i 35

付録（前田博信、東大理 大学院）

$(C \& \mathbb{P}^2)$ の分類理論において S_ℓ 上で $\dim|C_\ell| \geqq 1$ となる場合は議論が比較的容易になる．例として紹介する以下の結果は1870年代のM. NoetherやE. Bertini等によるものである．

(i) $\dim|C_\ell| = 1$, $g(C_\ell) = 0$ のとき

$$0 \to \mathcal{O}_{S_\ell} \to \mathcal{O}_{S_\ell}(C_\ell) \to \mathcal{O}_{C_\ell}(C_\ell) \to 0 \quad ,$$

$h^0(\mathcal{O}_{S_\ell}(C_\ell)) = 2$, $h^1(\mathcal{O}_{S_\ell}) = 0$ より $(C_\ell^2) = 0$．故に $|C_\ell|$ は底点なし．$\tilde{\varphi} := \Phi_{|C_\ell|} : S_\ell \to \mathbb{P}^1$ は一般ファイバーが $\mathbb{P}^1$ の全射固有正則写像である．$\tilde{\varphi}$ の可約なファイバーは必ず第一種例外曲線を含むから、これらをつぶしてゆくと幾何学的線織面 $\varphi : F_n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を得る．但し $F_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$．$|C_\ell|$ は φ のファイバーからなる一次系 $|f_n|$ に変換される．$|f_n|$ はelementary変換で F_1 上の一次系 $|f_1|$ と同値である．これを $\mathbb{P}^2$ へ移すと $|H|_p$，即ち1点 p を通る直線全体からなる一次系となる．

$$\begin{tikzcd}
 & & V \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & S_\ell \arrow[r] \arrow[dl] & F_n & F_1 \arrow[dr] & \\
\mathbb{P}^2 \arrow[rrrr, dashed, "\text{Cremona変換}"] & & & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

〃 36

(ii) $\dim|C_\ell|=1$, $g(C_\ell)=1$ のとき.

C は Cremona 変換で $\mathbb{P}^2$ 上 $3m$ 次曲線で 9 個の m 重点をもつものにうつる。以下証明

(i) と同様に $(C_\ell^2)=0$ となり $|C_\ell|$ は底点なし。

$\tilde{\varphi}:=\Phi_{|C_\ell|}: S_\ell\to\mathbb{P}^1$ は elliptic fibering である. $\tilde{\varphi}$ の特異ファイバー中の第一種例外曲線をつぶして極小な elliptic fibering $\varphi:S\longrightarrow\mathbb{P}^1$ を得る.

補題 有理曲面 S が極小な elliptic fibering をもつとき双有理正則写像 $S\to\mathbb{P}^2$ が存在する.

(∵)

まず S 上の非特異有理曲線 E は $(E^2)\geqslant -2$ となることを示す. $(E^2)<-2$ とすると adjunction formula により $(E\cdot K(S))>0$. 一方 $(K(S)^2)=0$ 及び $P_2(S)=0$ から Riemann-Roch により $|-K(S)|\neq\emptyset$. $p_g(S)=0$ より $D\in|-K(S)|$ は 0 ではない. $(E\cdot D)<0$ より E は D の成分である. elliptic fibering の一般元を F とすると adjunction formula から $(F\cdot K(S))=0$. 故に $(F\cdot D)=0$ となり D は elliptic fibering の垂直成分となるから E は elliptic fibering の特異ファイバーの成

分となる．小平の分類理論によればこのようなEは$(E^2)=-2$となり矛盾．

さてSは$(K(S)^2)=0$なる有理曲面だから適当なF_nから8点（無限に近くともよい）をblowing upして得られる．ここでnを最小にとることにすると上の考察から$n=0$又は1となることが分かる．従ってSは$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$の1点blowing up又は$F_1$をdominateしているからblowing downの順序を変えてやれば$\mathbb{P}^2$をdominateする． Q.E.D.

上の補題からSは$\mathbb{P}^2$上の9点$P_1,\cdots,P_9$（無限に近い点でもよい）をblowing upして得られる．

$D\in|-K(S)|$に対して$\mathcal{O}_S(-D)\simeq\omega_S$．

$$0\to\omega_S\to\mathcal{O}_S\to\mathcal{O}_D\to 0$$

は完全で$h^0(\omega_S)=h^1(\mathcal{O}_S)=0$より$h^0(\mathcal{O}_D)=1$．

従ってDは連結かつ被約．一方補題の証明でみたようにDは$(F\cdot D)=0$かつ$(D^2)=0$．従ってあるファイバーF_0により$D=rF_0$, $r\in\mathbb{Q}$, $r\neq 0$と表わせる．$F_0=r^{-1}D$は整因子でDは被約だから$r^{-1}\in\mathbb{Z}_+$．$m=r^{-1}$とおくと

№ 38

$F \sim mD$. ところで $D \sim -K(S) \sim 3H - E_1 - \cdots - E_q$ であったから

$$|F| = |3mH - mE_1 - \cdots - mE_q| .$$

いいかえると S は $\mathbb{P}^2$ 上の一次系 $|3mH|_{mP_1+\cdots+mP_q}$ の底点を除去して得られる.

$$\begin{tikzcd} & S_\ell \arrow[r] \arrow[dl] & S \arrow[dr] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[rrr, dashed, "\text{Cremona変換}"] & & & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

C は上の Cremona 変換で $|3mH|_{mP_1+\cdots+mP_q}$ の元となる。

(iii) $\dim |C_\ell| = 1$, $g(C_\ell) \geq 2$. のとき.

$g(C_\ell) = 2$ のとき C は Cremona 変換で次のいずれかになることが知られている. (M. de Franchis)

(a) $\{4;\ 2^1\}$ (b) $\{5;\ 3^1, 2^1\}$ 但し 2 重点は 3 重点に無限に近い. (c) $\{6;\ 2^8\}$ (d) $\{7;\ 3^1, 2^{10}\}$

(e) $\{9;\ 3^8, 2^2\}$ (f) $\{13;\ 5^1, 4^9\}$.

これらはいずれも N-minimal である.

$g(C_\ell) = 3$ の場合も de Franchis の結果がある.

$g(C_\ell) \geq 4$ については不明.

v 39

(iv) $\dim|C_\ell| \geq 2$, $g(C_\ell) = 0$ のとき

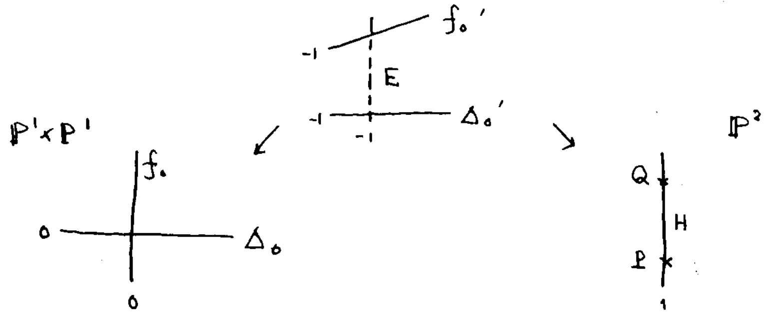
$$0 \to \mathcal{O}_{S_\ell} \to \mathcal{O}_{S_\ell}(C_\ell) \to \mathcal{O}_{C_\ell}(C_\ell) \to 0$$

において $h^0(\mathcal{O}_{S_\ell}(C_\ell)) = \ell + 1$ とおくと $(C_\ell^2) = \ell - 1$.
$|C_\ell|$ を C_ℓ に制限すると very ample だから $|C_\ell|$ は底点なし、$\tilde{\varphi} := \Phi_{|C_\ell|} : S_\ell \longrightarrow \mathbb{P}^\ell$ は正則写像となる。$\tilde{\varphi}$ を C_ℓ に制限すると $C_\ell \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell-1}$ は $\mathbb{P}^1$ の rational normal curve としての埋めこみであるから $\deg \tilde{\varphi}(S_\ell) = \ell - 1$.
従って $\tilde{\varphi}$ は双有理正則写像で $S := \tilde{\varphi}(S_\ell)$ は $\mathbb{P}^\ell$ 内の次数 $\ell-1$ の有理曲面である。ところがこのような S 及び超平面切断は分類できていて次の通り

	S	H_S	
(a)	$\mathbb{P}^2$	H	
(b)	$\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$	$2H$	(Veronese)
(c)	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{2k+1}$	$\Delta_0 + k f_0$.	
(d)	$\mathbb{F}_n \subset \mathbb{P}^{2k+1+n}$	$\Delta_n + k f_n$	$(n \geq 2)$.

但し Δ_n は $(\Delta_n^2) = -n$ なる $\mathbb{F}_n$ の section で f_n は fiber. これらを elementary 変換で $\mathbb{P}^2$ へひきもどせばよい。例えば (c) では

vi 40



$$\Delta_0 + k f_0 \sim \Delta_0' + E + k(f_0' + E)$$

$$\sim (k+1)(E + f_0' + \Delta_0') - k\Delta_0' - f_0'$$

$$\sim (k+1)H - kP - Q \;.$$

従って $\mathbb{P}^2$ 上では $|(k+1)H|_{kP+Q}$ となる．すなわちCはCremona変換で k 重点を1つもつ $(k+1)$ 次曲線になる．C一個だけならde Jonquières変換で直線に還元できるが $|(k+1)H|_{kP+Q}$ を一斉に直線全体からなる一次系 $|H|$ にすることは不可能である．ここに曲線一個だけを扱う立場と一次系の一員とみる立場との間に違いが生じてくる．しかし $\dim|C_k| = 0$ なら両者は一致せざるを得ない．余談はともかく，まとめると，$|H_k|$ は $\mathbb{P}^2$ 上では (a) $|H|$ (b) $|2H|$ (c) $|(k+1)H|_{kP+Q}$
(d) $|kH|_{(k-1)P+Q_1+\cdots+Q_{n-1}}$ 但し $Q_1, \cdots, Q_{n-1}$ は P に無限に近い，となる．

(v) $\dim |C_\ell| \geq 2$, $g(C_\ell) = 1$ のとき.

(iv) と同様の議論で $S := \Phi_{|C_\ell|}(S_\ell)$ は $\mathbb{P}^\ell$ 内の次数 ℓ の有理曲面である。このような S は

	S	H_S	
(a)	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^8$	$2\Delta_0 + 2f_0$	
$(b)_s$	$9-s$ 次 del Pezzo 曲面 $\subset \mathbb{P}^{9-s}$	$\lvert 3H \rvert_{p_1+\cdots+p_s}$ 但し $\mathbb{P}^2$ 上.	$(0 \leq s \leq 6)$

となる. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の $|2\Delta_0 + 2f_0|$ は $\mathbb{P}^2$ 上では $|4H|_{2p_1+2p_2}$ となる.

(vi) $\dim |C_\ell| \geq 2$, $g(C_\ell) \geq 2$ のとき

手のつけようもない "general type" のような気もするが、例えば $|C_\ell|$ が superabundant でなく $\dim |C_\ell| = 3$, $g(C_\ell) = 2$ を仮定すると問題は $\mathbb{P}^3$ 内の有理4次曲面の分類になる. Bertini によれば このような C は Cremona 変換で $\{6; 2^8\}$ 又は $\{4; 2^1\}$ にうつる. これらに対応する4次曲面の定義方程式は [J] の Chap. VIII を参照のこと. 筆者は $\mathbb{P}^3$ の4次曲面に詳しくないのでここには責任をもって書けない.

References

[0] E. Bertini, Ricerche sulle transformazioni univoche involtotie nel piano, Ann. di Math. 3 (2), (1877), 244-286.

[1] J. L. Coolidge, A treatise on Algebraic Plane Curves, Oxford (1931).

[1.5] H. Hudson, Cremona Transformations in Plane and Space, Cambridge (1927).

[2] S. Iitaka, Basic structure of algebraic varieties, Part II. Cremona transformations and logarithmic Kodaira dimension, to appear.

[3] ________, Minimal model for birational pair, to appear in some Korean J.

[4] N. Mohan Kumar and P. Murthy, Curves with negative self-intersection on rational surfaces, to appear.

[5] S. Suzuki, On Kodaira dimension for birational pairs, to appear.

[6] ————, 代数多様体の対数的種数について. Master Thesis, Chiba University, 1981. 3.

[B] L. Berzolari, Algebraische Transformazionen und Korrespondenzen, Enzy. III., 1781-2218, 1933.

[C] A. B. Coble, Planar Cremona transformations, in selected topics in algebraic geometry, 79-115, 1970, 2nd edition, Chelsea.

[J] C. M. Jossep, Quartic Surfaces with Aingular Points. Cambridge University Press, 1916.

[F] M. de Franchis, Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2, Rendi Conti. Palermo., 13, 1-27, 1899.

[G1] G. B. Guccia, Generalizazione di un teorema di Noether, Rendi Cont. Palermo, 139-186, (1886).

[G2] G. B. Guccia, Sulla reduzioni dei sistemi lineari di curve ellitiche, ibid., 168-189, (1887).