代数幾何学シンポジウム記録
1981年度 pp.84-107

3次のSiegel modular formについて

露峰茂明

H_gをg次のSiegel上半平面，すなわち$\{ Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0 \}$とし、$\Gamma_g$をmodular群すなわち$\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2g}(\mathbb{Z}) \mid {}^tAC = {}^tCA,\ {}^tBD = {}^tDB,\ {}^tAD - {}^tCB = 1_g \}$とする。Zは常に$H_g$上の変数を表わすものとする。

Γ_gはH_gに、いわゆるmodular変換

$$Z \longmapsto MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

によって作用している。商空間H_g/Γ_gは$\mathbb{Q}$上定義されたquasi-projective algebraic varietyとなり、これは$\mathbb{C}$上のg次元Abel多様体のcoarse moduliである。

H_g/Γ_gに付随する次数付環（これはmodular formのなす次数付環である）を調べることは興味あることと思われる。

fをH_g上の正則関数とする。fが

$$f(MZ) = |CZ+D|^k f(Z) \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

を満たすとき、fをweight kのmodular form

という（$g=1$ の時は加えて、cusp でも正則であるとする）。$\mathcal{A}(\Gamma_g)$ を modular form のなす環とする。$\mathcal{A}(\Gamma_g)$ は modular form の weight によって.次数環となり、$\mathrm{Proj}(\mathcal{A}(\Gamma_g))$ は H_g/Γ_g の Satake compact 化である。

f を H_g 上の有理関数とする。f が

$$f(MZ)=f(Z), \quad M\in\Gamma_g$$

を満たすとき、f を modular function という（$g=1$ のときは加えて、cusp でも有理型であるとする）。$K(\Gamma_g)$ は modular function のなす体を表わす。

$g=1$ の時，$\mathcal{A}(\Gamma_1)$ は weight 4 及び 6 の 2 つの Eisenstein 級数で生成される.。$g=2$ の時は、井草により $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ は weight が 4，6，10，12 の 4 つの Eisenstein 級数と weight 35 の theta constant の多項式で表わされている modular form により生成されることが示されている。これらの場合、生成元は整の Fourier 係数をもつもののみであるようにできている。

我々は $g=3$ の時を扱うのであるが．結果は

次の通りである。

$A(\Gamma_3)$ は theta constant の有理式として書ける45個の modular form で生成され(この数は最小とは思われない)、これらはいずれも分母が有界の有理 Fourier 係数を持つ。$A(\Gamma_g)_k$ で weight k の modular form の線型空間を表わすことにする。$A(\Gamma_3)$ の generating function $\sum_k \dim_{\mathbb{C}} A(\Gamma_3)_k T^k$ は

$$\frac{1}{(1-T^{12})^3(1-T^{18})(1-T^{20})(1-T^{28})(1-T^{30})} \times$$

$$\{1+T^4+T^6+T^8+2T^{10}+T^{12}+3T^{14}+4T^{16}+4T^{18}+7T^{20}+9T^{22}+11T^{24}+14T^{26}+17T^{28}$$
$$+22T^{30}+25T^{32}+32T^{34}+36T^{36}+45T^{38}+56T^{40}+61T^{42}+70T^{44}+85T^{46}$$
$$+88T^{48}+100T^{50}+111T^{52}+111T^{54}+127T^{56}+128T^{58}+128T^{60}+139T^{62}+131T^{64}$$
$$+134T^{66}+129T^{68}+125T^{70}+118T^{72}+109T^{74}+104T^{76}+90T^{78}+85T^{80}$$
$$+72T^{82}+64T^{84}+55T^{86}+46T^{88}+40T^{90}+31T^{92}+28T^{94}+21T^{96}+16T^{98}$$
$$+14T^{100}+8T^{102}+7T^{104}+5T^{106}+3T^{108}+2T^{110}+2T^{112}+T^{116}\}$$

で得られる。また $K(\Gamma_3)$ の生成元も9つの modular form の(weight 0 の)比として表わすことができる。

$A(\Gamma_3)$ の45コの生成元については、それをこの報告集にかく余裕はないので略することにするが、体 $K(\Gamma_3)$ の生成元は後にかくことにする。

我々は theta 関数を次のように定義する。

$l, m \in M_{1,g}(\mathbb{R})$ に対し

$$\vartheta\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}(Z, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e\left(\frac{1}{2}{}^t(n+\frac{1}{2}{}^tl)Z(n+\frac{1}{2}{}^tl) + {}^t(n+\frac{1}{2}{}^tl)(x+\frac{1}{2}{}^tm)\right)$$

ここで x は $\mathbb{C}^g$ 上の元とし，$e(*) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,*)$ とする。$\vartheta\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}(Z) = \vartheta\begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}(Z, 0)$ とおき，これを theta constant という。

§1 準同型 ρ_g

$\xi_1, \cdots, \xi_r$ を $\mathbb{C}$ 上の変数とし、$S(r)$ を $\mathbb{C}[\xi_i - \xi_j\ (1 \leq i, j \leq r)]$ の次のように定義される部分環とする。s 次の斉次式 $I \in \mathbb{C}[\xi_i - \xi_j]$ が $S(r)$ の元であるのは

$$I\left(\cdots, \frac{a\xi_i + b}{c\xi_i + d}, \cdots\right) = \prod_{i=1}^{r}(c\xi_i + d)^{-s}\, I(\cdots \xi_i \cdots), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

を満たすときである。

さらに $S(2, r)$ を $S(r)$ の次数付部分環で次のように定義されるものとする。$I \in S(r)$ が $S(2, r)$ の元であるのは $I(\xi_1, \cdots \xi_r)$ が $\xi_1, \cdots, \xi_r$ について対称であるときである。$S(2, r)$ を degree r の二次形式の不変式の次数環という。$I \in S(2, r)$ が s 次であるとは、各々の ξ_i に対し s 次であること

とする。

井草[2]により、我々は準同型

$$\rho_g : \mathcal{A}(\Gamma_g(2)) \longrightarrow S(2g+2)$$

を持つ、ここで $\Gamma_g(2)$ は Γ_g の level 2 の主合同群である。$g=1,2$ の場合 ρ_g は単射である。ρ_g は一意的に定まるものではないが、$g=3$ の場合は特に次のように取れる。

V を $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}111\\101\end{smallmatrix}\right](Z)$ の零点集合とすると、

$$0 \longrightarrow \{f \in \mathcal{A}(\Gamma_3(2)) \mid f|_V = 0\} \longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma_3(2)) \xrightarrow{\rho_3} S(8)$$

は exact になる。ρ_g を $\mathcal{A}(\Gamma_g)$ に制限すれば、その像は $S(2,2g+2)$ にはいる。$g=1$ の時 $\rho_1 ; \mathcal{A}(\Gamma_1) \longrightarrow S(2,4)$ は同型，$g=2$ の時 $\rho_2 ; \mathcal{A}(\Gamma_2) \longrightarrow S(2,6)$ は単射、そして $g=3$ の時

$$0 \longrightarrow \chi_{18}\,\mathcal{A}(\Gamma_3) \longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma_3) \xrightarrow{\rho_3} S(2,8)$$

は exact になる、ここで χ_{18} は後に定義する weight 18 の modular form である。χ_{18} は H_3/Γ_3 において $\overline{\{\text{hyperelliptic locus}\}}$ を定義するものであり、またイデアル (χ_{18}) は $\mathcal{A}(\Gamma_3)$ で素イデアルとなる。

$h \in \mathcal{A}(\Gamma_3)$ がイデアル (χ_{18}) にはいってなければ、$f = g/h \quad (g \in \mathcal{A}(\Gamma_3))$ の ρ_3 による像は定義される。

そこで $\mathcal{A}'(\Gamma_3)$ を ρ_3 による像が $S(2,8)$ にはいるような有理 modular form の次数付環とする。明らかに $\mathcal{A}(\Gamma_3) \subset \mathcal{A}'(\Gamma_3)$ である。

$R = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{pmatrix} \subset H_3$ とおくと、明らかに $R \subset V$ である。$z_0 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix} \in R$, $f \in \mathcal{A}'(\Gamma_3)$ に対し

$$\Phi f(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in V}} f(z)$$

と定義する。Γ_2' を theta characteristic $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する Γ_2 の stabilizer subgroup とする。$\Gamma_2' \times \Gamma_1$ は写像

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} A & & B & \\ & a & & b \\ C & & D & \\ & c & & d \end{pmatrix}$$

によって Γ_3 の部分群と考えられるが、この時 $\Gamma_2' \times \Gamma_1$ は R も V も全体としては動かさない。f の weight を k として、$M = \begin{pmatrix} A & & B & \\ & a & & b \\ C & & D & \\ & c & & d \end{pmatrix}$ を $\Gamma_2' \times \Gamma_1$ の元とすると、

$$\begin{aligned} \Phi f(Mz_0) &= \lim_{\substack{z \to Mz_0 \\ z \in V}} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in V}} f(Mz) \\ &= |Cz_1 + D|^k (cz_3 + d)^k \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in V}} f(z) \\ &= |Cz_1 + D|^k (cz_3 + d)^k \, \Phi f(z_0) \end{aligned}$$

である。従って $\Phi f \in \mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$. 我々は $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ も $\mathcal{A}(\Gamma_2')$ も良く構造の分かっていることに注意

する。Φ は $\mathcal{A}'(\Gamma_3)$ から $\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ への準同型を定義する。

$\mathcal{A}(\Gamma_2')$ の ρ_2 での像を $S'(2,6)$ とおく。我々は次の図を可換にする写像 $\Phi\,;\,S(2,8)\longrightarrow S'(2,6)\otimes S(2,4)$ を得る；

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}'(\Gamma_3) \arrow[r, "\rho_3"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S(2,8) \arrow[d, "\Phi"] \\
\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1) \arrow[r, "\rho_2\otimes\rho_1"] & S'(2,6)\otimes S(2,4)
\end{tikzcd}
$$
。

この $S(2,8)$ から $S'(2,6)\otimes S(2,4)$ への写像 Φ の定義はここでは省くことにする。$f\in\mathcal{A}(\Gamma_3)$ に対し、$f\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix}$ を計算することはそう容易ではないが、もしその ρ による像が分かっていれば、図の右側の Φ を用いて計算することができる（図の $\rho_2\otimes\rho_1$ は分かり易い同型写像である）。また $f\in\mathcal{A}(\Gamma_3)$ が V に沿って R に近づく時 order いくつの零を持つかも $\rho_3(f)$ をみることによって容易に計算できる。

上の可換な図によって多くの結果を得ることができるが、以後はそれを断わらずに述べ

ていくことにする。

§2 方法の概略

以後は $\mathcal{A}(\Gamma_3)$ を $\mathcal{A}$，$\mathcal{A}'(\Gamma_3)$ を $\mathcal{A}'$ とおくことにする。R，V は前と同じものとする。V は R で non-singular である。

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & \tau \\ {}^t\tau & z_3 \end{pmatrix} \in H_3, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに $Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix}$ とおき、Z_0 での $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}111\\101\end{smallmatrix}\right]$ の展開を求めると、

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}111\\101\end{smallmatrix}\right](Z) = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right](Z_1,0)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](z_3)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right](z_3)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right](z_3)\,\tau_i$$

$$+\ (\tau_i \text{ の highter term })。$$

$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](z_3)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right](z_3)\,\vartheta\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right](z_3)$ は H_1 のどの点でも零とならず、また $\frac{\partial}{\partial x_i}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right]$ $(i=1,2)$ はどの $Z_1 \in H_2$ に対しても同時に消えてしまうことはない。我々は Z_1 を特に $\frac{\partial}{\partial x_1}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right](Z_1,0) \neq 0$，$\frac{\partial}{\partial x_2}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}11\\10\end{smallmatrix}\right](Z_1,0) \neq 0$ なるようにとっておくことにする。この時 V 上では τ_1 は τ_2 の analytic な関数となり、逆も成りたつ。

$f \in \mathcal{A}$ に対し、Z_0 での V 上の展開を

$$f(Z) = \sum_n a_n(Z_0)\,\tau_2^n$$

とおき、$a_n(Z_0) \neq 0$ なる n の最小数を $\nu(f)$ とおく。$\nu(f)$ は f が V に沿って R に近づけたときの零の order であるが、今後は単に f の order ということにする。$f \in \mathcal{A}$ の weight は偶であることに気をつければ $\nu(f) \in 2\mathbb{Z}$ を得る。また f が V 上で恒等的に消えていれば、$\nu(f) = +\infty$ とおく。

ここで $\mathcal{A}$ の modular form のうちで特別なものをふたつ紹介する。

ところで theta characteristic $k = \binom{l}{m} \in M_{2,g}(\mathbb{Z})$ が偶であるとは $e(\frac{1}{2} l {}^t m) = 1$ なることとし、奇であるとは $e(\frac{1}{2} l {}^t m) = -1$ なることとする。$g = 3$ の時は、36個の偶 theta characteristic が存在する。

$$\chi_{18} = \prod_{k;\text{偶}} \vartheta[k]$$

とおくと χ_{18} は weight 18 の modular form となり、§1 に述べたような性質を持つ。従って $\nu(\chi_{18}) = +\infty$ である。

$\{k_1, \ldots, k_s\}$ を異なった偶 theta characteristic からなる列とする。この列が syzygetic であるとはどの3つの $k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}$ の和もまた偶 theta characteristic になることであるとする。$g = 3$ の

場合、最大な syzygetic な列は常に 8 つの元からなり、このような列は全部で 135 個ある。

weight 28 の modular form χ_{28} を次のように定義する。$30\chi_{28}$ は偶 theta characteristic 全体から最大 syzygetic な列を引いたものに対応する theta constant の積を二乗し(135 個の最大 syzygetic 列について)和を取ったものとする。χ_{28} は $\overline{\{\text{hyperelliptic locus}\}}$ 上では reducible point ($\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix}$ に modular 変換で移る点)でしか消えない。即ち

$$
Z \in H_3
\begin{cases}
\chi_{18}(Z) \neq 0 \ ; \ Z \text{ は non-hyperelliptic curve の Jacobi 多様体に対応する} \\[2ex]
\chi_{18}(Z) = 0
\begin{cases}
\chi_{28}(Z) \neq 0 \ ; \ Z \text{ は hyperelliptic curve の Jacobi 多様体に対応する} \\[2ex]
\chi_{28}(Z) = 0 \ ; \ Z \text{ は reducible point}
\end{cases}
\end{cases}
$$

。

また $\nu(\chi_{28}) = 8$ である。我々は証明なしで、次の命題を述べる。

命題 1. f を $\mathcal{A}$ の元とする。$\nu(f) = \frac{2}{7}\,\mathrm{weight}(f)$ ならば、f は V 上で定数倍を除いて χ_{28} の巾に一致する。また $\nu(f) > \frac{2}{7}\,\mathrm{weight}(f)$ ならば、f は

V上で消える、即ち $\nu(f)=+\infty$ である。§1に述べた χ_{18} の性質により、modular form $g\in\mathcal{A}$ が存在して、$f=g\chi_{18}$ とかける。

偶数 ν に対して $\mathcal{A}$ のイデアル $\mathcal{A}(\nu)$ を

$$\mathcal{A}(\nu)=\{f\in\mathcal{A}\mid \nu(f)\geq\nu\}$$

によって定義する。明らかに $\mathcal{A}(\nu_1)\mathcal{A}(\nu_2)\subset\mathcal{A}(\nu_1+\nu_2)$ である。さらに我々は

$$\overline{\mathcal{A}(\nu)}=\mathcal{A}(\nu)/\mathcal{A}(\nu+2)$$

と定義する。$\overline{\mathcal{A}(0)}$ は次数付環であり、$\overline{\mathcal{A}(\nu)}$ は次数付 $\overline{\mathcal{A}(0)}$-加群となる。

ν を8の倍数とする。この時 $f\in\mathcal{A}(\nu)$ に対し $f\cdot\chi_{28}^{-\frac{\nu}{8}}$ は $\mathcal{A}'$ にはいることが示される。$\Phi(\nu)$ を

$$\mathcal{A}(\nu)\xrightarrow{\text{mult. by }\chi_{28}^{-\frac{\nu}{8}}}\mathcal{A}'\xrightarrow{\Phi}\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$$

なる写像とすると、

$$0\longrightarrow\mathcal{A}(\nu+2)\longrightarrow\mathcal{A}(\nu)\xrightarrow{\Phi(\nu)}\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$$

は exact であり、これにより $\overline{\mathcal{A}(\nu)}$ は $\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ の部分加群とみられる。

また order がそれぞれ 2, 4, 6 の modular form β, γ, δ を適当に選んで、ν が mod 8 で 2 (resp 4, 6)

に等しい時．$\Phi(\nu)$ を

$$\mathcal{A}(\nu) \xrightarrow{\text{mult by } \delta x_{28}^{-\frac{\nu+6}{8}} \ (\text{resp } \gamma x_{28}^{-\frac{\nu+4}{8}},\ \beta x_{28}^{-\frac{\nu+2}{8}})} \mathcal{A}' \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$$

によって定義すれば、上と同様にして $\overline{\mathcal{A}}(\nu)$ も $\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ の $\overline{\mathcal{A}}(0)$-部分加群とみることができる。$\overline{\mathcal{A}}(0)$ の部分環で5変数の多項式環の部分環と同型のもので、$\mathcal{A}$ の部分環に lift できるものが存在するが、その環上の加群として

$$\mathcal{A}/(x_{18}) \simeq \overline{\mathcal{A}}(0)\oplus\overline{\mathcal{A}}(2)\oplus\cdots\oplus\overline{\mathcal{A}}(\nu)\oplus\cdots$$

の同型を得る。

$x_{28}\mathcal{A}(\nu)\subset\mathcal{A}(\nu+8)$ であるから、$\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ の部分加群として $\overline{\mathcal{A}}(\nu)\subset\overline{\mathcal{A}}(\nu+8)$ であるが、実際 $\nu=0$ の場合を除き $\overline{\mathcal{A}}(\nu)=\overline{\mathcal{A}}(\nu+8)$ を得る．従って

$$\mathcal{A}/(x_{18}) \simeq \overline{\mathcal{A}}(0)\oplus\bigoplus_{k\geq 0}\left(\overline{\mathcal{A}}(2)\oplus\overline{\mathcal{A}}(4)\oplus\overline{\mathcal{A}}(6)\oplus\overline{\mathcal{A}}(8)\right)x_{28}^{k}$$

となる。

我々はまず環 $\overline{\mathcal{A}}(0)$ の生成元を求め、Φ での像がそれになる $\mathcal{A}$ の元を求める。次に $\overline{\mathcal{A}}(2)$, $\overline{\mathcal{A}}(4)$, $\overline{\mathcal{A}}(6)$, $\overline{\mathcal{A}}(8)$ の $\overline{\mathcal{A}}(0)$-加群としての構造を決めて、その生成元に落ちてくる $\mathcal{A}$ の元を求める。それらと x_{18}, x_{28} が $\mathcal{A}$ の生成元になることは、命題1により容易に分かる。また $\overline{\mathcal{A}}(0),\cdots,\overline{\mathcal{A}}(8)$ の

generating function を求めれば自動的に $\mathcal{A}$ の generating function も決定される。

§3 $K(\Gamma_3)$ について I

modular form は常に偶 weight のものしか考えないことにする。$K(\Gamma_3)$ の生成元については、なるべく $\mathcal{A}$ の構造定理は用いない簡素な構成法を示すことにする。

$\mathcal{A}(\Gamma_1)$ は二つの modular form f_4, f_6 で生成されている。なお

$$f_4 = \sum_{k:\text{偶}} \vartheta[k]^8 \ , \qquad f_6 = \sum_{M;\Gamma_1/\Gamma_1(2)} M\, \vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]^8 \vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]^4$$

である、ここで weight k の $\Gamma_g(2)$ の modular form f と $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Gamma_g$ に対して、$Mf(Z) = |CZ+D|^{-k} f(MZ)$ とおく。

さらに $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ は 4 つの modular form $\psi_4, \psi_6, \psi_{10}, \psi_{12}$ で生成されている。ここで

$$\psi_4 = \sum_{k:\text{偶}} \vartheta[k]^8, \qquad \psi_6 = \sum_{M:\Gamma_2/\Gamma_2(2)} M\, \vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\00\end{smallmatrix}\right]^6 \vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix}\right]^2 \vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\01\end{smallmatrix}\right]^2 \vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\11\end{smallmatrix}\right]^2,$$

$$\psi_{10} = \prod_{k:\text{偶}} \vartheta[k]^2 \ , \qquad \psi_{12} = \sum_{M:\Gamma_2/\Gamma_2(2)} M\left(\vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\10\end{smallmatrix}\right] \vartheta\left[\begin{smallmatrix}01\\00\end{smallmatrix}\right] \vartheta\left[\begin{smallmatrix}10\\00\end{smallmatrix}\right] \vartheta\left[\begin{smallmatrix}00\\01\end{smallmatrix}\right] \vartheta\left[\begin{smallmatrix}10\\01\end{smallmatrix}\right] \vartheta\left[\begin{smallmatrix}01\\10\end{smallmatrix}\right]\right)^2$$

である。

$\mathcal{A}(\Gamma_1)$ の generating function は $\dfrac{1}{(1-T^4)(1-T^6)}$ ，そして

$\mathcal{A}(\Gamma_2)$ の generating function は $\dfrac{1}{(1-T^4)(1-T^6)(1-T^{10})(1-T^{12})}$ 、

$\mathcal{A}(\Gamma_2')$ の generating function は

$$\frac{1+T^{12}+T^{16}+T^{18}+T^{20}+T^{24}}{(1-T^4)(1-T^6)(1-T^{10})(1-T^{12})}$$

で与えられる。これより $\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ の generating function は

$$\frac{1}{(1-T^{12})^3(1-T^{20})(1-T^{30})}\times\{1+T^4+T^6+T^8+2T^{10}+5T^{12}+2T^{14}+9T^{16}+9T^{18}+12T^{20}$$
$$+14T^{22}+23T^{24}+19T^{26}+29T^{28}+33T^{30}+31T^{32}+39T^{34}+42T^{36}+38T^{38}+47T^{40}+41T^{42}+42T^{44}$$
$$+41T^{46}+41T^{48}+32T^{50}+34T^{52}+29T^{54}+24T^{56}+21T^{58}+18T^{60}+11T^{62}+12T^{64}+7T^{66}+4T^{68}$$
$$+2T^{70}+3T^{72}\}$$

で与えられることが導びかれる。$\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ は従って 5 つの次数が 12, 12, 12, 20, 30 の変数の多項式環と同型な部分環上 integral な拡大として実現されることが示される。我々はこれより、ひとつ増やした 6 つの生成元を持つ環 $\overline{\Lambda}_0$

$$\overline{\Lambda}_0=\mathbb{C}[\psi_4\otimes\mathfrak{s}_4,\ \psi_6\otimes\mathfrak{s}_6,\ \psi_{12}\otimes(\mathfrak{s}_4^3-2\mathfrak{s}_6^2)$$
$$(2^2 3^4\psi_{12}+\psi_4^3-4\psi_6^2)\otimes(\mathfrak{s}_4^3-2\mathfrak{s}_6^2)+2^2\cdot 3^4\psi_{12}\otimes(8\mathfrak{s}_6^2+5\mathfrak{s}_4^3),$$
$$\psi_{10}^2\otimes\mathfrak{s}_4^5,\quad \psi_{10}^3\otimes\mathfrak{s}_6^5\quad]$$

上 $\mathcal{A}(\Gamma_2')\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1)$ は integral であることを得る。

F(*) によって環 * の（次数 0 の元からなる）

体を表わすことにすれば

$$F(\bar{\Lambda}_0)=F(\mathcal{A}(\Gamma_2))\cdot\mathbb{C}((e_4^3/e_6^2)^5)$$

となり、これは $F(\mathcal{A}(\Gamma_2)\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1))$ の位数 5 の部分体である。

$\bar{\Lambda}_0$ に $\psi_{10}\otimes e_4e_6$ を加えてできる環を $\bar{\Lambda}_1$ とおくと、

$$F(\bar{\Lambda}_1)=F(\mathcal{A}(\Gamma_2)\otimes\mathcal{A}(\Gamma_1))$$

となる。ここで我々は次の注意をする。$\mathcal{A}$ に weight が 4, 6, 12, 12, 20, 30, 10 の modular form $\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{10}$ が存在して、それぞれの至による像は順に $\bar{\Lambda}_0$ の生成元及び $\psi_{10}\otimes e_4e_6$ になっている。

さて $\Gamma_2/\Gamma_2(2)$ は 6 つの奇 theta characteristic に置換群として忠実に作用しており、実際 $\Gamma_2/\Gamma_2(2)$ と 6 次の置換群 $\mathfrak{S}_6$ は同型である。$\Gamma_2'/\Gamma_2(2)$ は奇 theta characteristic ひとつを動かさないような作用であるから $\mathfrak{S}_5$ と同型になっている。真に $\mathfrak{S}_5$ と $\mathfrak{S}_6$ の間にあるような群はないことに注意すれば次の補題を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\Gamma_2(2)) & & \{e\} \\ | & & | \\ \mathcal{A}(\Gamma_2') & & \mathfrak{S}_5 \\ | & & | \\ \mathcal{A}(\Gamma_2) & & \mathfrak{S}_6 \end{array}$$

補題 1　ψ を $\mathcal{A}(k_2)$ にはない $\mathcal{A}(k_2')$ の元とする。この時 $\varphi_0 \in \mathcal{A}(k_2), \neq 0$ が存在して

$$\varphi_0 \mathcal{A}(k_2') \subset \mathcal{A}(k_2)\psi + \cdots + \mathcal{A}(k_2)\psi^6$$

となる。

系　ψ を上述のものとし、$\psi \otimes \xi$ の形をした $\mathcal{A}(k_2') \otimes \mathcal{A}(k_1)$ の元を取る。この時 $\chi' \in \bar{\Lambda}_1, \neq 0$ が存在して

$$\chi'(\mathcal{A}(k_2') \otimes \mathcal{A}(k_1)) \subset \bar{\Lambda}_1(\psi \otimes \xi) + \cdots + \bar{\Lambda}_1(\psi \otimes \xi)^6$$

となる。

さて、$F(\bar{\Lambda}_0[\psi \otimes \xi])$ と $F(\bar{\Lambda}_1)$ は $F(\bar{\Lambda}_0)$ 上 linearly disjoint であるように $\psi \otimes \xi$ を取る。この時両方の体ともに $F(\bar{\Lambda}_0)$ との中間体を持たず、

$$F(\bar{\Lambda}_0[\psi \otimes \xi \cdot (\psi_{10} \otimes \xi_4 \xi_6)^t]) = F(\bar{\Lambda}_1[\psi \otimes \xi])$$

を得る、ここで t は 5 と素な正整数である。

補題 2　上と同じ条件のもとに、$\lambda \in \bar{\Lambda}_0, \neq 0$ が存在して

$$\lambda(\mathcal{A}(k_2') \otimes \mathcal{A}(k_1)) \subset \bar{\Lambda}_0(\psi \otimes \xi \cdot (\psi_{10} \otimes \xi_4 \xi_6)^t) + \cdots + \bar{\Lambda}_0(\psi \otimes \xi \cdot (\psi_{10} \otimes \xi_4 \xi_6)^t)^{30}$$

となる。

§4 $K(\Gamma_3)$ について II

β を order 2 の modular form とする。§2 において定義した $\Phi(\nu)$ を、この β を用いてすることにする。すなわち、$\nu \equiv 2$ (resp. 4, 6) mod 8 なる時 $\Phi(\nu)$ を

$$\mathcal{A}(\nu) \xrightarrow{\text{mult. by } \beta^3 \chi_{28}^{-\frac{\nu+6}{8}} \text{ (resp. } \beta^2 \chi_{28}^{-\frac{\nu+4}{8}},\ \beta \chi_{28}^{-\frac{\nu+2}{8}})} \mathcal{A}' \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$$

により定義する。

さてここで環 Λ_0 を

$$\Lambda_0 = \mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}, \beta, \chi_{28}, \chi_{18}]$$

により定義する。$\bar{\Lambda}_0 = \Phi(\Lambda_0)$ であり、$\bar{\Lambda}_0 \subset \bar{\mathcal{A}}(0)$ である。我々は $\bar{\mathcal{A}}(0)$-加群の昇鎖

$$\bar{\mathcal{A}}(0) \subset \Phi(8)\mathcal{A}(8) \subset \cdots\cdots$$

$$\Phi(2)\mathcal{A}(2) \subset \Phi(10)\mathcal{A}(10) \subset \cdots\cdots$$

$$\Phi(4)\mathcal{A}(4) \subset \Phi(12)\mathcal{A}(12) \subset \cdots\cdots$$

$$\Phi(6)\mathcal{A}(6) \subset \Phi(14)\mathcal{A}(14) \subset \cdots\cdots$$

を持つ。すべて $\mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$ の部分加群であり、$\mathcal{A}(\Gamma_2') \otimes \mathcal{A}(\Gamma_1)$ は Noether $\bar{\Lambda}_0$-加群であるから、正の偶数 ν_0 が存在して、すべての $\nu_0 \leq \nu$ に対し

$$\Phi(\nu-8)\mathcal{A}(\nu-8) = \Phi(\nu)\mathcal{A}(\nu)$$

となる。補題 1 と上のことより我々は次を得

る。

補題 3　$f \in \mathcal{A}$ が $\nu(f) \geq \nu_0$ であるとする。この時 $g, h \in \mathcal{A}$ が存在して

$$f = g\chi_{28} + h\chi_{18}$$

とかける。

さてここで我々は β が

$$\Phi(8)\beta^4 = \psi \otimes \bar{\psi} \cdot (\chi_{10} \otimes \bar{\psi}_4 \bar{\psi}_6)^4$$

なるものであると仮定する、$\psi \otimes \bar{\psi}$ は §3 の性質を持つものである。

補題 4　ν は 240 より大きい正の偶数とする。この時、$\mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}]$ の元 P で order 0 のものが存在し、すべての ν に対し

$$\Phi(\nu)(P\mathcal{A}(\nu)) \subset \Phi(\nu)(\Lambda_0 \cap \mathcal{A}(\nu))$$

となる。

証明）$\Lambda_0 \cap \mathcal{A}(\nu)$ は

$$\sum_{2n_1+8n_2 \geq 2} \mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}]\beta^{n_1}\chi_{28}^{n_2}$$

なるものを含む。例えば $\nu \equiv 0 \bmod 8$ の場合、

$$\Phi(\nu)(\Lambda_0 \cap \mathcal{A}(\nu)) \supset \bar{\Lambda}_0(\psi \otimes \chi(\psi_{10} \otimes \chi_4 \chi_6)^4) + \cdots + \bar{\Lambda}_0(\psi \otimes \chi(\psi_{10} \otimes \chi_4 \chi_6)^4)^{\frac{\nu}{8}}$$

$$\supset \bar{\Lambda}_0(\psi \otimes \chi(\psi_{10} \otimes \chi_4 \chi_6)^4) + \cdots + \bar{\Lambda}_0(\psi \otimes \chi(\psi_{10} \otimes \chi_4 \chi_6)^4)^{30}.$$

補題 2 より P の存在は保証される。他の場合も同様である。

補題 5　すべての偶数 $\nu \geq 0$ に対し、$\mathcal{A}(\nu)$ は Λ_0 上有限生加群である。

証明）これは §2 の末尾にのべたアイデアと、補題 3 により容易に示される。

定理　$K(\Gamma_3) = F(\Lambda_0)$

証明）$\mathcal{A}(2) \cap \Lambda_0$ は Λ_0 の素イデアルである。さらに環 $\Lambda_0[x_{18}/x_{28}^k, (k=1,2,\cdots)]$ の中でイデアル

$$(\mathcal{A}(2) \cap \Lambda_0,\ x_{18}/x_{28}^k\ (k=1,2,\cdots))$$

は素イデアルである。$\Lambda_0[x_{18}/x_{28}^k\ (k=1,2\cdots)]$ の上記のイデアルによる局所化を Λ で表わすことにする。Λ は Λ_0 の商体の部分環である。

定理は十分大きな ν_1 に対して，$\mathcal{A}(\nu_1)$ は Λ の

商体にはいることを示せば十分である、実際$\mathcal{A}$にχ_{28}の十分大きな巾乗をかければ$\mathcal{A}(\nu_1)$にはいってしまうからである。

補題5より、$\mathcal{A}(\nu_1)$の有限個のmodular formの列$\{f_1, \cdots, f_t\}$が存在して

$$\mathcal{A}(\nu_1) \subset \Lambda f_1 + \cdots + \Lambda f_t .$$

である。我々はこのようなmodular formの列のうち極小なものを取ってきたと仮定してよい。今、ν_1は$\max\{\nu_0, 240\}$より大きい任意の偶数としたとき、$t=1$であることを証明しよう。

今、$t \geq 2$と仮定する。さらにf_tのorderはν_1であるとしても以下の証明の一般性は失なわない。補題4より、$\mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}]$のorder 0の元$P$が存在して

$$\Phi(\nu_1) P f_t = \Phi(\nu_1)\lambda_0, \qquad \lambda_0 \in \mathcal{A}(\nu_1) \cap \Lambda_0$$

となるようにできる。この時$\Phi(\nu_1)(Pf_t - \lambda_0) = 0$となるから$\nu(Pf_t - \lambda_0) \geq \nu_1 + 2$である。再び補題4を用いて

$$\Phi(\nu_1+2)(P^2 f_t - P\lambda_0) = \Phi(\nu_1+2)\lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathcal{A}(\nu_1+2) \cap \Lambda_0$$

となる。これを繰り返すことによって次の結

果を得る。$Q \in \Lambda_0$ が存在して

$$\nu(P^4 f_t - Q) \geq \nu_1 + \delta,$$

従って補題3より

$$P^4 f_t - Q = g\, x_{2\delta} + h\, x_{1\delta} \qquad g,\ h \in \mathcal{A}$$

とかける、ここで明らかに $\nu(g) \geq \nu_1$ 即ち $g \in \mathcal{A}(\nu_1)$ である。n を十分大きくとって、$h\, x_{2\delta}^n \in \mathcal{A}(\nu_1)$ とすれば、$\mathcal{A}(\nu_1) \subset \Lambda f_1 + \cdots + \Lambda f_t$ なる仮定により、

$$g = \sum_{i=1}^{t} a_i f_i,\quad h\, x_{2\delta}^n = \sum_{i=1}^{t} b_i f_i, \qquad a_i,\ b_i \in \Lambda$$

とかけ、従って

$$(P^4 - a_t x_{2\delta} - b_t x_{1\delta}/x_{2\delta}^n) f_t = Q + \sum_{i=1}^{t-1} a_i x_{2\delta} f_i + \sum_{i=1}^{t-1} b_i x_{1\delta}/x_{2\delta}^n\, f_i$$

となる。ここで P は order 0 であったから、$P^4 - a_t x_{2\delta} - b_t x_{1\delta}/x_{2\delta}^n$ は Λ で unit であり、従って f_t は他の生成元の線形結合で書けてしまった。$\{f_1, \ldots, f_t\}$ の極小性より $t=1$ でなければならない。従って $\mathcal{A}(\nu_1) \subset \Lambda f_1$ であるが、$\mathcal{A}(\nu_1)$ の中には Λ と共通の元、例えば $x_{1\delta}$、がはいっているので f_1 は Λ の単体の元である。これで定理は示された。

H_3/Γ_3 は6次元の variety であるから、その関

数体は6つか7つの元で生成されるはずである。6ならばrational varietyということになるが、これはまだ分かっていない。

いずれにせよ8つの生成元でかいてしまい、そこまで手の回らなかったことは不徳のいたすところであります。

最後に具体的に生成元を与えて終わりにする。

系 $K(\Gamma_3) = F(\mathbb{C}[\alpha_4, \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{12}', \alpha_{20}, \alpha_{30}, \alpha_{10}\beta_{14}, \chi_{28}, \chi_{18}])$

証明） $\alpha_{10}\beta_{14}$が途中に使ったいくつかの条件を満たすことを示せばよいが、これは§1に述べた主という写像により、容易な計算で導びかれる。

$$\alpha_4 = \frac{1}{4}\sum_{k:\mathrm{even}} \vartheta[k]^8,$$

$$\alpha_6 = 2^{-6}3^{-1}7^{-1}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\, \vartheta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix}^5 \vartheta\begin{bmatrix}000\\100\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\101\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\001\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\011\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\010\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\111\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\110\end{bmatrix}$$

$$\alpha_{10} = -2^{-3}3^{-2}5^{-1}11^{-1}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\, \vartheta\begin{bmatrix}110\\000\end{bmatrix}^2 \vartheta\begin{bmatrix}010\\000\end{bmatrix}^2 \vartheta\begin{bmatrix}010\\100\end{bmatrix}^2 \vartheta\begin{bmatrix}110\\110\end{bmatrix}^2 \vartheta\begin{bmatrix}100\\010\end{bmatrix}^2 \vartheta\begin{bmatrix}100\\000\end{bmatrix}^2$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}000\\100\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\101\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\001\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\011\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\010\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\111\end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix}000\\110\end{bmatrix}$$

$$\alpha_{12}=2^{-6}3^{-2}5^{-1}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\left(\vartheta\begin{bmatrix}110\\00\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}011\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}111\\110\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\010\end{bmatrix}\right)^4$$

$$\alpha_{12}'=2^{-5}3^{4}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\left(\vartheta\begin{bmatrix}110\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\100\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\111\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\110\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.\vartheta\begin{bmatrix}100\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\010\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\001\end{bmatrix}\right)^2$$

$$\alpha_{20}=-2^{3}5\cdot 7^{-1}\alpha_{10}^{2}$$
$$+2^{-4}\cdot 3\cdot 5^{-1}7^{-1}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\left(\vartheta\begin{bmatrix}110\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\100\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\111\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\110\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\100\end{bmatrix}\right.$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}000\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\010\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\00\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\010\end{bmatrix}$$
$$\left.\vartheta\begin{bmatrix}000\\111\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\110\end{bmatrix}\right)^2$$

$$\alpha_{30}=2^{-4}5^{-1}7^{-1}\cdot 11^{-1}\alpha_{10}^{3}-2^{-7}\cdot 3^{-1}\cdot 313^{-1}\alpha_{10}\alpha_{20}$$
$$+2^{-1}3^{7}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\left(\vartheta\begin{bmatrix}110\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\100\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\111\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\110\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\100\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.\vartheta\begin{bmatrix}000\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\010\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\010\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\111\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\110\end{bmatrix}\right)^3$$
$$\cdot\,\vartheta\begin{bmatrix}000\\001\end{bmatrix}^5\vartheta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix}$$

$$\beta_{14}=2^{-8}7^{-1}\sum_{M:\Gamma/\Gamma(2)} M\,\vartheta\begin{bmatrix}011\\111\end{bmatrix}^7\vartheta\begin{bmatrix}011\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\00\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}110\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}111\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}011\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}011\\100\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}010\\101\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\101\end{bmatrix}$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}101\\111\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}001\\100\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\100\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\001\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\011\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}101\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}100\\000\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\010\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}000\\111\end{bmatrix}$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}000\\110\end{bmatrix}\vartheta\begin{bmatrix}001\\110\end{bmatrix}$$

χ_8, χ_{28} については §2 で述べた通りである。

参考文献

[1] J. Igusa; On Siegel modular forms of genus two (II)
Amer. J. Math 86 (1966), 221–236.

[2] ———; Modular forms and projective invariants
Amer. J. Math 89 (1967) 817–855.

[3] T. Shioda. On the graded ring of invariants of binary octavics, Amer. J. Math 89 (1967)

[4] S. Tsuyumine; On Siegel modular forms of degree three (preprint).