpha} A$, $\alpha = 1, 2, \dots$, とおくと、 $\tilde{X} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tilde{X}_\alpha$, $\tilde{H} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tilde{H}_\alpha$ と ample \mathbb{Q} -divisors の limit の形に書ける。よって整数 i を $2 \leq i \leq n$ をみたすように任意に固定したとき、 $\tilde{\Gamma}$ 上の irreducible reduced surface の列 S_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, と正整数の列 λ_α , $\alpha = 1, 2, \dots$ が存在して、 $\tilde{\Gamma}$ 上で

$$S_\alpha \equiv \lambda_\alpha \cdot \tilde{X}_\alpha^{n-i} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-2}$$

が成りたつようにできる。 $f_\alpha: S'_\alpha \rightarrow S_\alpha$ を S_α の desingularization とし、 $X'_\alpha := f_\alpha^*(\tilde{X}_\alpha|_{S_\alpha})$ 、

$H'_\alpha := f_\alpha^*(\tilde{H}_\alpha|_{S_\alpha})$ とおくと、 X'_α は S'_α 上 で

arithmetically effective かつ $(X'_\alpha)^2 = \lambda_\alpha (\tilde{X}_\alpha^{n-i+2} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-2}) > 0$ が成りたつので、 Hodge index theorem により、

$$(X'_\alpha)^2 \cdot (H'_\alpha)^2 \leq (X'_\alpha \cdot H'_\alpha)^2$$

を得る。よって $(\tilde{X}_\alpha^2 \cdot S_\alpha) \cdot (\tilde{H}_\alpha^2 \cdot S_\alpha) \leq (\tilde{X}_\alpha \cdot \tilde{H}_\alpha \cdot S_\alpha)^2$

両辺を $(\lambda_\alpha)^2$ で割って次の不等式を得る。

$$(\tilde{X}_\alpha^{n-i+2} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-2}) \cdot (\tilde{X}_\alpha^{n-i} \cdot \tilde{H}_\alpha^i) \leq (\tilde{X}_\alpha^{n-i+1} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-1})^2, \quad i=2,3,\dots,n.$$

これは $\tau_i := (\tilde{X}_\alpha^{n-i} \cdot \tilde{H}_\alpha^i) / (\tilde{X}_\alpha^{n-i+1} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-1})$ とおく

とき $\tau_i \leq \tau_{i-1}$ を意味する。故に $\tau_i \leq \tau_{i-1} \leq \dots \leq \tau_1$ 。

これから $(\tilde{X}_\alpha^{n-i} \cdot \tilde{H}_\alpha^i) \leq (\tilde{X}_\alpha^{n-i+1} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-1}) \cdot \tau_1$ 。よって

これを inductive に使うと、

$$(\tilde{X}_\alpha^{n-i} \cdot \tilde{H}_\alpha^i) \leq (\tilde{X}_\alpha^n) \cdot \tau_1^i = (\tilde{X}_\alpha^n) \left((\tilde{X}_\alpha^{n-1} \cdot \tilde{H}_\alpha) / (\tilde{X}_\alpha^n) \right)^i.$$

ここで $\alpha \rightarrow +\infty$ とすることにより①式を得る。

Q.E.D.

注意 (4.7): 上の step 2 と全く同じ議論で、次のことがいえる:

W を (possibly singular) n 次元射影多様体とし、 A および B を W 上の arithmetically effective Cartier divisors とする。更に $(A^n) > 0$ を仮定する。このとき $1 \leq i \leq n$ なる任意の i に対して

$$(A^{n-i} \cdot B^i) \leq (A^n) \cdot ((A^{n-1} \cdot B) / (A^n))^i.$$

補題(4.8): (4.3) と同じ条件のもとに、更に Λ' を Λ の linear subsystem で、 Λ の元 E に対し、不等式

$$\begin{cases} \dim \Lambda' \geq (X^n) \cdot ((X^{n-1} \cdot E) / (X^n))^{n-1} + n - 1 \\ (X^{n-1} \cdot E) / (X^n) \geq 1 \end{cases}$$

を同時にみたしているとする。このとき、

$$\dim \text{Im}(\Phi_{\Lambda'}) = n.$$

(4.8) の証明: 背理法を使う。もし $s := \dim \text{Im}(\Phi_{\Lambda'})$ が $s < n$ をみたしていたと仮定すれば、

$$\begin{aligned} \dim \Lambda' &\leq (X^{n-s} \cdot \Lambda'^{[s]}) + s - 1 && [:: (4.3)] \\ &\leq (X^{n-s} \cdot \Lambda^{[s]}) + s - 1 && [:: (4.4)] \\ &\leq (X^n) \cdot ((X^{n-1} \cdot E) / (X^n))^s + s - 1 && [:: (4.6)] \\ &< (X^n) \cdot ((X^{n-1} \cdot E) / (X^n))^{n-1} + n - 1 && [:: s < n]. \end{aligned}$$

これは矛盾。

Q. E. D.

さて、 d を正整数とし、 t の $n-1$ 次多項式 $R_n(t)$, $R_n''(t)$ と t の n 次多項式 $R_n'(t)$, $R_n^*(t)$ を次のように定義する。

$$R_n(t) = d \left(\sum_{i=1}^{n-1} t^i \right)$$

$$R_n'(t) = \frac{d}{n!+1} t^n + d \cdot t$$

$$R_n''(t) = \left(d + \frac{1}{n!+1} \right) t^{n-1} + n$$

$$R_n^*(t) = R_n(t) + R_n'(t) + R_n''(t).$$

定理 (4.9): V を非特異 (n 次元射影多様体) とし、 X を V 上の ample 因子とする。 E を V 上の因子で $t := (X^{n-1} \cdot E) / (X^n)$ が $t \geq 1$ をみたすとする。更に $d = (X^n)$ とおき、

$$\dim |E| \geq R_n^*(t)$$

が成りたっているとする。このとき $|E|$ の適当な linear ~~system~~ subsystem Λ が存在して、次の 5 条件をみたす。

(a) $\dim \text{Im}(\Phi_\Lambda) = n$;

(b) Φ_Λ は V 上の如何なる prime divisor D も contract しない、即ち D の proper image $f(D)$ の次元は常に $n-1$;

(c) V 上の如何なる prime divisor D に対しても

$$\dim \text{Tr}_D(\Lambda_{\text{var}}) \geq \frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1$$

但し、 Λ_{var} は Λ の variable part のことを意味するとする；

(d) Λ_{var} の一般元は irreducible reduced；

(e) $\dim \Lambda \geq R_n''(t)$.

(4.9) の証明: Step 1: この step では 3 条件 (a), (b), (c) をみたす Λ の存在をいおう。そのためには $|E|$ の linear subsystem $\Lambda(v, w)$ (但し v, w は non-negative integers) で $\dim \Lambda(v, w) \geq d \cdot t^{n-1} + n - 1$ をみたすものを次のように inductive に定義する。まず $\Lambda(0, 0) = |E|$ とおくと、 $\dim \Lambda(0, 0) (\geq R_n^*(t)) \geq d \cdot t^{n-1} + n - 1$ は条件から明らか。そこで $\Lambda(v, w)$ が定義されたとする。(このとき $\Lambda(v, w)$ で定義される rational map $f_{v, w} := \bar{\pi}_{\Lambda(v, w)}$ は補題 (4.8) により $\dim \text{Im}(f_{v, w}) = n$ をみたす。) よって、もし $\Lambda(v, w)$ が (b) の条件も (c) の条件もみたすすると Step 1 は終ってしまうので、(b) か (c) が満たされないとしてよい。

はじめに (b) がみたされないとする。即ちある prime divisor A があって、 $f_{v,w}$ によって contract されるとする。 A の proper image $f_{v,w}(A)$ の general point を q とし、 $\Lambda(v,w) = \Lambda(v,w)_{var} + F$ の形に $\Lambda(v,w)$ をその variable part $\Lambda(v,w)_{var}$ と fixed part F とに分ける。 $\Lambda(v+1,w) := \{Z+F \mid Z \in \Lambda(v,w)_{var} \text{ は } \text{Supp}(Z) \supseteq (f_{v,w}|_A)^{-1}(q) \text{ をみたす}\}$ とおけば (4.5) により、

$$\dim \Lambda(v+1,w) = \dim \Lambda(v,w) - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v+1,w)^{[i]}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v,w)^{[i]}) \right) - 1.$$

こうして $\Lambda(v+1,w)$ を定義するのを type I の operation とよぶ。

次に (b) がみたされて (c) がみたされないとする。このとき V 上の prime divisor D で

$$\dim \text{Tr}_D(\Lambda(v,w)_{var}) \leq \frac{n-1}{n!+1}$$

となるものがある。そこで $\Lambda(v,w+1) := \{Z+F \mid Z \in \Lambda(v,w)_{var} \text{ は } \text{Supp}(Z) \supseteq D \text{ をみたす}\}$ とおいてできる vector space の完全列

$$0 \rightarrow \Lambda(v,w+1) \rightarrow \Lambda(v,w) \rightarrow \text{Tr}_D(\Lambda(v,w)_{var}) \rightarrow 0$$

を考える。 $\dim \text{Tr}_D(\Lambda(v,w)_{var})$ は linear system としての次元であって $\text{Tr}_D(\Lambda(v,w)_{var})$ を vector space と

してみたときの次元より 1 だけ小さいので

$$\begin{aligned} \dim \Lambda(v, w+1) &\geq \dim \Lambda(v, w) - \frac{t^{n-1}}{n!+1} - 1 \\ &\geq d \cdot t^{n-1} + n-1 - \frac{t^{n-1}}{n!+1} - 1 \\ &> 0 \quad [\because n \geq 2]. \end{aligned}$$

よって $\Lambda(v, w+1) \neq \emptyset$ であり、こうして $\Lambda(v, w+1)$ を定義するのを type II の operation とよぶ。この type II の operation の場合も $\Lambda(v, w+1)$ の fixed part として、 $\Lambda(v, w)$ の fixed part F のほかに、更に D が加わるので、補題 (4.5) と同様の議論により

$$(X^{n-1} \circ \Lambda(v, w+1)) \subseteq (X^{n-1} \circ \Lambda(v, w)) - 1,$$

これと (4.4) から次の不等式を得る。

$$\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v, w+1)^{[i]}) \subseteq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v, w)^{[i]}) \right) - 1.$$

以上の 2 つの operation の考察から、そもそも $\Lambda(v, w)$ は次の不等式を同時にみたしていなければならない。

$$\dim \Lambda(v, w) \geq \dim |E| - v - w \left(\frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1 \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v, w)^{[i]}) \subseteq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ |E|^{[i]}) \right) - v - w \quad \dots \textcircled{2}$$

特に $v \leq \sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ |E|^{[i]}) \leq R_n(t)$ [\because (4.6)]。一方 $\Lambda(v, w)$ の fixed part は重複度をこめて少くとも

w 個の component を含んでいるから、 $w \leq (X^{n-1} \cdot E) = d \cdot t$ が成り立つ。故に①式から更に次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} \dim \Lambda(v, w) &\geq \dim |E| - R_n(t) - R'_n(t) \\ &\geq R''_n(t) \quad \text{----- ③} \end{aligned}$$

従って type I の operation の場合、

$$\dim \Lambda(v+1, w) \geq R''_n(t) - 1 \geq d \cdot t^{n-1} + n - 1,$$

type II の operation の場合も、

$$\dim \Lambda(v, w+1) \geq R''_n(t) - \frac{t^{n-1}}{n!+1} - 1 = d \cdot t^{n-1} + n - 1$$

が成り立ち、inductive procedure は well-defined である。しかも②式は我々の process が有限回で終わってしまうことを示しているので step 1 は完了した。

Step 2: いったん step 1 で (a), (b), (c) をみたす $\Lambda (= \Lambda(v, w) \text{ for some } v, w)$ が得られれば、③により、 $\dim \Lambda \geq R''_n(t)$ 即ち (e) もみたしていることは明らか。

Step 3: かくして 4 条件 (a), (b), (c), (e) をみたすような Λ が得られたか (これを $\bar{\Lambda}$ と書くことにする)。この 4 条件のほかにも更に (d) もみた

すような Λ をみつければよい。次の2つの場合に分ける。

(case 1) $\text{char}(k)=0$. このときは $\dim \text{Im}(\Phi_{\Lambda}) = n \geq 2$ なので Bertini の定理により、 $\bar{\Lambda}_{\text{var}}$ の一般元は irreducible reduced. 即ち $\bar{\Lambda}$ 自身が条件 (a) を満たす。

(case 2) $\text{char}(k)=p>0$. この場合も $\dim \text{Im}(\Phi_{\Lambda}) = n \geq 2$ なので $\bar{\Lambda}_{\text{var}}$ は pencil と compose しない。よって $\bar{\Lambda}_{\text{var}}$ の一般元は p^{α} (prime divisor on V) の形に書ける (ただし $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$)。そこで $\Lambda_0 := \{D \in \text{Div}(V); p^{\alpha} \cdot D \in \bar{\Lambda}_{\text{var}}\}$ とおくと、体 k のある Frobenius automorphism に induce された rational map φ が存在して、 $\Phi_{\Lambda} = \varphi \circ \Phi_{\Lambda_0}$ と書ける。 F を linear system Λ の fixed part とし、 V 上の linear system Λ を

$$\Lambda := \underbrace{\Lambda_0 + \Lambda_0 + \cdots + \Lambda_0}_{p^{\alpha} \text{個}} + F$$

と定義すれば、 Λ は $|\Lambda|$ の linear subsystem で、しかも $\bar{\Lambda}_{\text{var}}$ の一般元は irreducible reduced, 即ち条件 (a) を満たす。 $\Lambda_{\text{var}} = \underbrace{\Lambda_0 + \cdots + \Lambda_0}_{p^{\alpha} \text{個}} \geq \bar{\Lambda}_{\text{var}}$ なので、 Λ が条件 (a), (b), (c), (e) を満たすことも明らか。 Q.E.D.

§ 5. linear system に関する松阪の定理.

この § で k は任意標数とし、 V は k 上で定義された n 次元非特異射影多様体 ($n \geq 2$) とする。そして X を V 上の ample 因子、 E を V 上の arithmetically effective divisor とし、 $t := (X^{n-1} \cdot E) / (X^n)$, $c := (X^{n-2} \cdot E^2)$ とおいたとき

$$\frac{t^{n-1}}{n!+1} > n-3 \quad \text{かつ} \quad c > 0$$

が成りたっているとする。しかも Λ を complete linear system $|E|$ の空でない subsystem で次の 4 条件をみたすとする。

(a) $\dim \text{Im}(\Phi_\Lambda) = n$;

(b) Φ_Λ は V 上の如何なる prime divisor D も contract しない、即ち D の proper image $f(D)$ の次元は常に $n-1$;

(c) V 上の如何なる prime divisor D に対しても

$$\dim \text{Tr}_D(\Lambda_{\text{var}}) \geq \frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1;$$

(d) Λ_{var} の一般元は irreducible reduced.

このとき我々の目標は次の定理を証明することである。

定理 (5.1): M を V 上の任意の arithmetically effective divisor とする。そして

$$\alpha := \frac{((n-1)!+1)^{n-2} \tau^{n-2} d \cdot t}{\frac{t^{n-1}}{n!+1} - n + 3}$$

$$\beta := \frac{((n-1)!+1)^{n-2} \tau^{n-2} \sigma}{\frac{t^{n-1}}{n!+1} - n + 3}$$

とおく。但し $d := (X^n)$ かつ $\sigma := (X^{n-2} \cdot M \cdot E)$ 。更に

$$Q_1(r) := 1 + \{ \tau((n-1)!+1)(\alpha r + \beta + 1) \}^{n-2} \cdot (\sigma + d \cdot t \cdot r)$$

とおくとき、

$$h^0(M+rX-E) \geq h^0(M+rX) - d \cdot t \cdot Q_1(r)$$

が任意の nonnegative integer r に対して成り立つ。

定理 (5.1) を証明するために、まず次のようなことを考える:

Λ の一般元を prime divisors の和 $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ と書き表わす。但し $D_0 \in \Lambda_{\text{var}}$ とし、かつ $\sum_{i=1}^{\omega} D_i$ を Λ の fixed part とする。そこで任意の nonnegative integer

n をとり、

$$\begin{cases} T_{-1} := M + nX \\ T_\rho := M + nX - \sum_{i=0}^{\rho} D_i \quad (0 \leq \rho \leq \omega) \end{cases}$$

とおく。このとき $T_\rho = T_{\rho-1} - D_\rho$ に注意すると

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V(T_\rho) \rightarrow \mathcal{O}_V(T_{\rho-1}) \rightarrow \mathcal{O}_{D_\rho}(T_{\rho-1}|_{D_\rho}) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

から long exact sequence

$$0 \rightarrow H^0(T_\rho) \rightarrow H^0(T_{\rho-1}) \rightarrow H^0(D_\rho, T_{\rho-1}|_{D_\rho}) \rightarrow \dots$$

を得る。よって

$$h^0(T_\rho) - h^0(T_{\rho-1}) + h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|_{D_\rho}) \geq 0.$$

これを $\rho=0, 1, \dots, \omega$ について和をとれば

$$h^0(T_\omega) - h^0(T_{-1}) + \sum_{\rho=0}^{\omega} h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|_{D_\rho}) \geq 0.$$

ここで $T_{-1} = M + nX$, $T_\omega \sim M + nX - E$ なので n 次の不等式を得る。

$$(5.2): \quad h^0(M + nX - E) \geq h^0(M + nX) - \sum_{\rho=0}^{\omega} h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|_{D_\rho}).$$

そこで $\sum_{\rho=0}^{\omega} h^0(D_\rho, T_{\rho-1}|_{D_\rho})$ を上から評価する必要がある必要になってくる。そのために、いくつかの準備をする。

補題(5.3): W を normal な l 次元射影多様体 ($l \geq 2$)

とし、 A を W 上の $(A^l) > 0$ をみたす arithmetically effective な Cartier 因子とする。また Z を W 上の Cartier 因子で、 $m \gg 1$ なる正整数 m に対して、 $|mZ|$ が空でなく、fixed component ももたず、しかも pencil でも compose されないとする。更にもしある正数 ν に対して

$$\nu \cdot (A^l) \geq (A^{l-1} \cdot Z)$$

が成りたつとする。このとき $(l!+1)\nu A - Z$ は pseudo-effective である、即ち、任意の generically finite な全射 $p: W' \rightarrow W$ (但し W' は projective variety) と、 W' の任意の arithmetically effective Cartier divisors D_1, D_2, \dots, D_{l-1} に対して、次の不等式が成りたつ。

$$(((l!+1)\nu p^*(A) - p^*(Z)) \cdot D_1 \cdot D_2 \cdots \cdot D_{l-1}) \geq 0.$$

(5.3) の証明: Step 1: この step では、 A が更に W 上 ample であつたと仮定する。このとき、上の (5.3) の statement が正しいことを示そう。そこで $e_0 = \frac{\nu^l (A^l)}{l!}$ とおく。更に、 $\delta \gg 1$ なる整数 δ をとり、 $g = (l!+1)\delta$ とおく。このとき

$$\chi(W, g\nu A) = e_0 g^l + e_1 g^{l-1} + \cdots + e_l.$$

しかも $(vA)^l \geq (vA)^{l-1} \cdot Z$ に注意すると

$$e_0 \geq \frac{(vA)^{l-1} \cdot Z}{l!} > \frac{(vA)^{l-1} \cdot Z}{l! + 1}.$$

従って $y \gg 1$ により $e_0 y^l > (yvA)^{l-1} \cdot \frac{y}{l!+1} Z$. と

ところが両辺とも y の l 次式なので "lower degree terms" をつけ加えても不等号はかわらない。よって

$$\chi(W, yvA) > ((yvA)^{l-1} \cdot \frac{y}{l!+1} Z) + l - 1.$$

一方 $y \gg 1$ より、 A の ampleness から $\chi(W, yvA) = h^0(yvA)$. 故に

$$h^0(yvA) > ((yvA)^{l-1} \cdot yZ) + l - 1 \text{ ----- ①.}$$

さて B を $|yZ|$ の一般元とすると、仮定より

Bertini の定理を使い、 B は irreducible reduced.

ここで $h^0(yvA - B) \neq 0$ ----- ② を claim する。

背理法をつかって $h^0(yvA - B) = 0$ を仮定する。

このとき long exact sequence

$$0 \rightarrow H^0(yvA - B) \rightarrow H^0(yvA) \rightarrow H^0(B, (yvA)|_B) \rightarrow \dots$$

から $h^0(yvA) \leq h^0(B, (yvA)|_B)$ を得る。ところが

$y \gg 1$ により、 B は射影空間 $\mathbb{P}(H^0(B, (yvA)|_B))$ に subvariety として embed され、しかもいかなる hyperplane にも含まれない。よって (補題

(4.3)と同様にして)

$$((\nu A)^{\ell-1} \cdot B) + \ell - 1 \geq h^0(B, (\nu A)|_B) \quad (\geq h^0(\nu A))$$

を得るが、これは①に反し不合理。故に②が成り立つ。 $\nu A \sim B + F$ (即ち、 $(\ell! + 1)\nu A \sim \nu Z + F$) をみたすような effective divisor F が存在するので、 $(\ell! + 1)\nu A - Z$ が pseudo-effective となることは明らか。

Step 2: いよいよ一般の場合を考える。そこで W' 上の ample Cartier 因子 H' をひとつ固定する。 $\nu = 1, 2, \dots$ に対して $A'_\nu := p^*(A) + \frac{1}{\nu} H'$ とおいたとき、 $\nu \cdot A'_\nu$ が W' 上の ample Cartier 因子であることを注意する。 $\varepsilon > 0$ を任意にひとつ固定しよう。このとき $\nu \gg 1$ とすれば、

$$\begin{aligned} & \frac{\nu + \varepsilon}{\nu} \cdot ((\nu \cdot A'_\nu)^\ell) - ((\nu \cdot A'_\nu)^{\ell-1} \cdot p^*(Z)) \\ &= ((\nu + \varepsilon) \cdot (A^\ell) - (A^{\ell-1} \cdot Z)) \cdot \nu^{\ell-1} + \text{lower degree terms of } \nu \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

よって Step 1 により、 W' 上の任意の arithmetically effective Cartier divisors $D_1, D_2, \dots, D_{\ell-1}$ に対して、

$$\left(\{(\ell! + 1) \cdot \frac{\nu + \varepsilon}{\nu} \cdot (\nu \cdot A'_\nu) - p^*(Z)\} \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_{\ell-1} \right) \geq 0$$

が成立する。ここで $\nu \rightarrow +\infty$ とすることにより

$$\left(((l!+1) \cdot (v+\varepsilon) \tilde{f}(A) - \tilde{f}(Z)) \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_{l-1} \right) \geq 0$$

を得る。更に $\varepsilon \rightarrow 0$ として求める不等式を得る。
Q.E.D.

補題 (5.4): 各 $\nu \in \{0, 1, \dots, \omega\}$ に対して, D_ν^* を rational map $\tilde{\pi}_\nu |_{D_\nu}$ の Graph の normalization とする。また, $\pi_\nu: D_\nu^* \rightarrow D_\nu$ を natural projection とする。このとき次のことが成り立つ。

(a) $\Lambda_\nu := \text{Tr}_{D_\nu}(\Lambda_{\text{var}})$ か $\Lambda_\nu^* := \pi_\nu^* \Lambda_\nu$ とおくと Λ_ν^* の variable part $\Lambda_{\nu, \text{var}}^*$ は base point をもたない。

$$(b) \ h^0(D_\nu, T_{\nu-1}|_{D_\nu}) \leq h^0(D_\nu^*, \pi_\nu^*(T_{\nu-1}|_{D_\nu})).$$

(c) Z_ν^* を $\Lambda_{\nu, \text{var}}^*$ の一般元とする。更に $X_\nu^* := \pi_\nu^*(X|_{D_\nu})$ とおくと $((n-1)!+1) \cdot X_\nu^* - Z_\nu^*$ は D_ν^* 上で pseudo-effective。

(5.4) の証明: (a), (b) は明らかなので (c) のみを考える。 Λ_ν の一般元を Z_ν とするとき

$$\begin{aligned} (Z_\nu^* \cdot (X_\nu^*)^{n-2}) &\leq (\pi_\nu^*(Z_\nu) \cdot \pi_\nu^*(X|_{D_\nu})^{n-2}) \\ &= (D_\nu |_{D_\nu} \cdot (X|_{D_\nu})^{n-2}) = (D_\nu \cdot D_\nu \cdot X^{n-2}) \\ &\leq (D_\nu \cdot \sum_{i=0}^{\omega} D_i \cdot X^{n-2}) = (D_\nu \cdot E \cdot X^{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (E^2 \cdot X^{n-2}) \quad [\because E \text{ is arithmetically effective}] \\ &= c \leq c(D_0 \cdot X^{n-1}) = c((X_0^*)^{n-1}) \quad \text{----- } \textcircled{3} \end{aligned}$$

ここで次の2つの場合に分けて考える。

(case 1) $n \geq 3$. このときは $m \gg 1$ として

$$\dim \text{Im}(\Phi_{|mZ_0^*|}) \geq \dim \text{Im}(\Phi_{|X_0^*|}) = \dim \text{Im}(\Phi_{|X_0|}) = n-1 \geq 2$$

であることから $|mZ_0^*|$ は pencil で compose されない。
故に補題 (5.3) を使うと、 $\textcircled{3}$ 式から $(n-1)!+1)cX_0^* - Z_0^*$ は D_0^* 上で pseudo-effective.

(case 2) $n=2$. このときは D_0^* は nonsingular curve となり、しかも D_0^* 上で degree をとると

$$\begin{aligned} \deg(Z_0^*) &= (Z_0^* \cdot (X_0^*)^{n-2}) \quad [\because n=2] \\ &\leq c((X_0^*)^{n-1}) \quad [\because \textcircled{3}] \\ &= c \deg(X_0^*) < c((n-1)!+1) \deg(X_0^*) \end{aligned}$$

が成り立つので、やはり $(n-1)!+1)cX_0^* - Z_0^*$ は D_0^* 上で pseudo-effective. Q.E.D.

補題 (5.5): すべての i ($0 \leq i \leq n-1$) に対して

$$\begin{aligned} &((n-1)!+1)^i c^i ((Z_0^*)^{n-i-1} \cdot (X_0^*)^i) \\ &\geq ((Z_0^*)^{n-1}) \geq \frac{c^{n-1}}{n!+1} - n+3 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(5.5) の証明: 1) 最初の不等式をまず示す。補題 (5.4) の (c) により、 $((n-1)!+1) \tau X_0^* - Z_0^*$ は D_0^* 上で pseudo-effective。故に各 j ($1 \leq j \leq n-1$) に対して

$$((n-1)!+1) \tau ((Z_0^*)^{n-j-1} \cdot (X_0^*)^j) \geq ((Z_0^*)^{n-j} \cdot (X_0^*)^{j-1}).$$

これをくり返し用いて、

$$\begin{aligned} ((n-1)!+1)^i \tau^i ((Z_0^*)^{n-i-1} \cdot (X_0^*)^i) &\geq ((n-1)!+1)^{i-1} \tau^{i-1} ((Z_0^*)^{n-i} \cdot (X_0^*)^{i-1}) \\ &\geq \dots \geq ((Z_0^*)^{n-1}). \end{aligned}$$

2) 次に 2 番目の不等式を示す。 $N := \dim \Lambda_0$ とおくと p.39 条件 (c) から

$$N \geq \frac{\tau^{n-1}}{n!+1} + 1 \quad \text{----- ④}$$

一方 $\pi_{\Lambda_0}^* : D_0^* \rightarrow \mathbb{P}^N$ を考えたとき、 Z_0^* は $\Lambda_0^*, \text{var} (= (\pi_{\Lambda_0}^*)^* | \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|)$ の一般元であり、また $\text{Image}(\pi_{\Lambda_0}^*)$ は \mathbb{P}^N のいかなる hyperplane にも含まれないので

$$N < \deg_{\mathbb{P}^N}(\text{Image}(\pi_{\Lambda_0}^*)) + n-1 \leq ((Z_0^*)^{n-1}) + n-1 \quad \text{---- ⑤}.$$

④, ⑤ より証明すべき 2 番目の不等式が容易に出てくる。 Q.E.D.

注意: 補題 (4.3) は実は V が normal でなくとも成り立つので $N = \dim \Lambda_0 \leq (\Lambda_0^{[n-1]}) + n-2 = ((Z_0^*)^{n-1}) + n-2$ [cf. 2) of (4.2)]. これから ⑤ が成

てくるので上の2)の部分の別証になっている。

さて D'_0 を rational map $\bar{\pi}|_{\pi_0^*(T_{0-1}|D_0)}$ の Graph の normalization とし、 $p_0: D'_0 \rightarrow D_0$ を natural projection とする。(但し、 $|\pi_0^*(T_{0-1}|D_0)| = \emptyset$ のときは $D'_0 = D_0$, $p_0 = \text{id}_{D_0}$ とおく)。更に $X'_0 := p_0^*(X_0^*)$, $Z'_0 := p_0^*(Z_0^*)$, $\Xi'_0 := p_0^*|\pi_0^*(T_{0-1}|D_0)|$ とおくとき、補題(5.4)と同様に次のことが成り立つ。

(a) $\Xi'_0, \text{var} = \emptyset$ か、又は Ξ'_0, var は base point をもたない。

(b) Y'_0 を Ξ'_0, var の一般元とすると(但し $\Xi'_0, \text{var} = \emptyset$ のときは $Y'_0 = 0$ とおく)、不等式

$$h^0(D_0, T_{0-1}|D_0) \leq h^0(Y'_0) \quad \text{が成り立つ。}$$

今(5.2)式の $h^0(D_0, T_{0-1}|D_0)$ を上から評価するために、次の2つの問題を考える。

(I) できる限り小さい正整数 ν_i ($0 \leq i \leq n-3$) で

$$(Y'_0 - \nu_i Z'_0 \cdot (Z'_0)^i \cdot (X'_0)^{n-i-2}) < 0$$

をみたすものをみいだせ。

(II) $(Y'_0 \cdot (Z'_0)^{n-2})$ の“よい”上限をみつけよ。

こういう問題を考えるのは、次のような補題を示せるからである。

補題 (5.6): 正整数 ν_i ($0 \leq i \leq n-3$) が

$$(Y'_0 - \nu_i Z'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) < 0 \quad \dots \textcircled{6}$$

をみたしたとする。このとき

$$h^0(D_0, T_{0-1} D_0) \leq \nu_0 \cdot \nu_1 \cdots \nu_{n-3} \cdot (Y'_0 \circ (Z'_0)^{n-2}) + 1.$$

(5.6) の証明: D'_0 の上で完全列

$$0 \rightarrow H^0(Y'_0 - \nu_i Z'_0) \rightarrow H^0(Y'_0) \rightarrow H^0(Z'_0(\nu_i), Y'_0|_{Z'_0(\nu_i)}) \rightarrow \dots$$

を考える。但し $Z'_0(\nu_i)$ とは $|\nu_i Z'_0|$ の一般元を意味するとする。⑥を $i=0$ のときに適用して、

$$(Y'_0 - \nu_0 Z'_0 \circ (X'_0)^{n-2}) < 0 \text{ が得られるので } h^0(Y'_0 - \nu_0 Z'_0) = 0. \text{ 従って}$$

$$h^0(Y'_0) \leq h^0(Z'_0(\nu_0), Y'_0|_{Z'_0(\nu_0)}).$$

以下 inductive に

$$h^0(Y'_0) \leq h^0(Z'_0(\nu_0), Y'_0|_{Z'_0(\nu_0)})$$

$$\leq h^0(Z'_0(\nu_0) \circ Z'_0(\nu_1), Y'_0|_{Z'_0(\nu_0) \circ Z'_0(\nu_1)})$$

.....

$$\leq h^0(Z'_0(\nu_0) \circ Z'_0(\nu_1) \cdots \circ Z'_0(\nu_{n-3}), Y'_0|_{Z'_0(\nu_0) \circ Z'_0(\nu_1) \cdots \circ Z'_0(\nu_{n-3})}).$$

D'_0 は normal なので $C := Z'_0(\nu_0) \circ Z'_0(\nu_1) \circ \cdots \circ Z'_0(\nu_{n-3})$ は 非特異曲線としてとれ、 $h^0(C, Y'_0|_C) \leq \deg_C(Y'_0|_C) + 1$ 。

$$\begin{aligned} \therefore h^0(D_0, T_{0-1}|D_0) &\leq h^0(Y'_0) \leq h^0(C, Y'_0|_C) \\ &\leq \deg_C(Y'_0|_C) + 1 = (Z'_0(\nu_0) \circ Z'_0(\nu_1) \circ \cdots \circ Z'_0(\nu_{n-3}) \circ Y'_0) + 1 \\ &= \nu_0 \cdot \nu_1 \cdots \nu_{n-3} \cdot (Y'_0 \circ (Z'_0)^{n-2}) + 1. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

そこで (I), (II) の問題を解こう。 $\tau = (X^{n-2} \circ E^2) > 0$ であり、かつ E が arithmetically effective なので、 D_i ($i=1, 2, \dots, \omega$) の番号のつけ方を、必要ならとりかえて、

$$\left(\sum_{i=0}^{\omega-1} D_i \circ D_0 \circ X^{n-2}\right) > 0, \quad \omega=1, 2, \dots, \omega, \quad \text{-----} \textcircled{7}$$

が成り立つようにできる。(小平 [6; p.68 補題 7.9] と同様の議論でできる。)

補題 (5.7): $\nu \in \{0, 1, \dots, \omega\}$ を任意とする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$(a) \quad (Y'_0 \circ (X'_0)^{n-2}) \leq (D_0 \circ M_{+2} X \circ X^{n-2}) \leq \sigma + d \cdot t \cdot \nu,$$

$$(b) \quad (Y'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) \leq \{((n-1)! + 1) \tau\}^i \cdot (Y'_0 \circ (X'_0)^{n-2}) \\ \leq \{((n-1)! + 1) \tau\}^i \cdot (\sigma + d \cdot t \cdot \nu), \quad i=0, 1, \dots, n-2.$$

(5.7) の証明: $Y'_0 = 0$ のときは明らかなので、
 $Y'_0 \neq 0$ と仮定する。

$$\begin{aligned}
 (a) \quad (Y'_0 \circ (X'_0)^{n-2}) &\leq (P_0^* \circ \alpha_0^* (T_{0-1} | D_0) \circ (X'_0)^{n-2}) \\
 &= (D_0 \circ T_{0-1} \circ X^{n-2}) = (D_0 \circ M + rX - \sum_{i=0}^{p-1} D_i \circ X^{n-2}) \\
 &\leq (D_0 \circ M + rX \circ X^{n-2}) \quad [\because \textcircled{7}] \\
 &\leq (\sum_{i=0}^{\omega} D_i \circ M + rX \circ X^{n-2}) = (E \circ M + rX \circ X^{n-2}) = \sigma + d \cdot r.
 \end{aligned}$$

(b) X'_0, Y'_0, Z'_0 が D'_0 上 arithmetically effective であることに注意する。一方、補題(5.4)の(c)により、

$((n-1)! + 1) \cdot X_0^* - Z_0^*$ は D_0^* 上の pseudo-effective divisor

(cf. (5.3))。よって

$$(Y'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) \leq ((n-1)! + 1) \cdot (Y'_0 \circ (Z'_0)^{i-1} \circ (X'_0)^{n-i-1}).$$

Inductive にくり返して

$$(Y'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) \leq \{((n-1)! + 1)\}^i \cdot (Y'_0 \circ (X'_0)^{n-2}).$$

これと (a) から、(b) のあとの方の不等式も成る。

Q. E. D.

補題(5.8): すべての $i=0, 1, \dots, n-2$ に対して次のことが成り立つ:

$$\nu_i > \alpha r + \beta \implies (Y'_0 - \nu_i Z'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) < 0.$$

但し、 α, β の定義は p. 40 を見よ。

(5.8) の証明: 補題 (5.7) の (b) により,

$$(Y'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) \leq \{((n-1)!+1)\tau\}^i \cdot (\sigma + d \cdot \kappa \cdot \nu).$$

一方、 $Z'_0 = P_0^*(Z_0^*)$, $X'_0 = P_0^*(X_0^*)$, $\deg P_0 = 1$ に注意すると、補題 (5.5) により,

$$((Z'_0)^{i+1} \circ (X'_0)^{n-i-2}) \geq \frac{\tau^{n-1} - n + 3}{\{((n-1)!+1)\tau\}^{n-i-2}}$$

これから $\nu_i > \alpha\nu + \beta$ のとき $(Y'_0 - \nu_i Z'_0 \circ (Z'_0)^i \circ (X'_0)^{n-i-2}) < 0$ が成り立つことは明らか。 Q.E.D.

以上、補題 (5.8) で問題 (I) が解決し、また補題 (5.7) の (b) で $i = n-2$ とおくことによつて

$$(Y'_0 \circ (Z'_0)^{n-2}) \leq \{((n-1)!+1)\tau\}^{n-2} \cdot (\sigma + d \cdot \kappa \cdot \nu) \dots \textcircled{8}$$

が得られ、問題 (II) も解決した。そこでいよいよ定理 (5.1) を証明しよう。

(5.1) の証明: 補題 (5.6) および補題 (5.8) により

$$\begin{aligned} h^0(D_0, T_{0-1}D_0) &\leq (\alpha\nu + \beta + 1)^{n-2} (Y'_0 \circ (Z'_0)^{n-2}) + 1 \\ &\leq Q_1(\nu), \quad [:\textcircled{8}], \end{aligned}$$

ここで $Q_1(\nu)$ の定義は p.40 を見よ。よつて、不等式 (5.2) を参照すると、

$$h^0(M + \nu X - E) \geq h^0(M + \nu X) - \omega \cdot Q_1(\nu).$$

一方、 ω は V 上の linear system Λ ($\subseteq |E|$) の一般元の multiplicity もこゝた component の数であるので、 $\omega \leq (E \cdot X^{n-1}) = d \cdot t$ 。故に定理 (5.1) がただちに従う。

Q. E. D.

§ 6. Proof of Main Theorem

この § で" は (2.1) の記号を使う。即ち $\text{char}(k) = 0$, k 上 V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体とし、 X を V 上の任意の ample 因子とする, ... etc. このとき小平の消滅定理から、 m を正整数とすると、

$$\begin{aligned} h^0(V, K_V + mX) &= \chi(V, K_V + mX) = (-1)^n \chi(V, -mX) \\ &= d_0 \cdot m^n - d_1 \cdot m^{n-1} + d_2 \cdot m^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} d_{n-1} \cdot m + (-1)^n d_n \end{aligned}$$

但し $d_0 = (X^n)/n!$, $d_1 = -(K_V \cdot X^{n-1})/2 \cdot (n-1)!$, ...。

そこで正整数 u を 3 条件

$$u \geq n+2,$$

$$h^0(V, K_V + uX) > R_n^*(t), \quad (\text{cf. (4.9)}),$$

$$t^{n-1}/n!+1 > n-3,$$

をみたすように u と t を固定する、但し $t = (X^{n-1} \cdot K_V + uX)/(X^n)$ 。こういう u が" とれるのは

$$\begin{cases} h^0(V, K_V + uX) = d_0 u^n - d_1 u^{n-1} + \dots \\ R_n^*(u) = \frac{d}{n!+1} u^n + \text{lower degree terms of } u \end{cases}$$

において $d_0 = \frac{d}{n!} > \frac{d}{n!+1}$ であることから明らか。

しかもそういう u を n, d_0, d_1, \dots, d_n た" けによる

数として選ぶことに注意する。

さて、いよいよ定理 (3.1), (4.9), (5.1) を使って定理 (2.1) (および注意 (2.2)) を証明する。

(2.1) の証明: $E = K_V + uX$ とおく。このとき、 $u \geq n+2$ なので定理 (3.1) によって、 E は ample で $c := (X^{n-2} \cdot E^2) > 0$ 。しかも $t := (K_V + uX \cdot X^{n-1}) / (X^n) \geq 1$ が成り立つことに注意する。そこで、定理 (4.9) の 5 条件をみたすような linear subsystem Λ of $|E|$ が存在する。故に定理 (5.1) を $M = E = K_V + uX$ のときに適用すると、nonnegative integer r に対して

$$h^0(rX) \geq h^0(K_V + (u+r)X) - d \cdot t \cdot Q_1(r) \quad \dots \textcircled{1}$$

但し $Q_1(r)$ は r の $(n-1)$ 次多項式で、その係数は、

d, c, n, t だけによる数。ここで $d = n! \cdot d_0$,

$t = u - \frac{2d_1}{n \cdot d_0}$ が成り立つことに注意。さて

$$\begin{aligned} & h^0(K_V + (u+r)X) - d \cdot t \cdot Q_1(r) \\ &= (-1)^n \chi(V, -(u+r)X) - d \cdot t \cdot Q_1(r) \\ &= \chi(V, rX) - Q_2(r) \quad \dots \textcircled{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{但し、 } Q_2(r) := d \cdot t \cdot Q_1(r) + \chi(V, rX) - (-1)^n \chi(V, -(u+r)X) \\
& = d \cdot t \cdot Q_1(r) + \sum_{i=0}^n d_i \cdot r^i - (-1)^n \sum_{i=0}^n d_i (-u+r)^i \\
& = \left(r \text{ の } (n-1) \text{ 次多項式でその係数は } d_0, d_1, \dots \right. \\
& \quad \left. \dots d_n, r, n \text{ だけによる数となっている} \right).
\end{aligned}$$

ところが注意(4.7)により、

$$0 < r = (X^{n-2} \cdot E^2) \leq (X^n) \cdot ((X^{n-1} \cdot E)/(X^n))^2 = d \cdot t^2.$$

よって、nonnegative integer r に対して

$$Q_2(r) \leq Q(r) \quad \text{----- ③}$$

となるような r の $(n-1)$ 次多項式 $Q(r)$ で、その係数が d_0, d_1, \dots, d_n, r だけによる数になるようなものがある。最後に ①, ②, ③ により

$$h^0(rX) \geq \chi(V, rX) - Q(r)$$

が成りたち、証明が終った。 Q.E.D.

(2.2) の証明: $E = 2(K_V + uX)$, $M = K_V + 2uX$ とおき、定理(2.1) と全く同様に証明できる。

Q.E.D.

§ 7. Appendix (I).

この § では $n=3$ かつ $\text{char}(k)=p>0$ とする。
 そして、この条件のもとに定理 (2.1) のようなこ
 とが成りたつかどうかを考える。

そこで V を k 上定義された 3次元非特異射
 影多様体, X を V 上の ample 因子とする。

$d = (X^3)$, $\mathfrak{z} = (K_V \cdot X^2)$ とおき、また (4.9) の記号
 を使って ($n=3$ を代入して)

$$R_3^*(n) = \frac{d}{7} n^3 + (2d + \frac{1}{7}) n^2 + 2d n + 3$$

とおく。更に n の 2次式 $P(n)$ を

$$P(n) := 15 n^2 (\mathfrak{z} + 4d + 1)^2 (\mathfrak{z} + 4d) + n d \\
+ \mathfrak{z}^2 (\mathfrak{z} + 4d) + 3 + h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V)$$

で定義する。我々の目標は次の定理を示すこ
 とである。

定理 (7.1): 正整数 n かつ $h^0(nX) > R_3^*(n)$ をみたす
 とする。このとき $h^2(nX) \leq P(n)$ 。

系(7.2): 正整数 n を不等式

$$h^0(2X) > R_3^*(n) \cdots \textcircled{1}, \quad \chi(V, 2X) > R_3^*(n) + P(n) \cdots \textcircled{2}$$

が同時にみたされるようにとったとき (こういう n がとれるのは、 $n \gg 1$ のときに $h^0(2X) = \chi(V, 2X) = \frac{d}{6}n^3 + \cdots$ が成り立つことより明らか), この2つの不等式は $h^1(\mathcal{O}_V)$ を (従って $h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V)$ を) 不変にするような (V, X) の deformation で保たれる。

((7.1) \Rightarrow) (7.2) の証明: $\chi(V, 2X)$ の変形不変性から $\textcircled{2}$ 式が上のような deformation で保たれていることは明らか。そこで $h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V)$ を保つような (V, X) の specialization および generalization で $\textcircled{1}$ 式が保たれることを示せばよい。

まず (V, X) のこのような generalization (V', X') を考える。このとき $\textcircled{1}$ と定理(7.1) から $h^2(2X) \leq P(n)$ が成り立ち、 $h^2(2X)$ の upper semi-continuity より、

$$h^2(2X') \leq h^2(2X) \leq P(n). \text{ 従って}$$

$$\begin{aligned} R_3^*(n) + P(n) &< \chi(V, 2X) = \chi(V', 2X') \\ &\leq h^0(2X') + h^2(2X') \leq h^0(2X') + P(n). \end{aligned}$$

よって $h^0(\mathcal{L}X') > R_3^*(\mathcal{L})$ を得る。

一方①式が specialization で保たれることは、
 $h^0(\mathcal{L}X)$ の upper semi-continuity より明らか。 Q.E.D.

いよいよ定理(7.1)の証明にはいる。定理(7.1)の証明方法は定理(2.1)のそれと似かよっている。

(7.1)の証明: Step 1: $E = \mathcal{L}X$ とおく。このとき
 $t := (X^{n-1} \circ E) / (X^n) = \mathcal{L}$ が成りたらし、しかも $h^0(\mathcal{L}X)$
 $> R_3^*(\mathcal{L})$ であるので定理(4.9)の条件 $\dim |E| \geq$
 $R_3^*(t)$ をみたす。よって $|\mathcal{L}X|$ の適当な linear
 subsystem Λ が存在して、定理(4.9)の5条件(a)
 (b), (c), (d), (e) をみたす。そこで Λ の一般元を
 prime divisors の和 $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ と書き表わす。但し、
 $D_0 \in \Lambda_{var}$ かつ $\sum_{i=1}^{\omega} D_i$ を Λ の fixed part とする。

$$\begin{cases} T_{-1} := K_V \\ T_{\sigma} := K_V - \sum_{i=0}^{\sigma} D_i \quad (0 \leq \sigma \leq \omega) \end{cases}$$

とおき、 $T_{\sigma} = T_{\sigma-1} - D_{\sigma}$ に注意すると、完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V(T_{\sigma}) \rightarrow \mathcal{O}_V(T_{\sigma-1}) \rightarrow \mathcal{O}_{D_{\sigma}}(T_{\sigma-1}|D_{\sigma}) \rightarrow 0$$

から long exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(T_\sigma) \rightarrow H^0(T_{\sigma-1}) \rightarrow H^0(D_\sigma, T_{\sigma-1}|D_\sigma) \\ \rightarrow H^1(T_\sigma) \rightarrow H^1(T_{\sigma-1}) \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。但し、 α は natural map: $H^1(T_{\sigma-1}) \rightarrow H^1(D_\sigma, T_{\sigma-1}|D_\sigma)$ とする。よって

$$\begin{aligned} h^0(T_\sigma) - h^0(T_{\sigma-1}) + h^0(D_\sigma, T_{\sigma-1}|D_\sigma) - h^1(T_\sigma) + h^1(T_{\sigma-1}) \\ = \dim(\text{Im } \alpha) \geq 0. \end{aligned}$$

この不等式を $\sigma = 0, 1, \dots, \omega$ について和をとれば

$$h^0(T_\omega) - h^0(T_{-1}) + \sum_{\sigma=0}^{\omega} h^0(D_\sigma, T_{\sigma-1}|D_\sigma) - h^1(T_\omega) + h^1(T_{-1}) \geq 0.$$

ここで $T_{-1} = K_V$ かつ $T_\omega \sim K_V - 2X$ に注意すると、

$$\begin{aligned} h^0(K_V - 2X) + h^1(K_V) - h^0(K_V) + \sum_{\sigma=0}^{\omega} h^0(D_\sigma, T_{\sigma-1}|D_\sigma) \\ \geq h^1(K_V - 2X). \end{aligned}$$

よって Serre duality により

$$\begin{aligned} h^0(K_V - 2X) + h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V) + \sum_{\sigma=0}^{\omega} h^0(D_\sigma, T_{\sigma-1}|D_\sigma) \\ \geq h^2(2X) \quad \text{----- } \textcircled{3}. \end{aligned}$$

Step 2: 各 $\sigma \in \{0, 1, \dots, \omega\}$ に対し、rational map $\pi_\sigma|_{D_\sigma}$ の Graph を desingularize したものを D_σ^* をひと固定しておく。また $\pi_\sigma: D_\sigma^* \rightarrow D_\sigma$ を自然な射影とする。更に $\Lambda_\sigma := \text{Tr}_{D_\sigma}(\Lambda_{\text{var}})$ かつ $\Lambda_\sigma^* := \pi_\sigma^*(\Lambda_\sigma)$ とおくとき、

補題 (5.4) と同様に Λ_0^* の variable part $\Lambda_{0,var}^*$ は base point をもたない。さて $\Lambda_{0,var}^*$ の一般元を Z_0^* とし、また $X_0^* := \pi_0^*(X|_{D_0})$ とおく。このとき (補題 (5.5) にかわる) 不等式

$$(Z_0^* \cdot X_0^*) > \frac{2}{5} \quad \text{----- } \textcircled{4}$$

を証明しよう。背理法を使うことにして、

$(Z_0^* \cdot X_0^*) \leq \frac{2}{5}$ を仮定する。まず、任意の正整数 m に対して $\dim \text{Im}(\bar{\pi}|_{mZ_0^*}) \geq \dim \text{Im}(\bar{\pi}|_{\Lambda_0}) = 2$ が成りたつので、Bertini の定理によつて、 $|mZ_0^*|$ の一般元は irreducible nonsingular。更に $(Z_0^* \cdot X_0^*) \leq \frac{2}{5} ((X_0^*)^2)$ が成りたつので、補題 (5.3) により、

$3 \cdot \frac{2}{5} \cdot X_0^* - Z_0^*$ は pseudo-effective。 Z_0^* は D_0^* 上 arithmetically effective な divisor であるから $\frac{3}{5} \cdot 2(Z_0^* \cdot X_0^*) \geq (Z_0^*)^2$ 。

よつて (5.5) の証明の 2) の部分と全く同様に

$$((Z_0^*)^2) \geq \dim \Lambda_0 - 1 \geq \frac{2^2}{7},$$

但し最後の不等式は Λ が定理 (4.9) の条件 c) をみたしているから成りたつ。結局、

$$\frac{3}{5} \cdot 2 \cdot (Z_0^* \cdot X_0^*) \geq \frac{2^2}{7}.$$

これは背理法の仮定 $(Z_0^* \cdot X_0^*) \leq \frac{2}{5}$ に反し、不合理。よつて $\textcircled{4}$ を得る。

Step 3: $\Xi_D := \pi_D^*(T_{D-1}D_D)$ とおき、 Y_D^* を $\Xi_{D, \text{var}}$ の一般元とする。(但し、 $\Xi_{D, \text{var}} = \emptyset$ のときは $Y_D^* = 0$ とおく。) ここで Y_D^* が D_D^* 上で arithmetically effective であるということに注意する。さて、(補題(5.7)にかわる) 不等式

$$(Y_D^* \cdot Z_D^*) \leq 3\mu(3+4d+1) \cdot (Y_D^* \cdot X_D^*) \quad \text{-----} \textcircled{5}$$

を示そう。まず、 $(X \cdot D_0 \cdot D_D) = (X_D \cdot \pi_D^*(D_0 | D_D)) \geq (X_D^* \cdot Z_D^*)$ により、

$$\begin{aligned} (X \cdot 2X \cdot D_D) &= (X \cdot D_0 \cdot D_D) + \sum_{i=1}^{\omega} (X \cdot D_i \cdot D_D) \\ &\geq (X_D^* \cdot Z_D^*) + \mu_D \cdot (X \cdot D_0 \cdot D_D), \end{aligned}$$

但し $\mu_D \in \mathbb{Z}_+$ は D_D の $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ における重複度とする。

ここで定理(3.1)の(iii)から $(X \cdot D_0 \cdot D_D) \geq -(K_V + 3X \cdot D_0 \cdot X)$ 。

$$\begin{aligned} \therefore 2(X^2 \cdot D_D) &\geq (X_D^* \cdot Z_D^*) - (K_V + 3X \cdot \mu_D D_0 \cdot X) \\ &\geq (X_D^* \cdot Z_D^*) - (K_V + 4X \cdot \mu_D D_0 \cdot X) \\ &\geq (X_D^* \cdot Z_D^*) - (K_V + 4X \cdot 2X \cdot X) \quad [\because (3.1) \text{ の (i)}] \\ &= (X_D^* \cdot Z_D^*) - (3+4d)\mu \\ &\geq (X_D^* \cdot Z_D^*) - (3+4d)\mu \cdot (X^2 \cdot D_D). \end{aligned}$$

これから $(3+4d+1)\mu(X_D^*)^2 = (3+4d+1)\mu(X^2 \cdot D_D) \geq (X_D^* \cdot Z_D^*)$ 。

故に、補題(5.3)により、 $3(3+4d+1)\mu X_D^* - Z_D^*$ は D_D^* 上の pseudo-effective な divisor。よって、 $\textcircled{5}$ 式を得る。

Step 4: (補題(5.8)にかわるものとして) 各 $\rho = 0, 1, \dots, \omega$ に対して次のことを示そう。正整数 ν に対して

$$\nu \geq 5(3+4d) \Rightarrow (Y_\rho^* - \nu Z_\rho^* \circ X_\rho^*) < 0 \quad \dots \textcircled{6}.$$

まず、 $Y_\rho^* = 0$ のときは $\textcircled{6}$ は明らかなので、 $Y_\rho^* \neq 0$ を仮定する。更に、 D_i ($i=1, 2, \dots, \omega$) の番号を、必要ならつけかえて、 $(\sum_{i=0}^{\rho-1} D_i \circ D_\rho \circ X) \geq 0$ が各 ρ に対して成りたつようにしておく (cf. p.50)。

こうすると、 $\textcircled{6}$ は計算だけから容易にでる：

$$\begin{aligned} (Y_\rho^* - \nu Z_\rho^* \circ X_\rho^*) &\leq (Y_\rho^* \circ X_\rho^*) - \frac{2\nu}{5} \quad [:\textcircled{4}] \\ &\leq (\pi_\rho^*(T_{\rho-1}|D_\rho) \circ X_\rho^*) - \frac{2\nu}{5} \\ &= (K_V - \sum_{i=0}^{\rho-1} D_i \circ D_\rho \circ X) - \frac{2\nu}{5} \\ &\leq (K_V \circ D_\rho \circ X) - \frac{2\nu}{5} < (K_V + 4X \circ D_\rho \circ X) - \frac{2\nu}{5} \\ &\leq (K_V + 4X \circ 2X \circ X) - \frac{2\nu}{5} = 2(3+4d - \frac{\nu}{5}) \leq 0. \end{aligned}$$

Step 5: $3+4d+1$ が正整数となることに注意して $\nu := 5(3+4d+1)$ とおく。このとき、 $\textcircled{6}$ より、補題(5.6)と同様にして、次の不等式を得る。

$$h^\circ(D_\rho, T_{\rho-1}|D_\rho) \leq \nu(Y_\rho^* \circ Z_\rho^*) + 1.$$

さて、まず $Y_\rho^* \neq 0$ とすると、

$$\begin{aligned}
(Y_0^* \circ Z_0^*) &\leq 3r(3+4d+1) \cdot (Y_0^* \circ X_0^*) \quad [\because \textcircled{5}] \\
&\leq 3r(3+4d+1) \cdot (T_{0-1} \circ X \circ D_0) \\
&= 3r(3+4d+1) \cdot (K_V - \sum_{i=0}^{0-1} D_i \circ X \circ D_0) \\
&\leq 3r(3+4d+1) \cdot (K_V \circ X \circ D_0) \\
&\leq 3r(3+4d+1) \cdot (K_V + 4X \circ X \circ D_0).
\end{aligned}$$

とこのかゝ、最下辺の式は常に nonnegative であるので、 $Y_0^* \neq 0$, $Y_0^* = 0$, いずれの場合にも

$$(Y_0^* \circ Z_0^*) \leq 3r(3+4d+1) \cdot (K_V + 4X \circ X \circ D_0).$$

よって、

$$\begin{aligned}
\sum_{D_0=0}^{\omega} h^0(D_0, T_{0-1}|D_0) &\leq 3r^2(3+4d+1) \cdot (K_V + 4X \circ X \circ \sum_{D_0=0}^{\omega} D_0) + \omega \\
&= 15r^2 \cdot (3+4d+1)^2 \cdot (3+4d) + \omega.
\end{aligned}$$

今、 ω は linear system $\Lambda (\subseteq |2X|)$ の一般元の multiplicity もこめた component の数なので、 $\omega \leq (2X \circ X^2) = 2 \cdot d$ が成りたっている。故に、

$$\sum_{D_0=0}^{\omega} h^0(D_0, T_{0-1}|D_0) \leq 15r^2 \cdot (3+4d+1)^2 \cdot (3+4d) + 2 \cdot d.$$

これを $\textcircled{3}$ 式から

$$\begin{aligned}
h^2(2X) &\leq h^0(K_V - 2X) + h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V) \\
&\quad + 15r^2 \cdot (3+4d+1)^2 \cdot (3+4d) + 2 \cdot d
\end{aligned}$$

----- $\textcircled{7}$

Step 6: 最後に $h^0(K_V - rX)$ を上から評価しよう。
 そこで、正整数 r に関し、次の 3 つの場合に分ける。

(case 1) $r > \frac{3}{d}$; (case 2) $1 \leq r \leq \frac{3}{d}$ か $\rightarrow h^0(K_V - rX) \leq 1$;

(case 3) $1 \leq r \leq \frac{3}{d}$ か $\rightarrow h^0(K_V - rX) \geq 2$ 。

ここで、(case 1) の場合は $(K_V - rX \cdot X^2) = 3 - d \cdot r < 0$
 であるので $h^0(K_V - rX) = 0$ 。よって (case 3) の場
 合を考える。このときは $A_1 := |K_V - rX|$ とおくと
 $i := \dim \text{Im}(\Phi_{A_1})$ は 1 か 2 か 3 のいずれか。一方

$$\begin{aligned} h^0(K_V - rX) - i &\leq (X^{3-i} \cdot A_1^{[i]}) && [\because (4.3)] \\ &\leq (X^3) \cdot \left((X^2 \cdot K_V - rX) / (X^3) \right)^i && [\because (4.6)] \\ &= d \cdot \left(\frac{3}{d} - r \right)^i. \end{aligned}$$

故に i の値によらず

$$\begin{aligned} h^0(K_V - rX) &\leq d \cdot \left(\frac{3}{d} - r \right)^i + i \\ &\leq 3^2(3+4d) + 3 && [\because 3 \geq dr \geq 1]. \end{aligned}$$

結局 case 1, 2, 3 いずれの場合にも $h^0(K_V - rX) \leq 3^2(3+4d) + 3$ が成りたつ。これと ①式から

$$h^2(rX) \leq P(r)$$

が成りたち ($P(r)$ の定義は p.57 を見よ) 証明は完了した。
 Q.E.D.

References

- [1] S. Abhyankar, *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*, Academic Press, 1966.
- [2] W. L. Baily Jr., *Satake's compactification of V_n* , *Amer. J. Math.*, 80 (1958), 348-364.
- [3] R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, *Lecture Notes in Math.* 156, Springer, Berlin.
- [4] Y. Kawamata, *A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem*, to appear.
- [5] S. L. Kleiman, *Towards a numerical theory of ampleness*, *Ann. of Math.*, 84 (1966), 293-344.
- [6] 小平 邦彦, (山島成徳記), 東大セミナー-1-1-20, Tokyo, 1968.
- [7] T. Matsusaka, *The criteria for algebraic equivalence and the torsion group*, *Amer. J. Math.*, 79 (1957), 53-66.
- [8] T. Matsusaka, *On a characterization of Jacobian variety*, *Memoirs of the College of Science, University of Kyoto* 32 (1959), 1-19.

- [9] T. Matsusaka, *Polarized varieties with a given Hilbert polynomial*, *Amer. J. Math.*, 94 (1972), 1027-1077.
- [10] S. Mori, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, to appear.*
- [11] D. Mumford, *Abelian varieties*, *Tata Studies in Math.*, Oxford Univ. Press, 1970.
- [12] I. Satake, *On the compactification of the Siegel space*, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 20 (1956), 259-281.