代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.270-285

Degenerations of minimal surfaces with non-negative Kodaira dimensions

阪大・理　　角田秀一郎

§0. 非特異射影曲線の退化問題を考えるとき，(準)安定曲線が，重要な役割をはたすことはよく知られている(cf. [1])．そこで，曲面の場合に(準)安定曲線に対応するものはなにかということが問題となる．これに関するひとつの結果をこの拙論においてのべてみたい．

§1. 結果をのべるためにひとつ定義をします．
$\pi: \mathcal{X} \longrightarrow D$ が semistable reduction of minimal surfaces であるとは，次の4つの条件をみたすことをいう([1])：

① $\mathcal{X}$ 3-dim complex mfd,
$D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1\}$,

② π はある projective morphism の localization になっている,

③ t が 0 でないとき, $\pi^{-1}(t)$ は nonsingular minimal surface で, $\kappa(\pi^{-1}(t)) \geq 0$,

④ $\pi^{-1}(0)$ は reduced かつ simple normal crossings.

結果は次の通り.

Theorem 1.1. $\pi: \mathcal{X} \to D$ を semistable reduction of minimal surface とする. このとき, proper (flat) morphism $\pi': \mathcal{X}' \to D$ と birational map $\varphi: \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在して次をみたす:

(0) $\pi' = \pi \cdot \varphi$

(1) $\mathcal{X}'$ は canonical sing しかもたない 3-dim. complex variety,

(2) φ は $\pi'^{-1}(0)$ の外で同型,

(3) $\mathcal{X}'$ の index (cf. [3]) を r とすれば, $\mathcal{X}'$ の dualizing sheaf $\omega_{\mathcal{X}'}$ の r 回 tensor

積の double dual $\omega_{X'}^{[r]}$ は invertible となり, $\omega_{X'}^{[r]}|_{\pi'^{-1}(0)}$ は numerically effective.

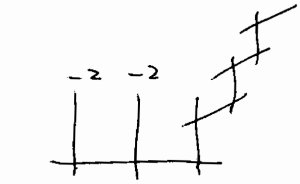
§3 でこの定理の証明の outline を説明しますが, その前に, 証明に必要な open surface theory の結果を §2 において述べます.

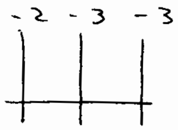
§2. $\overline{Y}$ を normal proj. surface, B を $\overline{Y}$ 上の reduced (Weil) divisor とする. このとき, $(\overline{Y}, B)$ が高々 Kawamata sing. であるとは, 次をみたすことをいう:

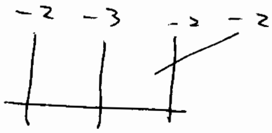
① $P_1, \ldots, P_s, P_{s+1}, \ldots, P_r$ を $\overline{Y}$ の singular point 全体とし, さらに $P_1, \ldots, P_s \in B$, $P_{s+1}, \ldots, P_r \notin B$ とする. このとき, $B - \{P_1, \ldots, P_s\}$ は $\overline{Y} - \{P_1, \ldots, P_r\}$ 上 simple normal crossings;

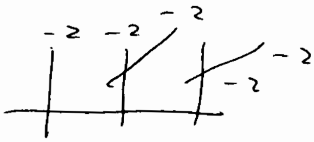
② $P_1, \ldots, P_s \in \mathrm{Reg}(B)$ かつ $P_1, \ldots, P_s$ は cyclic quotient sing. かつ $P_{s+1}, \ldots, P_r$ の minimal resolution は次のいずれか,

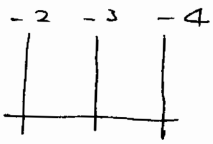
4

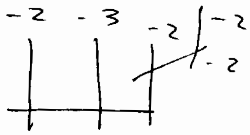

-2 -2

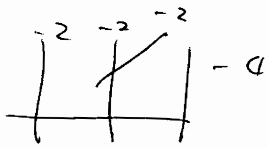

-2 -3 -3

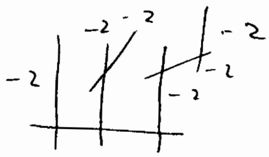

-2 -3 -2 -2

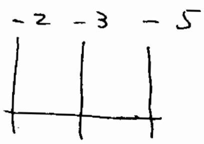

-2 -2 -2 -2 -2

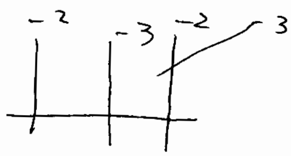

-2 -3 -4

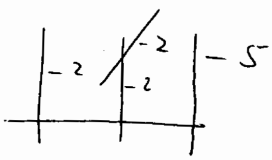

-2 -3 -2 -2 -2

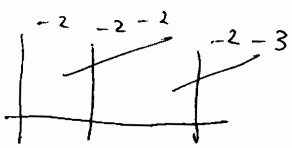

-2 -2 -2 -4

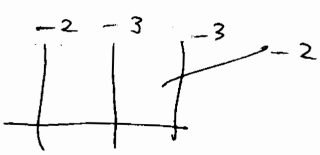

-2 -2 -2 -2 -2 -2

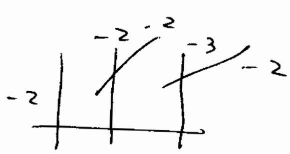

-2 -3 -5

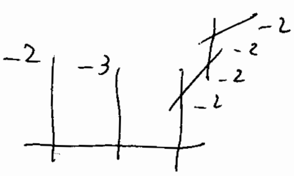

-2 -3 -2 3

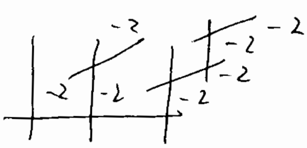

-2 -2 -2 -5


-2 -2 -2 -2 -3


-2 -3 -3 -2


-2 -2 -2 -3 -2 -2


-2 -3 -2 -2 -2 -2


-2 -2 -2 -2 -2 -2 -2

ここで、直線は nonsingular rational curve をあらわし、数字はその curve の self-intersection number をあらわす。

$(\bar{Y}, B)$ を高々 Kawamata sing. をもつ pair とすると、$r(\omega_{\bar{Y}}+B)$ が invertible sheaf となる正整数 r が存在する。この r を $(\bar{Y}, B)$ の index という。

このとき次の定理が成立する。

Theorem 2.1. $(\bar{Y}, B)$ を高々 Kawamata sing. をもつ pair で、index r とする。もし $r(\omega_{\bar{Y}}+B)$ が num. eff. でなければ、$(\bar{Y}, B)$ ~~は~~ 次のいずれかをみたす：

Ⓐ ある同型でない birational morphism $f: \bar{Y} \to \bar{Z}$ が存在して、$(\bar{Z}, f_*(B))$ は Kawamata sing. しかもたない。

Ⓑ ある nonsing. proj. curve C への surj. morphism $\pi: \bar{Y} \to C$ が存在して、すべての fiber

は irreducible で，かつ，general fiber を $Y := \bar{Y} - B$ に制限すると，$\mathbb{P}^1$ または $\mathbb{A}^1$ と同型，

(ハ) $(r(\omega_{\bar{Y}} + B))^{-1}$ が ample で $\bar{Y}$ の picard number は 1.

この定理の証明には Mori theory [2] の open surface への拡張を使います．それをのべるために少し準備をします．

$(\bar{Y}, B)$ を上の通りとして，$N(\bar{Y})$，$\overline{NE}(\bar{Y})$，$\overline{NE}_{\varepsilon}(\bar{Y}, B)$ を次のように定義します．

$N(\bar{Y}) :=$ {1-cycle on $\bar{Y}$}/$(\equiv)$ $\otimes \mathbb{R}$,

$\overline{NE}(\bar{Y}) :=$ effective 1-cycle をふくむ最小の closed convex cone,

$\overline{NE}_{\varepsilon}(\bar{Y}, B) := \{Z \in \overline{NE}(\bar{Y}) \mid (Z, \frac{1}{r}(r(\omega_{\bar{Y}}+B))) \geq -\varepsilon(Z, L)\}$,

ここで ε は正の実数，L は $\bar{Y}$ 上の ample divisor

このとき，次の lemma 2.2 が成立し，これから Theorem 2.2. が導かれます．

Lemma 2.2. 任意の $\varepsilon(>0)$ に対し，curves $C_1, \cdots, C_\ell$ が存在し，次をみたす：

① $\overline{NE}(\overline{Y}) = \sum \mathbb{R}_+[C_i] + \overline{NE}_\varepsilon(\overline{Y}, B)$

② C_i は rational curve で,

$0 > \left(\frac{1}{r}(r(\omega_{\overline{Y}} + B)), C_i\right) \geq -3$.

この lemma 2.2. は [2] における $B=0$, $\overline{Y}$=n-s. の場合の証明と同様です.

Lemma 2.2. の仮定で, ①.②をみたす $C_1, \ldots C_l$ に対して, l を最小にしたときの各 C_i を extremal rational curve w.r.to $\omega_{\overline{Y}} + B$ といいます.

C_iを extremal curve とすると, num. eff divisor H on $\overline{Y}$ で, $H^\perp \cap \overline{NE}(\overline{Y}) = \mathbb{R}_+[C_i]$ をみたすものが存在する。 m を十分大きな整数としたとき, mH に対応する rational map Φ_{mH} が, Theorem 2.1. における $\overline{Y}$ の構造を定める. つまり. $\dim \Phi_{mH} = 2$ ならば, ⓐの case がおき, Φ_{mH} は Th 2.1の記号で, f と一致し, $\dim \Phi_{mH} = 1$ ならば, ⓑがおき, $\Phi_{mH} = \pi$, $\dim \Phi_{mH} = 0$ ならば, Φ_{mH} は $\overline{Y} \to \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ と一致する.

§3. Theorem 1.1 の証明.

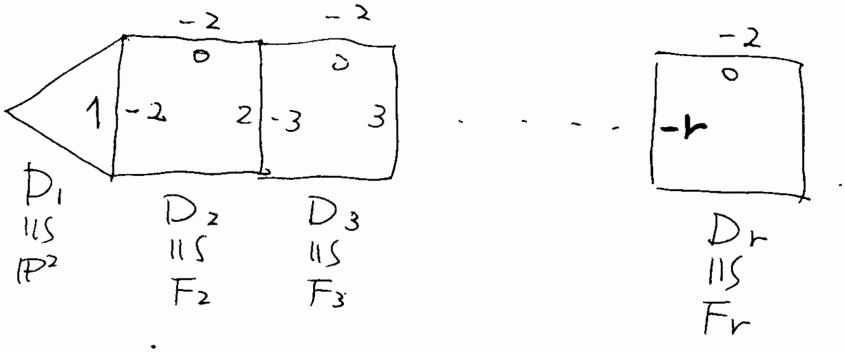
まず，天下り的に次の singularity を定義します.
Y を 3-dim normal complex var., P を Y の singular point で，次の条件をみたすとき，P を type C_r の sing. pt. という：

① $Y - \{P\}$ nonsing.,

② P のある resolution $f: \tilde{Y} \to Y$

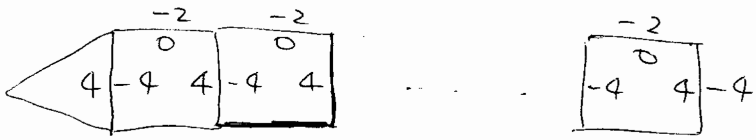
をとると，$f^{-1}(P)$ が次の形：

$f^{-1}(P) = \sum_{i=1}^{r} D_i$ を既約分解とすると，
$\dim D_i = 2$ で，$D_1 \cong \mathbb{P}^2$, $D_i \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i))$
（右辺は Hirzebruch surface で F_i とかく），
さらに，各 D_i は下の図のようにまじわっている.



ここで，lineの両側の数字は対応するcurveのnormal bundleをあらわし，各D_iの中の数字はD_iにおける self-intersection numberであらわし，またF_iはHirzebruch surface $\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(i))$をあらわす．

同様に Pが type D_r の sing. pt. であるとは，あるresolution $f: \tilde{Y}\to Y$ をとったとき，$f^{-1}(P)=\sum D_i$ が次の形のときをいう：



$D_1=\mathbb{P}^2$ $D_2\cong D_3\cong\cdots\cong D_r\cong F_4$.

Proposition 3.1. type C_r, type D_r の sing. pt. は canonical sing. ([3]).

次の lemma 3.2. から Theorem 1.1 は容易に導かれる．

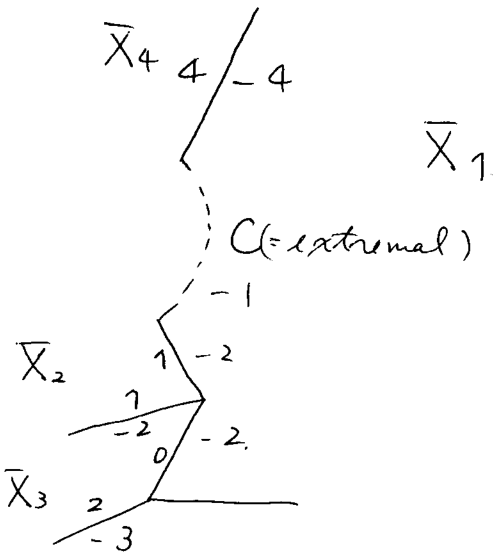
Lemma 3.2. $\pi: \mathcal{X}\to D$ を semi stable

reduction of minimal surfaces とする，ただし条件②のかわりに②′ $\pi^{-1}(0)$ が projective を仮定する．X を $\pi^{-1}(0)$ の既約成分の一部で，X の各連結成分はそれぞれ type C_r，type D_r の sing．を定義しかつその中で，最大のものとする．$\mu: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ を X の contraction，s を $\mathfrak{Y}$ の index とする．
このとき，もし $\omega_{\mathfrak{Y}}^{[s]}$ が num. eff. でなければ，ある birational map $\varphi: \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ が存在して，$\pi \cdot \varphi$ は semistable reduction of minimal surfaces（ただし②′だけをみたす）でかつ $(\pi \cdot \varphi)^{-1}(0)$ の既約成分の個数は，$\pi^{-1}(0)$ の既約成分の個数より少なくなる．

Proof.（Outline）まず，$\omega_{\mathfrak{Y}}^{[s]}$ not num. eff を仮定する．$p = \pi \cdot \mu^{-1}$ とおき，$p^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{l} \bar{Y}_i$ を既約分解とする．このとき，$\mathfrak{Y}$ が高々 type D_r C_r の sing. であることから，$(\bar{Y}_i,\ B_i := p^{-1}(0) - Y_i|_{\bar{Y}_i})$ は高々 Kawamata sing. であることがわかる．一方，$\omega_{\mathfrak{Y}}^{[s]}|_{\bar{Y}_i} = s(\omega_{\bar{Y}_i} + B_i)$ であることに注意する．すると，ある i に対して，$\bar{Y}_i$ が extremal curve を

ふくむことがわかる。さらに C をその extremal curve で、C が他の $\bar{Y}_j$ $(j \neq i)$ にふくまれた場合には、C は $\bar{Y}_j$ においても extremal とならないことがわかる。このとき、C に注目しながら、φ をつくるわけであるが、どの case でも、φ のつくり方は同じようなものなので、次の簡単ではあるが、典型的な場合についてのみ考察しよう。

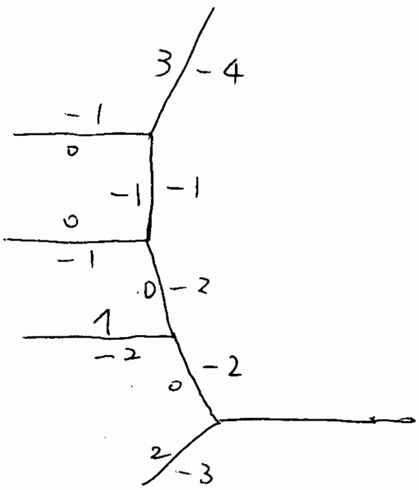
$i=1$ で、$\bar{Y}_1$ の X における proper transform を $\bar{X}_1$ として、他の component が下図のようになっているとする：



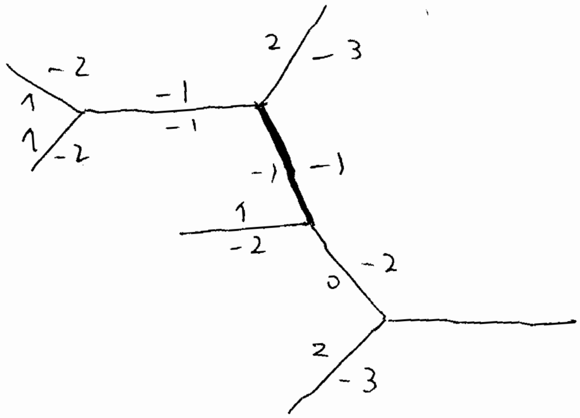
ここで、$\bar{X}_2+\bar{X}_3+\bar{X}_4$ を contraction したのが

せで、$\overline{X}_4$ は type $D_1 (= C_1)$ の sing を定義し、
$\overline{X}_2 + \overline{X}_3$ が type C_2 の sing. を定義する。C は $\overline{X}_1$ において exceptional curve of the first kind である。

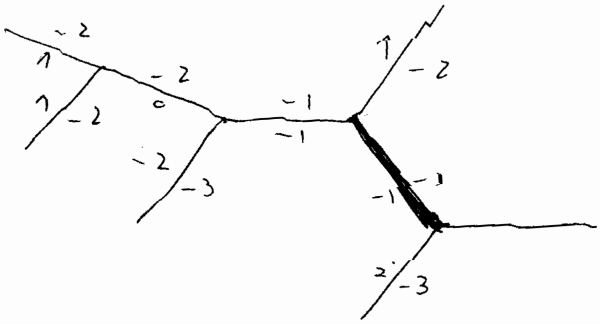
まず、C で blow-up する：



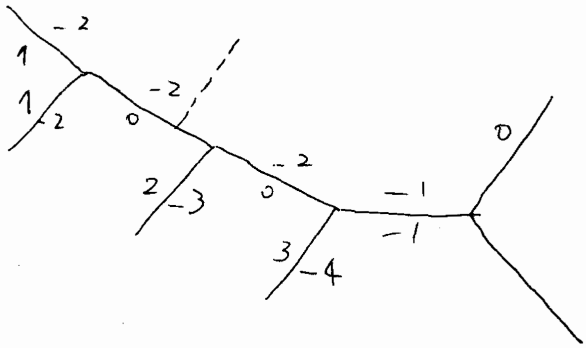
次に normal bundle が $\underbrace{(-1,-1)}_{}$ となっている curve で blow-up して、できた $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を別の方向へ blow-down する（[4]）：



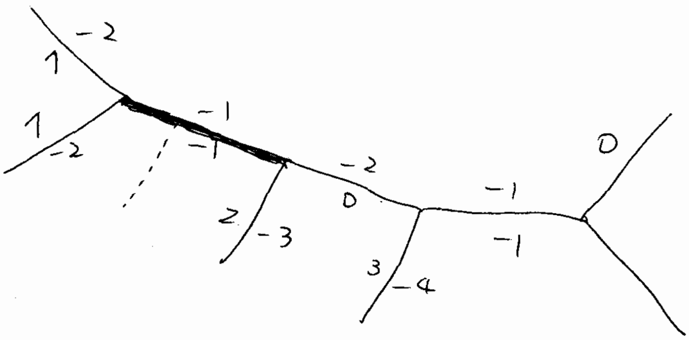
次に上図の太線について同様の操作をし，次の図を得る：



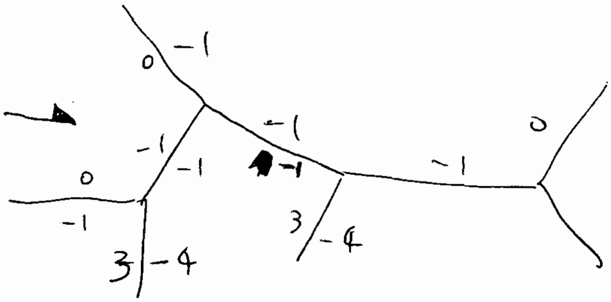
太線について同じ事をやる：



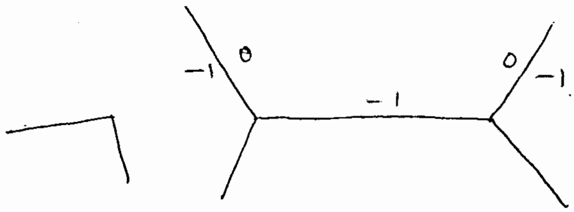
ここでは、X_4 に注目すれば、$X_4 \cong \mathbb{P}^2$ から 4回 blow up したものがでてくる。このことから、点線の位置に $(-1,-1)$ curve が存在することがわかる。そこで、blow-up と blow-down の操作をすると、次の図になる。



太線をもとにして次図をえる;



上の図の矢印のcomponentは nonsing. curve に contract できる (cf.[4]);



次に、はじめの X_4 の proper transform が contract できる。この contraction の結果が X' に対応する。

他の場合にも上と同様のやり方で φ をつくることができる。

References

[1] Deligne, P. and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. Publ. I.H.E.S. 36(1969), P75.

[2] Mori, S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, to appear.

[3] Reid, M. Canonical Threefolds, in Journées de géometrie algébrique d'Angers, ed. A. Beauville, Sijthoff and Noordhoff, Alphen (1980) 273-310.

[4] Nakano, S. On the inverse of monoidal transformations, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 6 (1970-71), 483-502.