代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.108-119

Affine環の部分環について

阪大　理　　小野田信春

以下では、体k上のAffine環、即ち、体k上有限生成整域Aの部分環Rで、kを含むものを考察の対象とする。このような環の中には例えば、必ずしも完備でない代数多様体Xの正則関数環$k[X]$や、Affine環Aに群Gが作用している場合の不変部分環A^G等、重要なものが含まれるので、このような環について調べておくことは意味のあることと思われる。これについては、考えるべき問題として、次の2つが挙げられると思う。

(1)　どのような条件のもとで、Rは再びk上のAffine環になるか。

(2)　Rはどのような（Affine環と類似の）性

質をもつか。

ここでは主として、(1)の問題について考えてみたい。そのために、まず、Rのイデアル $\mathcal{A}(R)$ を次のようにして定義する。

命題1　体 k 上の affine 環 A の部分環 R に対して、

$\mathcal{A}(R) = \{ a \in R \,;\, R_a$ は k 上の affine 環 $\} \cup \{0\}$

と定義すると、$\mathcal{A}(R)$ は R の (0) でないイデアルである。但し、ここで、$R_a = R[\frac{1}{a}]$.

証明　A は R 上代数的であると仮定してよい。実際、そうでないときは、$P \cap R = (0)$ となる A の素イデアル P のうち、包含関係について極大なものをとり、A を A/P で置き代えればよい。そこで、$A = k[x_1, \cdots, x_n]$ として、

$f_i(X) = a_{i0} X^{m_i} + a_{i1} X^{m_i - 1} + \cdots + a_{im_i}$　　$a_{ij} \in R$

を、x_i を根にもつ R 上の多項式とする。$B = k[\{ a_{ij} \,;\, 1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq m_i \}]$ とし、$a = a_{10} \cdots\cdots a_{n0}$ とおくと、$B_a \subseteq R_a \subseteq A_a$ かつ、容易にわかるよ

うに、A_a は B_a の整拡大である。一方、A_a は B_a 上有限生成ゆえ、A_a は B_a－加群として有限生成となる。従って中間環 R_a も有限生成 B_a－加群であり、B_a が Affine 環ゆえ R_a も Affine 環となることがわかる。よって、$a \in \mathfrak{A}(R)$ を得、$\mathfrak{A}(R) \neq (0)$ が示された。$\mathfrak{A}(R)$ がイデアルをなすことの証明は省略する。

次の補題を述べる前に、ことばを一つ定義する。一般に、局所環 S が体 k 上の局所域であるとは、k 上のある Affine 環 B および B の素イデアル $\mathfrak{p}$ があって、$S = B_{\mathfrak{p}}$ となることをいう。

補題 2　体 k 上の Affine 環 A の部分環 R と、R の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対し、$R_{\mathfrak{q}}$ が k 上の局所域であるための必要十分条件は、$\mathfrak{A}(R) \not\subset \mathfrak{q}$ となることである。

証明　充分性は明らかゆえ、必要性だけを

示す。$R_{\mathfrak{q}}$が局所域になったとすると、定義より、あるAffine環Bと、Bの素イデアルPとがあって、$R_{\mathfrak{q}} = B_P$となる。ここで、$B \subseteq R$と仮定してもよい。B'およびR'をそれぞれBおよびRの整包閉とする。$\mathfrak{q}'$を$\mathfrak{q}$の上にあるR'の素イデアルとし、$P' = \mathfrak{q}' \cap B'$とおく。すると容易にわかるように、$R'_{\mathfrak{q}'} = B'_{P'}$となる。そこで、

$$F = \{ Q \in \mathrm{Spec}\, B' \,;\ \mathrm{ht}\, Q = 1 \text{ かつ } B'_Q \not\supseteq R' \}$$

とおく。このとき、Fは有限集合である。実際、$0 \neq a \in \mathcal{A}(R)$なる$a$をひとつ選ぶと、$R_a$はAffine環ゆえ、その整閉包$R'_a$も再びAffine環である。従って$R'_a$は$B'$上有限生成であり、かつ$R'_a$と$B'$は同じ商体をもつから、ある$0 \neq b \in B'$に対して、$B'_b \supseteq R'_a \supseteq R'$となる。このとき、容易にわかるように、$F$は$b$の極小素因子全体が作る集合の部分集合になる。よってFは有限集合である。そこで、$F = \{ P'_1, \cdots, P'_n \}$とし、$P_i = P'_i \cap B$とおく。ここで、$P_i \subseteq P$と仮定すると、$B'_{P'_i} \supseteq B'_P = R'_{\mathfrak{q}} \supseteq R'$となり$F$の定

義に矛盾する。よって、$P_1 \cap \cdots \cap P_n \not\subseteq P$ を得る。そこで、$x \in P_1 \cap \cdots \cap P_n \setminus P$ とし、

$$\Lambda = \{ Q \in \operatorname{Spec} B' ; \operatorname{ht} Q = 1 \text{ かつ } x \notin Q \}$$

とおく。すると、x の取り方より、任意の Λ の元 Q に対して、$B'_Q \supseteq R'$ となるから、$B'_x = \bigcap_{Q \in \Lambda} B'_Q \supseteq R'$ を得る。従って、$B'_x = R'_x$ となり、R'_x は k 上の Affine 環であることがわかる。ところが、R'_x は R_x の整閉包ゆえ、よく知られているように、このとき R_x も Affine 環になる。$x \in B \setminus P \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$ ゆえ、従って、$\mathcal{A}(R) \not\subseteq \mathfrak{p}$ が示せた。

命題 1 と補題 2 より次の定理を得る。

定理 3　体 k 上の Affine 環 A の部分環 R が k 上の Affine 環であるための必要充分条件は、任意の R の極大イデアル m に対して、R_m が k 上の局所域になることである。

次の定理は、局所域であるための1つの条件を与えている。

定理4　体k上のAffine環Aの部分環Rに対し、$tr.deg_k R = d$とする。Rの整閉包R'、およびR'の極大イデアル$\mathfrak{M}$に対し、$ht\,\mathfrak{M} = d$かつRがNoether環ならば、$R'_{\mathfrak{M}}$はk上の局所域である。

証明　$\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap R$とおくと、$R$はNoether環ゆえ、$\mathfrak{m}$は有限生成である。そこで、$\mathfrak{m} = (x_1, \cdots, x_t)R$とする。$k$上のAffine環$B$を、$B$と$R$は双有理かつ、$x_1, \cdots, x_t \in B$となるように選び、$M = \mathfrak{m} \cap B$とおく。$x_1, \cdots, x_t \in M$ゆえ、$MR = \mathfrak{m}$である。また、$ht\,\mathfrak{M} = d$ゆえ、$tr.deg_k B/M \leqq tr.deg_k R'/\mathfrak{M} = 0$、つまり、$B/M$は$k$上代数的となり、従って、$k$が体ゆえ$B/M$も体、即ち、$M$は$B$の極大イデアルであることがわかる。$B'$を$B$の整閉包とし、$\bar{R} = R[B']$とおく。$B$はAffine環ゆえ、$B'$は有限生成$B$－

加群、従って、$\bar{R}$ は有限生成 R-加群である。特に、R が Noether 環ゆえ $\bar{R}$ も Noether 環である。$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \bar{R}$、および、$M' = \mathfrak{n} \cap B'$ とおく。R' は $\bar{R}$ 上整ゆえ、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} \geqq \mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = d$ となり、従って $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} = d$ を得る。一方 B' は B 上整かつ、M' は B の極大イデアル M 上の素イデアルゆえ、M' は B' の極大イデアルである。B' は k 上の affine 環ゆえ、従って、$\mathrm{ht}\,M' = d$ となる。よって、局所環の拡大、$B'_{M'} < \bar{R}_{\mathfrak{n}}$ に対して、$\dim B'_{M'} = \dim \bar{R}_{\mathfrak{n}}$ が示せた。次に、$M'\bar{R}_{\mathfrak{n}} \supseteq M\bar{R}_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ かつ $\mathfrak{m}\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ は $\mathfrak{n}\bar{R}_{\mathfrak{n}}$-準素イデアルであることより、ある正整数 r に対して、$\mathfrak{n}^r\bar{R}_{\mathfrak{n}} \subseteq \mathfrak{m}\bar{R}_{\mathfrak{n}} \subseteq M'\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ となることに注意する。$k' = B'/M'$、$L = \bar{R}/\mathfrak{n}$ とおくと、

$$\mathrm{length}_{k'}\, \bar{R}_{\mathfrak{n}}/M'\bar{R}_{\mathfrak{n}} \leqq (\mathrm{length}_{k'}\, L)(\mathrm{length}_{\bar{R}}\, \bar{R}/\mathfrak{n}^r)$$

ここで、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{n} = d$ ゆえ、$\mathrm{tr.deg}_k\, \bar{R}/\mathfrak{n} = 0$ となり従って、[4] の Theorem 2 により、L は k 上のある affine 環の部分体となる。よって、L は k の有限次代数拡大体であり、特に、$\mathrm{length}_{k'}\, L$ は有限である。また、$\bar{R}$ は Noether 環ゆえ、よく知ら

れているように、$\mathrm{length}_{\bar{R}}\, \bar{R}/\mathfrak{n}^r$ は有限。従って、$\mathrm{length}_{k'}\, \bar{R}_{\mathfrak{n}}/M'\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ が有限であることがわかった。更に、B' は正規 Affine 環ゆえ、局所環 $B'_{M'}$ は解析的正規環であり、また、明らかに $B'_{M'}$ と $\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ とは同じ商体をもつ。故に Zariski の主定理 ([3, Theorem (37.4)]) により、$B'_{M'} = \bar{R}_{\mathfrak{n}}$ を得る。特に、$\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ は整閉整域であり、従って、$\bar{R}_{\mathfrak{n}} = R'_{\mathfrak{n}}$ となる。よって $R'_{\mathfrak{n}}$ は局所環であり、このことから、$R'_{\mathfrak{n}} = R'_{\mathfrak{m}}$ 即ち、$R'_{\mathfrak{m}} = B'_{M'}$ を得る。故に $R'_{\mathfrak{m}}$ は局所域である。

定理 3 と定理 4 より次を得る。

定理 5　体 k 上の affine 環 A の部分環 R に対し、R が Noether 環かつ R の整閉包 R' が等次元、即ち R' の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し、$\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = \mathrm{tr.deg}_k R'$ となるならば、R は k 上の affine 環である。

定理5の応用を述べる前に、ideal transformの定義を思い出しておく。一般に、環Bと、Bのイデアル I に対し、Q(B)でBの全商環を表わすとして

$$T(I, B) = \{x \in Q(B) ; xI^n \subseteq B \quad \text{for some} \quad n \geq 0\}$$

と定義し、これをBの I-transformと呼ぶ。このideal transformは、幾何学的には、Affine多様体の開集合の正則関数環を与えるものとして重要な意味を持ち、ヒルベルトの14問題等との関連からも、ideal transformがいつAffine環になるかということを考えるのは極めて意義のあることと思われる。

そこでまず、ideal transformの特徴付けを1つ与えておく。

命題6　体 k 上のAffine環 A の部分環 R に対し、R が Krull環かつ $\mathrm{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = \mathrm{tr.deg}_k R - 1$ が任意の高さ1の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して成り立つならば、ある正規Affine環 B と B のイデアル I が存在して、$R = T(I, B)$ とかける。

証明　$d = \mathrm{tr.deg}_k R$ とし、$\mathfrak{p}$ を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} = 1$ なる任意の R の素イデアルとする。仮定より、$\mathrm{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = d-1$ ゆえ、$x_2, \cdots, x_d \in R$ を、$x_2 \pmod{\mathfrak{p}}, \cdots, x_d \pmod{\mathfrak{p}}$ が k 上代数的独立であるように選べる。$S = k[x_2, \cdots, x_d] \setminus \{0\}$、$L = k(x_2, \cdots, x_d)$ とおくと、$S^{-1}R$ は体 L 上の affine 環 $S^{-1}A$ の部分環かつ、$\mathrm{tr.deg}_L S^{-1}R = 1$ である。従ってよく知られているように（例えば[4]参照）$S^{-1}R$ は L 上の affine 環である。よって、$R_{\mathfrak{p}} = (S^{-1}R)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ は L 上の、従って k 上の局所域となる。そこで、$0 \neq a \in \mathcal{A}(R)$ なる元 a をとり、a の素因子の全体を、$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ とすれば、上に述べたことより、$R_{\mathfrak{p}_i}$ は k 上の局所域ゆえ、ある k 上の affine 環 $C_i = k[x_{i1}, \cdots, x_{im_i}] \subseteq R$ と、$P_i \in \mathrm{Spec}\, C_i$ があって、$R_{\mathfrak{p}_i} = C_{i P_i}$ となる。また、$a \in \mathcal{A}(R)$ ゆえ、ある $x_1, \cdots, x_m \in R$ があって、$R_a = k[\frac{1}{a}, x_1, \cdots, x_m]$ となる。$C = k[a, x_1, \cdots, x_m, x_{11}, \cdots, x_{nm_n}]$ とおき、B を C の整閉包とすれば、B は k 上の整規 affine 環かつ、作り方から、$P_i = \mathfrak{p}_i \cap B$ に対して、$B_{P_i} = R_{\mathfrak{p}_i}$ および、$B_a = R_a$ となる。従

って、$\mathfrak{a}$ の B における素因子全体を、$P_1, \cdots, P_n$ $P_{n+1}, \cdots, P_\ell$ とし、$I = P_{n+1} \cap \cdots \cap P_\ell$ とおけば、容易にわかるように、$R = T(I, B)$ を得る。

最後に、定理5の応用として、2次元 ideal transform が Affine 環になるための条件を次の形で与えておく（[1], [2] 参照）

命題7　体 k 上の Affine 環 A の部分環 R に対し、R が、$\mathrm{tr.deg}_k R = 2$ なる krull 環であって、任意の高さ1の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、$\mathrm{tr.deg}_k R/\mathfrak{p} = 1$ となるならば、R は k 上の Affine 環である。

証明　条件より、R が Noether 環かつ等次元であることが導けるので、定理5より主張を得る。

定理5により、Affine 環の部分環については Affine 性は、ほぼ等次元性として捉えることが

できる。そこで最初に挙げた具体的な例、たとえば、代数多様体 X の正則関数環 $k[X]$ や、Affine 環 A に群 G が作用している場合の不変部分環 A^G 等に対して、それらがいつ等次元になるかということを、X の幾何的な条件や群 G の条件から考えてみるという問題意識は、何らかの面白い結果をもたらすものと期待できる。

参考文献

[1] P. Eakin, A note on finite dimensional subrings of polynomial rings, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 75-80.

[2] M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Lectures on Math. and Physics, Vol. 31, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1965.

[3] M. Nagata, Local rings

[4] A. R. Wadsworth, Hilbert subalgebras of finitely generated algebras, J. Algebra 43 (1976), 298-304.