代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.181-202

Algebraic cycles on abelian varieties with many real endomorphisms.

東大　理　硲　文夫

§1.

$\mathbb{C}$ 上定義されたアーベル多様体 A に対し，その準同型環を $\mathrm{End}(A)$，また，$\mathrm{End}(A)\otimes\mathbb{Q}$ を $\mathrm{End}^0(A)$ と書く．ここでは次のような性質をもつアーベル多様体を考える：

(1.1)　$\mathrm{End}^0(A) \supset F =$ "$\mathbb{Q}$ 上の総実代数体の積" で，$[F:\mathbb{Q}] = \dim A$.

これについて，次の結果が得られる：

定理（1.2）

　Aが上の条件（1.1）を満たすとする。さらに，Aの単純成分（isogenyの意味での）として，2次元以上のCM型アーベル多様体は現われないものと仮定する。このとき，AのHodge環 $\mathscr{B}^*(A)$ は $\mathscr{B}^1(A)$ で生成される．特にAについて，Hodge予想が成り立つ．

　ここに，Hodge環 $\mathscr{B}^*(A)$ とは次のように定義される$\mathbb{Q}$上のgraded ringである：

$$(1.3) \quad \mathscr{B}^*(A) = \bigoplus_{d=0}^{g} \mathscr{B}^d(A)$$

$$= \bigoplus_{d=0}^{g} \left(H^{2d}(A, \mathbb{Q}) \cap H^{d,d}(A) \right).$$

上の定理の重要な応用として，次の結果が得られる：

定理 (1.4)

modular curve $X_1(N)$ (resp. $X_0(N)$) のヤコビ多様体 $J_1(N)$ (resp. $J_0(N)$) について, $\mathcal{B}^*(J_1(N))$ (resp. $\mathcal{B}^*(J_0(N))$) は $\mathcal{B}^1(J_1(N))$ (resp. $\mathcal{B}^1(J_0(N))$) で生成される. 特に $J_1(N)$, $J_0(N)$ に対して, Hodge 予想が成り立つ.

この定理は, $J_1(N)$, 従って $J_0(N)$, が定理 (1.2) の仮定を満たす (Shimura [4]) という著しい事実から直ちに導かれる.

§ 2.

目標は上の定理 (1.2) を証明することである. その際, Ribet による次の命題は非常に有用である:

命題 (2.1) (Ribet, [3] Lemma 2.1)

ある体上定義された d 次元のアーベル多様体 A に対し, $\mathrm{End}^0(A)$ が次数 $t > d$

の体 F を含むとする．そのとき，必然的に $t=2d$ となり，しかも，F は総虚となる．

まず (1.1) の F が次のように分解されたとする：

$$(2.2)\quad F = F_1 \times \cdots \times F_s,$$
F_i $(1 \leq i \leq s)$ は総実代数体．

すると，これに応じて A も次のように分解される：

$$(2.3)\quad A \underset{(\text{isogeny})}{\sim} A_1 \times \cdots \times A_s$$
$\mathrm{End}^0(A_i)$ は F_i を含み，$[F_i : \mathbb{Q}] = \dim A_i$ $(1 \leq i \leq s)$．

そこで，この右辺に現われるような A_i を分類することが必要になる：

5

命題（2.4）

アーベル多様体 A に対し，$\mathrm{End}^0(A)$ はある総実代数体 F で $[F:\mathbb{Q}]=\dim A$ を満たすものを含むとする．さらに A は2次元以上のCM型アーベル多様体を単純成分として含まないと仮定する．すると A は次のうちのどれか一つに isogenous である：

1) A_1^n ；ここに A_1 はⅠ型の単純アーベル多様体で（"Ⅰ型"云々については Mumford [2] §21 を参照）$\mathrm{End}^0 A_1$ が $(\dim A_1)$-次の総実代数体となるもの，

2) A_2^n ；ここに A_2 はⅡ型の単純アーベル多様体で，$\mathrm{End}^0 A_2$ の中心が $\frac{1}{2}(\dim A_2)$-次の総実代数体となるもの，

3) E^n ；ここに E はCM型の楕円曲線．

6

命題（2.4）の証明］ A を単純成分に分解する：

$$A \sim A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k} \quad (A_i \not\sim A_j).$$

これに対応して，$\mathbb{Q}$-algebra の同型が得られる：

$$\varphi : \mathrm{End}^0(A) \xrightarrow{\cong} M_{n_1}(\mathrm{End}^0(A_1)) \times \cdots \times M_{n_k}(\mathrm{End}^0(A_k)).$$

ここで，$i = 1, \cdots, k$ に対し，

$$p_i = (i\text{-th projection}) \circ \varphi$$
$$: \mathrm{End}^0(A) \longrightarrow M_{n_i}(\mathrm{End}^0(A_i))$$

とおくと，$p_i(F)$ は $M_{n_i}(\mathrm{End}^0(A_i))$ において 0 となるかまたは F と同型な部分体となる．もしも k が 1 より大きいとすると，このことから，ある i に対して $\mathrm{End}^0(A_i^{n_i})$ が F を含むことになり，しかも $\dim A_i^{n_i} \lneqq [F : \mathbb{Q}]$

7

である．すると(2.1)によって，Fは総虚とならざるを得ずこれは矛盾．従って $k=1$ である，すなわち，

$$A \sim A_1^n \text{，} A_1 \text{はある単純アーベル多様体．}$$

以下，この A_1 がIII型でもIV型(CM型以外の)でもあり得ないことを示す．まず，A_1 がIII型であると仮定する．$D_1 = \mathrm{End}^\circ A_1$，$K_1 = \mathrm{Cent}\, D_1$ (= D_1 の中心)と書くことにする．D_1 が K_1 上の定値四元数環になるというのがIII型の定義であった．しかし，仮定により，$M_{n_1}(D_1)$ は総実代数体 F を含む，しかも次数についての仮定から F は $M_{n_1}(D_1)$ の極大部分体である．(F は K_1 を含んでいることに注意．これは例えば Ribet [3], Th. 2.3 の証明の論法で解る．)すると，環論の一般的な定理により，D_1 は F 上で split する：

8

$$D_1 \otimes_{K_1} F \cong M_2(F).$$

ところが，Fの一つの$\mathbb{R}$への埋め込みをとって，それによる係数拡大を考えると，

$$\begin{aligned} D_1 \otimes_{K_1} \mathbb{R} &\cong D_1 \otimes_{K_1} F \otimes_F \mathbb{R} \\ &\cong M_2(F) \otimes_F \mathbb{R} \\ &\cong M_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

これはD_1がK_1上の定値四元数環であることに反する．よってA_1はIII型ではない．次に，A_1はCM型以外のIV型とする．このときも上と同様にFが$\mathrm{End}^0(A_1)$の中心を含む（この中心は総虚）ことから矛盾が出る．よって命題(2.4)が証明できた．

次に，命題(2.4)の3つの場合それぞれについて，Hodge群のLie環を決定する．

9

ここで，アーベル多様体の Hodge 群の定義と基本的な性質を思い出しておく．$V = H_1(A, \mathbb{Q})$ とおくと，$V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ には複素構造が与えられている．それを，実代数群の準同型（$\mathbb{R}$上の）

$$\varphi : T \to GL(V)$$

ここに，Tは$\mathbb{R}$上の１次元 compact トーラス，すなわち

$$T_{\mathbb{R}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

が与えられている，と言いかえることができる．

定義（2．5）

アーベル多様体 A の Hodge 群とは，$GL(V)$の$\mathbb{Q}$上定義された部分代数群でその$\mathbb{R}$への係数拡大した群が$\varphi(T)$を含むようなもののうちで最小のもの，のことをいう．$Hg(A)$と書かれる．

10

定義はこのように複雑であるが，代数群としては次のような，非常によい性質をもっている：

定理（2.6）（Mumford, [1]）

$Hg(A)$は connected, reductive であり compact center をもつ．また，その semi-simple part は hermitian type である．

また，次のようにして，Hodge群が解れば，Hodge環 $\mathcal{B}^*(A)$ の構造を決めることができる．

命題（2.7）（Mumford, [1]）

1) $\mathcal{B}^*(A) \cong [\Lambda^*(H^1(A,\mathbb{Q}))]^{Hg(A)}$,

すなわち $\Lambda^*(H^1(A,\mathbb{Q})) \cong \Lambda^*(H_1(A,\mathbb{Q})^*)$ の $Hg(A)$-不変元全体の空間．

従って（$Hg(A)$が connected であることに注意して）

2) $\mathcal{B}^*(A) \otimes \mathbb{C} \cong [\Lambda^*(H^1(A, \mathbb{C}))]^{Lie(Hg(A)_{\mathbb{C}})}$.

$\mathrm{End}^0(A)$については,

3) $\mathrm{End}^0(A) \cong \mathrm{End}_{Hg(A)}(H_1(A, \mathbb{Q}))$.

更に,次の事実が知られている:

命題(2.8)(Tankeev,[5], Lemma 1.4)

もし $\mathrm{End}^0(A)$の中心が総実体の直積ならば,従ってAが I, II, III 型の積ならば $Hg(A)$は semi-simple である.

命題(2.9)

任意のアーベル多様体Aと任意の$n \geq 1$に対し,

$$Hg(A^n) \cong Hg(A).$$

しかも $Hg(A) \xrightarrow{\cong} Hg(A^n) \to GL(H_1(A^n, \mathbb{Q})) \xrightarrow{\cong} GL(H_1(A, \mathbb{Q}) \oplus \cdots \oplus H_1(A, \mathbb{Q}))$ は diagonal action で与えられる.

よって　$Hg(A^n)$ の決定は $Hg(A)$ の決定に帰着される．

さて，本題にもどる．命題 (2.4) の 1) の場合について $Lie(Hg(A)_{\mathbb{C}})$ を決定したい．それには次の命題を示せば十分である：

命題 (2.10)
A は g 次元のアーベル多様体で，
$End^0(A)$ が $\mathbb{Q}$ 上 g 次の総実代数体に同型であるとする．そのとき，

$$Lie(Hg(A)_{\mathbb{C}}) \cong \underbrace{sl(2,\mathbb{C}) \times \cdots \times sl(2,\mathbb{C})}_{g\text{個}}.$$

命題 (2.10) の証明］まず，命題 (2.7) の 3) より，$\mathfrak{g} = Lie(Hg(A)_{\mathbb{C}})$ とおいて，

$$End_{\mathfrak{g}} V_{\mathbb{C}} \cong \underbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_{g\text{個}}.$$

($V = H_1(A, \mathbb{Q})$ とおいた.) 従って, Schur の lemma により, $\mathfrak{g}$-module としての同型:

$$V_{\mathbb{C}} \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_g, \quad V_i \not\cong V_j,$$
(V_i は既約)

を得る. $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2g$ であるが, 実は, $\dim_{\mathbb{C}} V_i = 2$ $(1 \leq i \leq g)$ であることが表現論の一般的な論法によって解る(極めて初等的かつ冗長な論法によって示すこともできる). ところが, semi-simple Lie 環($\mathfrak{g}$ がそうであることは命題(2.8)による)で忠実な既約2次元表現をもつものは $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ しかない. よって $\mathfrak{g}$ の End V_i への projection を $\mathfrak{g}_i$ とおくと,

$$\mathfrak{g}_i \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_g$ は明らかで, $=$ が成り立つことを示したい. そのためには $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{End}(V_i \oplus V_j)$ への projection $\mathfrak{g}_{ij}$ $(1 \leq i < j \leq g)$ が $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j$ となることを示せばよい(Ribet [6], P. 790).

しかし，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の部分Lie環は0か全体か同型 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のグラフしかあり得ないことと，$V_i \not\cong V_j$ であることを考え合わせれば $\mathfrak{g}_{ij} \cong \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ となることが解る．よって，

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_g$$

$$\cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}).$$

（実はこのことと，$Hg(A)$ がある F 上のnon-degenerateな双一次形式を不変にすることから，

$$Hg(A) \cong SL(2, F)$$

であることも解るが $\mathcal{B}^*(A)$ の計算とは直接関係しないので，ここでは立ち入らない。）

ところが，g個の互いにisogenousでないCM型でない楕円曲線 $E_1, \cdots, E_g$ をとって，$B = E_1 \times \cdots \times E_g$ とおくと，表現

$$\rho : \mathcal{L}ie(Hg(B)_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{End}(H_1(B, \mathbb{C}))$$

が，上の表現と同値になる．従って，$\mathscr{B}^*(A)$ の決定は $\mathscr{B}^*(B)$ の決定に帰着され，しかもこのような楕円曲線の直積については，$\mathscr{B}^*(B)$ は $\mathscr{B}^1(B)$ で生成されることはよく知られている（直接 $sl(2, \mathbb{C})$ の不変式を計算してもできる）から，命題(2.4)の1)の場合については，$\mathcal{L}ie(Hg(A)_{\mathbb{C}})$ の決定と同時に，主定理(1.2)も証明できたことになる．命題(2.4)の2)の場合についてもほとんど同様にして楕円曲線の場合に帰着され，結局主定理(1.2)がいくつかの楕円曲線の積のときの証明に帰せられて証明が完了するのである．

16

§3.

定理(1.2)の証明からもわかるように，アーベル多様体 A が (1.2) の仮定を満たせば A 1個だけでなく一般に自分自身の n $(\geqq 1)$ 個の直積 A^n についても $\mathscr{B}^*(A^n) = \mathscr{D}^*(A^n)$ が成り立っている．このような A を stably non-degenerate ということにする．すなわち，

(3.1) A が stably non-degenerate
(以下 "SND" と略す)
$\Longleftrightarrow$ すべての $n \geqq 1$ について
$\mathscr{B}^*(A^n) = \mathscr{D}^*(A^n)$.

(ここに $\mathscr{D}^*(X)$ とは $\mathscr{B}^*(X)$ の中で divisor の交わりによって生成される $\mathbb{Q}$ - subalgebra である．)

この性質について次のような命題が成り立つ:

17

命題（3．2）

アーベル多様体 A，B について，$A \subset B$ であるとする．このとき，B が（SND）なら A も（SND）．

証明］（SND）という性質は isogeny で不変だから $B = A \times A'$ としてよい．すると，A^n（ある $n \geqq 1$ について）上に $\mathfrak{D}^*$ の元でない $\mathfrak{B}^*$ の元があれば，それは B^n においても $\mathfrak{D}^*$ の元ではあり得ない．

命題（3．3）

アーベル多様体 A について，A が（SND）であることと，A^n（ある $n \geqq 1$）が（SND）であることとは同値である．

証明］命題（3．2）と（SND）の定義からすぐわかる．

命題 (3.4)

$A \sim A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k}$ (A_i は単純で $A_i \not\sim A_j$ $(i \neq j)$) と isogeny 分解されたとする．このとき，A が (SND) であることと，$A_1 \times \cdots \times A_k$ が (SND) であることとは同値．

証明] 十分大きい N をとれば (たとえば $N = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$) $(A_1 \times \cdots \times A_k)^N \supset A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k}$ であることに注意すれば (3.2) と (3.3) から出る．

我々の目標は (SND) であるための一つの必要十分条件を与えることである．そのために "reduced dimension" ($\mathrm{rdim}(A)$ と書く) という概念を定義する：

定義 (3.5)

A が単純アーベル多様体のときは，

19

$$\mathrm{rdim}(A) = \begin{cases} \dim A & A \text{ が I 型} \\ \frac{1}{2}\dim A & \text{〃 II 型} \\ \dim A & \text{〃 III 型} \\ \frac{1}{d}\dim A & \text{〃 IV 型} \end{cases}$$

（ここに A が IV 型のとき

$d = [\mathrm{End}^0(A) : \mathrm{Cent}\,\mathrm{End}^0(A)]$ とおいた）

一般には $A \sim A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k}$（$A_i$ は単純，$A_i \nsim A_j$ $(i \neq j)$）と isogeny 分解して，

$$\mathrm{rdim}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rdim}(A_i)$$

と定義する．

また，Hodge 群については

命題（3.6）

$$Hg(A_1^{n_1} \times \cdots \times A_k^{n_k}) \cong Hg(A_1 \times \cdots \times A_k)$$

が成り立つことも直ちに示せる．

これで，目標の必要十分条件を述べることができる．すなわち，

定理（3．7）

アーベル多様体 A が（SND）である．

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathrm{rank}\ Hg(A)_{\mathbb{C}} = \mathrm{rdim}(A).$$

注意．命題（3．4），（3，6）及び定義（3．5）より，（SND）であること，$\mathrm{rang}\ Hg(A)_{\mathbb{C}}$，$\mathrm{rdim}(A)$ の3つは，A の“ダブりをおとす”（すなわち，$A_1^{n_1}\times\cdots\times A_k^{n_k}\Rightarrow A_1\times\cdots\times A_k$）操作によって不変である．従って（3．7）の定式化はそう不自然でもないと思われる．証明はここでは述べないことにする（詳細は今準備中の欧文の論文に書くつもりです）．

参考文献

[1] D. Mumford : A note on Shimura's paper "Discontinuous groups and abelian varieties". Math. Ann. 181 (1969), 343 - 351.

[2] D. Mumford : Abelian varieties. Tata - Oxford Univ. Press, 1970.

[3] K. Ribet : Endomorphisms of semi-stable abelian varieties over number fields. Ann. of Math. 101 (1975), 555 - 562.

[4] G. Shimura : On elliptic curves with complex multiplication as factors of the Jacobians of modular function fields. Nagoya Math. J. 43 (1971), 199 - 208.

[5] S. G. Tankeev : On algebraic cycles on abelian varieties, II. Izv. Akad. Nauk SSSR. 43 (1979), 418 - 429.

[6] K. Ribet : Galois action on division points of abelian varieties with real multiplications.

Amer. J. Math. 98 (1976), 751-804.